DS3 (vA) - Barème

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidat·es sont invité·es à ***encadrer*** *dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*
Aucun document n'est autorisé. ***L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique*** *est* ***interdite****. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*
Si au cours de l'épreuve, un candidat ou une candidate repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

On suppose, et c'est valable pour toute l'épreuve, que les librairies suivantes sont importées sous leurs alias habituels :

- `import numpy as np`
- `import numpy.random as rd`
- `import matplotlib.pyplot as plt`

Exercice 1 (Source : Arnaud Jobin)

Partie I

On note $E = \mathbb{R}_2[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 2. Soit f l'application définie sur E qui associe à tout polynôme $P \in E$, le polynôme $f(P)$ défini par :

$$\big(f(P)\big)(X) \;=\; (1 - X - X^2)\, P'(X) + \frac{1}{2}(-1 - X + 3\,X^2 + 2\,X^3)\, P''(X)$$

Dans la suite, on note $\mathscr{B} = (P_0, P_1, P_2)$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.

1. Montrer que f est un endomorphisme de E.

- **2 pt : f linéaire (1 pt pour citer la linéarité de la dérivation)**
- **2 pt : $f(\mathbb{R}_2[X]) \subset \mathbb{R}_2[X]$**

2. Déterminer la matrice A représentative de f dans la base canonique de E.

- **3 pts : (1 pt par colonne juste)** $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

3. Montrer : $f \circ f = 0_{\mathscr{L}(E)}$.

- **1 pt : $A^2 = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}$**
- **1 pt : $f \circ f = 0_{\mathscr{L}(E)}$ par isomorphisme de représentation matricielle**

4. Démontrer que f n'est pas bijectif.

- **1 pt : A non inversible car sa première colonne est nulle**

5. *a)* Déterminer des bases de $\text{Ker}(f)$ et $\text{Im}(f)$ ainsi que les dimensions de ces espaces vectoriels.

- **3 pts :**
  - × **1 pt : écriture système**
  - × **1 pt : résolution $a_1 = a_2$**
  - × **1 pt :** $\text{Ker}(f) = \text{Vect}\,(P_0, P_1 + P_2)$
- **2 pts :** $(P_0, P_1 + P_2)$ **base et** $\dim\big(\text{Ker}(f)\big) = 2$
  - × **caractère générateur**
  - × **caractère libre**
- **1 pt :** $\text{Im}(f) = \text{Vect}\,(f(P_0), f(P_1), f(P_2))$
- **1 pt :** $\text{Im}(f) = \text{Vect}\,(P_0 - P_1 - P_2)$
- **1 pt :** $(P_0 - P_1 - P_2)$ **base de** $\text{Im}(f)$ **et** $\dim\big(\text{Im}(f)\big) = 1$
  -1 pt si confusion $\mathbb{R}_2[X]$ / $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$

b) Démontrer que la famille $\mathcal{F} = \big(f(P_1), P_0\big)$ est une base de $\text{Ker}(f)$.

- **1 pt :** $\big(f(P_1), P_0\big) \in \big(\text{Ker}(f)\big)^2$
- **2 pts :** $\mathcal{F} = \big(f(P_1), P_0\big)$ **base de** $\text{Ker}(f)$
  - × **1 pt : caractère libre**
  - × **1 pt :** $\text{Card}(\mathcal{F}) = \dim\big(\text{Ker}(f)\big)$

6. ***a)*** Montrer que la famille $\mathcal{G} = \big(P_1, f(P_1), P_0\big)$ est une base de E.

- **2 pts :** $\mathcal{G}$ **libre**
- **1 pt :** $\text{Card}(\mathcal{G}) = \dim\big(\mathbb{R}_2[X]\big)$

b) Déterminer la matrice T représentative de f dans la base $\big(P_1, f(P_1), P_0\big)$.

- **3 pts : (1 pt par colonne juste)** $\text{Mat}_{(P_1, f(P_1), P_0)}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Partie II

On note désormais E un espace vectoriel **quelconque** de dimension 3.
On considère dans la suite f un endomorphisme de E différent de l'endomorphisme nul de E.

