DS3 (vA)

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidat·es sont invité·es à ***encadrer*** *dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*
Aucun document n'est autorisé. ***L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique*** *est* ***interdite****. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*
Si au cours de l'épreuve, un candidat ou une candidate repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

On suppose, et c'est valable pour toute l'épreuve, que les librairies suivantes sont importées sous leurs alias habituels :

- `import numpy as np`
- `import numpy.random as rd`
- `import matplotlib.pyplot as plt`

Exercice 1

Partie I

On note $E = \mathbb{R}_2[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 2.
Soit f l'application définie sur E qui associe à tout polynôme $P \in E$, le polynôme $f(P)$ défini par :

$$\big(f(P)\big)(X) \;=\; (1 - X - X^2)\, P'(X) + \frac{1}{2}(-1 - X + 3\,X^2 + 2\,X^3)\, P''(X)$$

Dans la suite, on note $\mathscr{B} = (P_0, P_1, P_2)$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.

1. Montrer que f est un endomorphisme de E.

2. Déterminer la matrice A représentative de f dans la base canonique de E.

3. Montrer : $f \circ f = 0_{\mathscr{L}(E)}$.

4. Démontrer que f n'est pas bijectif.

5. ***a)*** Déterminer des bases de $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ ainsi que les dimensions de ces espaces vectoriels.

b) Démontrer que la famille $\mathcal{F} = \big(f(P_1), P_0\big)$ est une base de $\mathrm{Ker}(f)$.

6. ***a)*** Montrer que la famille $\mathcal{G} = \big(P_1, f(P_1), P_0\big)$ est une base de E.

b) Déterminer la matrice T représentative de f dans la base $\big(P_1, f(P_1), P_0\big)$.

Partie II

On note désormais E un espace vectoriel **quelconque** de dimension 3.
On considère dans la suite f un endomorphisme de E différent de l'endomorphisme nul de E.

7. Montrer : $f \circ f = 0_{\mathscr{L}(E)} \;\Leftrightarrow\; \mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(f)$.

On suppose dans les questions ***8.*** et ***9.*** : $f \circ f = 0_{\mathscr{L}(E)}$.

8. ***a)*** Comparer les dimensions de $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$.

b) Déterminer alors précisément les dimensions de ces deux espaces vectoriels.

9. Soient $u \notin \mathrm{Ker}(f)$ et $v \in \mathrm{Ker}(f) \setminus \mathrm{Im}(f)$.

a) Montrer que la famille $\mathcal{F} = (f(u), v)$ est une base de $\mathrm{Ker}(f)$.

b) Montrer que la famille $\mathcal{G} = (u, f(u), v)$ est une base de E.

c) Déterminer la matrice T représentative de f dans la base $(u, f(u), v)$.

Exercice 2

Soit a un réel strictement positif. On considère la fonction f_a définie pour tout réel t strictement positif par :

$$f_a(t) = \frac{1}{2}\left(t + \frac{a^2}{t}\right)$$

ainsi que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombre réels déterminée par son premier terme $u_0 > 0$ et par la relation dé récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f_a(u_n)$$

Partie 1 : Etude des variations de la fonction f_a.

1. Déterminer la limite de $f_a(t)$ lorsque t tend vers $+\infty$.

2. Déterminer la limite de $f_a(t)$ lorsque t tend vers 0 par valeurs positives. Interpréter graphiquement cette limite.

3. Calculer, pour tout réel $t > 0$, $f_a'(t)$. Dresser le tableau de variations de f_a.

4. En déduire que :

$$\forall t > 0,\ f_a(t) \geqslant a$$

5. Tracer la courbe représentative de f_a.

6. Écrire une fonction **Python** `f(a, t)` qui prend en entrée deux réels a et t strictement positifs et qui renvoie le nombre $f_a(t)$.

Partie 2 : Etude de la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

7. Que dire de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans le cas particulier où $u_0 = a$?

8. Dans toute la suite, on revient au cas général $u_0 > 0$.
Démontrer que :

$$\forall t \geqslant a,\ 0 \leqslant f_a'(t) < \frac{1}{2}$$

9. Montrer que, pour tout entier naturel non nul n :

$$u_n \geqslant a$$

10. Prouver alors que, pour tout entier naturel non nul n :

$$0 \leqslant u_{n+1} - a \leqslant \frac{1}{2}(u_n - a)$$

puis que :

$$|u_n - a| \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} |u_1 - a|$$

11. En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et préciser sa limite.

12. En utilisant ce qui précède, écrire un programme **Python** permettant d'afficher les 100 premiers termes d'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de premier terme $u_0 = 1$ et convergeant vers $\sqrt{2}$.

Exercice 3

Dans cet exercice, p désigne un réel de $]0,1[$ et on note $q = 1 - p$.
On considère deux variables aléatoires X et Y définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, indépendantes et suivant toutes deux la même loi géométrique de paramètre p.

1. On pose $Z = \min(X, Y)$ et on admet que Z est une variable aléatoire, elle aussi définie sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.
On rappelle que, pour tout entier naturel k, on a l'égalité : $[Z > k] = [X > k] \cap [Y > k]$.

- ***a)*** Pour tout entier naturel k, calculer $\mathbb{P}\big([Z > k]\big)$.
- ***b)*** Établir que, pour tout entier naturel k supérieur ou égal à 1, on a :

$$\mathbb{P}\big([Z = k]\big) = \mathbb{P}\big([Z > k-1]\big) - \mathbb{P}\big([Z > k]\big)$$

- ***c)*** En déduire que Z suit la loi géométrique de paramètre $(1 - q^2)$.