7. Montrer : $f \circ f = 0_{\mathscr{L}(E)} \ \Leftrightarrow\ \text{Im}(f) \subset \text{Ker}(f)$.

- **3 pts :**
  - × **1 pt : raisonnement par double implication bien écrit et au moins une implication réussie**
  - × **1 pt :** $(\Rightarrow)$
  - × **1 pt :** $(\Leftarrow)$

On suppose dans les questions ***8.*** et ***9.*** : $f \circ f = 0_{\mathscr{L}(E)}$.

8. ***a)*** Comparer les dimensions de $\text{Ker}(f)$ et $\text{Im}(f)$.

- **1 pt :** $\dim\big(\text{Im}(f)\big) \leqslant \dim\big(\text{Ker}(f)\big)$

b) Déterminer alors précisément les dimensions de ces deux espaces vectoriels.

- **1 pt : théorème du rang**
- **1 pt :** $\dim\big(\text{Im}(f)\big) \in \{0, 1\}$
- **1 pt : cas** $\dim\big(\text{Im}(f)\big) = 0$ **impossible**
- **1 pt :** $\dim\big(\text{Im}(f)\big) = 1$ **et** $\dim\big(\text{Ker}(f)\big) = 2$**.**

9. Soient $u \notin \text{Ker}(f)$ et $v \in \text{Ker}(f) \setminus \text{Im}(f)$.

a) Montrer que la famille $\mathcal{F} = (f(u), v)$ est une base de $\text{Ker}(f)$.

- **1 pt :** $\big(f(u), v\big) \in \big(\text{Ker}(f)\big)^2$
- **3 pts : caractère libre**
  - × **1 pt : écriture correcte de la définition de liberté**
  - × **1 pt : appliquer** f **de part et d'autre et en conclure** $\lambda_2 = 0$
  - × **1 pt :** $\lambda_1 = 0$
- **1 pt :** $\text{Card}(\mathcal{F}) = \dim\big(\text{Ker}(f)\big)$

b) Montrer que la famille $\mathcal{G} = (u, f(u), v)$ est une base de E.

- **3 pts : caractère libre**
  - × **1 pt : écriture correcte de la définition de liberté**
  - × **1 pt : appliquer** f **de part et d'autre et en conclure** $\lambda_3 = 0$
  - × **1 pt :** $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$
- **1 pt :** $\text{Card}(\mathcal{G}) = \dim\big(E\big)$

c) Déterminer la matrice T représentative de f dans la base $(u, f(u), v)$.

- **3 pts : (1 pt par colonne juste)** $\text{Mat}_{(u, f(u), v)}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Exercice 2 (ECRICOME 2007)

Soit a un réel strictement positif. On considère la fonction f_a définie pour tout réel t strictement positif par :

$$f_a(t) = \frac{1}{2}\left(t + \frac{a^2}{t}\right)$$

ainsi que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombre réels déterminée par son premier terme $u_0 > 0$ et par la relation dé récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f_a(u_n)$$

Partie 1 : Etude des variations de la fonction f_a.

1. Déterminer la limite de $f_a(t)$ lorsque t tend vers $+\infty$.

- **1 pt :** $\lim\limits_{t\to+\infty} f_a(t) = +\infty$

2. Déterminer la limite de $f_a(t)$ lorsque t tend vers 0 par valeurs positives. Interpréter graphiquement cette limite.

- **1 pt :** $\lim\limits_{t\to 0^+} f_a(t) = +\infty$
- **1 pt : cela veut dire que le graphe de f admet une asymptote verticale en 0**

3. Calculer, pour tout réel $t > 0$, $f_a'(t)$. Dresser le tableau de variations de f_a.

- **1 pt : la fonction f_a est dérivable sur $]0, +\infty[$ comme somme de deux fonctions dérivables sur $]0, +\infty[$**
- **1 pt :** $f_a'(t) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{a^2}{t^2}\right) = \frac{1}{2}\frac{t^2 - a^2}{t^2} = \frac{1}{2}\frac{(t-a)(t+a)}{t^2}$
- **1 pt :**

x	0		a		$+\infty$
Signe de $f'(t)$	‖	$-$	0	$+$	
Variations de f	‖ $+\infty$	$\searrow$	a	$\nearrow$	$+\infty$

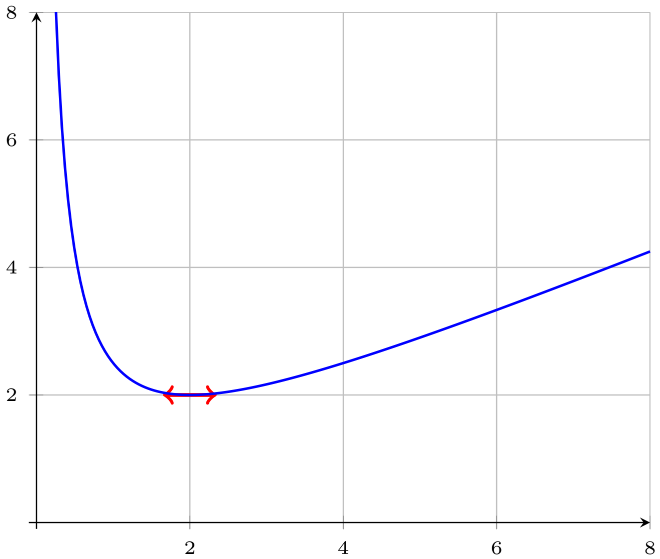
4. En déduire que :

$$\forall t > 0,\ f_a(t) \geqslant a$$

- **1 pt : f_a admet un minimum global atteint en a et $f(a) = a$**

5. Tracer la courbe représentative de f_a.

- **1 pt : asymptote verticale en 0**
- **1 pt : tangente horizontale en a**
- **1 pt : limites respectées**
- **1 pt : qualité globale du dessin**



6. Écrire une fonction **Python** `f(a, t)` qui prend en entrée deux réels a et t strictement positifs et qui renvoie le nombre $f_a(t)$.

- **2 pt : tout correct (seulement 1 pt si formule correcte mais problème de syntaxe)**

```
def f(a, t):
    return (t + a**2/t) / 2
```

Partie 2 : Etude de la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

7. Que dire de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans le cas particulier où $u_0 = a$?

- **1 pt : la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante égale à a**

8. Dans toute la suite, on revient au cas général $u_0 > 0$.
Démontrer que :

$$\forall t \geqslant a,\ 0 \leqslant f_a'(t) < \frac{1}{2}$$

- **1 pt : $f_a'(t) \geqslant 0$**
- **1 pt : $f_a'(t) < \frac{1}{2}$**

9. Montrer que, pour tout entier naturel non nul n :

$$u_n \geqslant a$$

- **1 pt : initialisation**
- **1 pt : hérédité**

aucun point si la récurrence est mal rédigée

10. Prouver alors que, pour tout entier naturel non nul n :

$$0 \leqslant u_{n+1} - a \leqslant \frac{1}{2}(u_n - a)$$

puis que :

$$|u_n - a| \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} |u_1 - a|$$

- **3 pt : IAF**
  - × **1 pt : IAF bien écrite et justifiée par les questions précédentes**
  - × **1 pt : choix de u_n et a justifié (ils sont dans le bon intervalle)**
  - × **1 pt : $u_n \geqslant a$ donc $|u_n - a| = u_n - a$ et $u_{n+1} \geqslant a$ donc $|u_{n+1} - a| = u_{n+1} - a$**
- **3 pt : récurrence**
  - × **1 pt : initialisation**
  - × **2 pt : hérédité**

11. En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et préciser sa limite.

- **1 pt : la suite $\left(\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est géométrique de raison $\dfrac{1}{2} \in]-1,1[$,**
  donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1} = 0$
- **1 pt : $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers a par thm d'encadrement**

12. En utilisant ce qui précède, écrire un programme **Python** permettant d'afficher les 100 premiers termes d'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de premier terme $u_0 = 1$ et convergeant vers $\sqrt{2}$.