2. On définit la variable aléatoire T de la façon suivante :
Pour tout ω de Ω tel que $X(\omega)$ est un entier naturel pair, on pose $T(\omega) = \dfrac{X(\omega)}{2}$,
et, pour tout ω de Ω tel que $X(\omega)$ est un entier naturel impair, on pose $T(\omega) = \dfrac{1 + X(\omega)}{2}$.
On admet que T est une variable aléatoire, elle aussi définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

- ***a)*** Montrer que T prend des valeurs entières non nulles.
- ***b)*** Réciproquement, justifier que tout entier naturel k non nul est élément de $T(\Omega)$ et en déduire que $T(\Omega) = \mathbb{N}^*$.
- ***c)*** Exprimer l'événement $[T = k]$ en fonction de certains événements $[X = i]$ puis montrer que T suit la même loi que Z.

3. On rappelle que la fonction `rd.random()` renvoie de façon uniforme un réel aléatoire élément de $[0,1[$.
Par ailleurs, la commande `x % 2` permet de tester si `x` est pair. Plus précisément :

- `x` est pair si et seulement si `x % 2` vaut 0,
- `x` est impair si et seulement si `x % 2` vaut 1.

Compléter le programme **Python** suivant pour que, d'une part, il simule les lancers d'une pièce donnant « pile » avec la probabilité p et calcule la valeur prise par la variable aléatoire X égale au rang du premier « pile » obtenu lors de ces lancers (X suit bien la loi géométrique de paramètre p) et pour que, d'autre part, il calcule et affiche la valeur prise par T, la variable aléatoire T ayant été définie dans la deuxième question.

```
p = float(input("Entrez la valeur de p :"))
x = 1
lancer = rd.random()
while lancer <= 1-p:
    x = _______
    lancer = rd.random()
if x % 2 == 0:
    ___________
else:
    _______________
print(t)
```

Exercice 4

Soit n un entier supérieur ou égal à 2.
On considère une urne $\mathcal{U}$ contenant n boules numérotées de 1 à n et indiscernables au toucher.
On effectue une suite de tirages d'une boule avec remise de la boule dans l'urne $\mathcal{U}$.

Partie I

Soit k un entier supérieur ou égal à 1. Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on note X_i la variable aléatoire égale au nombre d'obtentions de la boule numéro i au cours des k premiers tirages.

1. Soit $i \in [\![1, n]\!]$. Donner la loi de X_i. Rappeler l'espérance et la variance de X_i.

2. Les variables aléatoires $X_1, X_2, \dots, X_n$ sont-elles indépendantes ?

3. Écrire une fonction Python `simulX(n, k)` prenant en entrée un entier n supérieur ou égal à 2 (le nombre de boules dans l'urne) ainsi qu'un entier k supérieur ou égal à 1 (le nombre de tirages effectués), simulant l'expérience aléatoire lors des k premiers tirages et renvoyant un tableau `numpy` (ou une liste) contenant les réalisations des variables aléatoires $X_1, \dots, X_n$.

4. Soit $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$ tel que $i \neq j$.

a) Déterminer la loi de la variable $X_i + X_j$. Rappeler la variance de $X_i + X_j$.

b) En déduire la covariance du couple (X_i, X_j).

Pour tout entier k supérieur ou égal à 1, on note Z_k la variable aléatoire égale au nombre de numéros distincts obtenus au cours des k premiers tirages et on note $\mathbb{E}(Z_k)$ l'espérance de Z_k.

Partie II

5. Déterminer la loi de la variable Z_1 et la loi de la variable Z_2.
En déduire $\mathbb{E}(Z_1)$ et $\mathbb{E}(Z_2)$.

6. Soit k un entier supérieur ou égal à 1.

a) Déterminer $\mathbb{P}([Z_k = 1])$ et déterminer $\mathbb{P}([Z_k = k])$.

b) Montrer, pour tout $\ell \in [\![1, n]\!]$: $\mathbb{P}([Z_{k+1} = \ell]) = \dfrac{\ell}{n}\,\mathbb{P}([Z_k = \ell]) + \dfrac{n - \ell + 1}{n}\,\mathbb{P}([Z_k = \ell - 1])$.

c) En déduire : $\mathbb{E}(Z_{k+1}) = \dfrac{n-1}{n}\,\mathbb{E}(Z_k) + 1$.

7. ***a)*** Montrer que la suite $(v_k)_{k \geqslant 1}$ de terme général $v_k = \mathbb{E}(Z_k) - n$ est une suite géométrique.

b) En déduire, pour tout entier k supérieur ou égal à 1 : $\mathbb{E}(Z_k) = n\left(1 - \left(\dfrac{n-1}{n}\right)^k\right)$.

Partie III

On suppose maintenant que $n = 4$; ainsi l'urne $\mathcal{U}$ contient 4 boules numérotées de 1 à 4.
Soit k un entier supérieur ou égal à 4. On se propose de déterminer la loi de Z_k.

8. Rappeler la valeur de $\mathbb{P}([Z_k = 1])$. Déterminer $\mathbb{P}([Z_k \geqslant 5])$.

9. Montrer : $\mathbb{P}([Z_k = 2]) = 6\,\dfrac{2^k - 2}{4^k}$.

10. On note, pour tout i de $[\![1, 4]\!]$, A_i l'événement :
« la boule numéro i n'a pas été obtenue au cours des k premiers tirages ».

a) Montrer : $\mathbb{P}([Z_k \leqslant 3]) = 4\,\mathbb{P}(A_1) - 6\,\mathbb{P}(A_1 \cap A_2) + 4\,\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$.

b) Calculer $\mathbb{P}(A_1)$, $\mathbb{P}(A_1 \cap A_2)$ et $\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$.

c) En déduire : $\mathbb{P}([Z_k \leqslant 3])$, puis $\mathbb{P}([Z_k = 3])$ et $\mathbb{P}([Z_k = 4])$.