- **1 pt : choix correct de `a`**
- **1 pt : taille correcte du tableau `U`**
- **1 pt : taille correcte de la boucle `for`**
- **1 pt :** `U[k+1] = f(a, U[k])`
- **1 pt :** `plt.plot(U, 'x')`

```
N = 100
a = np.sqrt(2)
U = np.ones(N)
for k in range(N-1):
    U[k+1] = f(a, U[k])
plt.plot(U, 'x')
```

Exercice 3 (EDHEC 2009)

Dans cet exercice, p désigne un réel de $]0,1[$ et on note $q = 1-p$.
On considère deux variables aléatoires X et Y définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, indépendantes et suivant toutes deux la même loi géométrique de paramètre p.

1. On pose $Z = \inf(X, Y)$ et on admet que Z est une variable aléatoire, elle aussi définie sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.
On rappelle que, pour tout entier naturel k, on a l'égalité : $[Z > k] = [X > k] \cap [Y > k]$.

a) Pour tout entier naturel k, calculer $\mathbb{P}([Z > k])$.

- **2 pts : $\mathbb{P}([Z > k]) = \big(1 - \mathbb{P}\big([X \leqslant k]\big)\big)^2$ (1 pt : indépendance, 1 pt : même loi)**
- **1 pt : décomposition $[X \leqslant k] = \bigcup\limits_{i=1}^{k} [X = i]$ car X à valeurs entières**
- **2 pts : calcul de $\mathbb{P}([X \leqslant k]) = 1-(1-p)^k$ (1 pt : incompatibilité, 1 pt : loi géométrique)**
- **1 pt : conclusion $\mathbb{P}([Z > k]) = q^{2k}$**

b) Établir que, pour tout entier naturel k supérieur ou égal à 1, on a :

$$\mathbb{P}([Z = k]) = \mathbb{P}([Z > k-1]) - \mathbb{P}([Z > k])$$

- **1 pt : égalité classique** $[Z \geqslant k] = [Z > k] \cup [Z = k]$
- **1 pt : lien avec** $[Z \geqslant k] = [Z > k-1]$ **car** Z **est à valeurs entières**
- **1 pt : incompatibilité de** $[Z > k]$ **et** $[Z = k]$

c) En déduire que Z suit la loi géométrique de paramètre $(1-q^2)$.

- **1 pt :** $Z(\Omega) \subset \mathbb{N}^*$
- **2 pts : calcul de** $\mathbb{P}([Z = k]) = \left(q^2\right)^{k-1}\,(1-q^2)$

2. On définit la variable aléatoire T de la façon suivante :
Pour tout ω de Ω tel que $X(\omega)$ est un entier naturel pair, on pose $T(\omega) = \dfrac{X(\omega)}{2}$,
et, pour tout ω de Ω tel que $X(\omega)$ est un entier naturel impair, on pose $T(\omega) = \dfrac{1 + X(\omega)}{2}$.
On admet que T est une variable aléatoire, elle aussi définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

a) Montrer que T prend des valeurs entières non nulles.

- **1 pt : cas** $X(\omega)$ **pair**
- **1 pt : cas** $X(\omega)$ **impair**
- **1 pt :** $0 \notin T(\Omega)$

b) Réciproquement, justifier que tout entier naturel k non nul est élément de $T(\Omega)$ et en déduire que $T(\Omega) = \mathbb{N}^*$.

- **2 pts**

c) Exprimer l'événement $[T = k]$ en fonction de certains événements $[X = i]$ puis montrer que T suit la même loi que Z.

- **1 pt : explications** $[T = k]$ **est réalisé ssi ...**
- **1 pt : conclusion** $[T = k] = [X = 2k] \cup [X = 2k-1]$
- **2 pts :** $\mathbb{P}([T = k]) = (q^2)^{k-1}\,(1-q^2) = \mathbb{P}([Z = k])$

3. On rappelle que la fonction `rd.random()` renvoie de façon uniforme un réel aléatoire élément de $[0, 1[$.
Par ailleurs, la commande `x % 2` permet de tester si `x` est pair. Plus précisément :

× `x` est pair si et seulement si `x % 2` vaut 0,

× `x` est impair si et seulement si `x % 2` vaut 1.

Compléter le programme **Python** suivant pour que, d'une part, il simule les lancers d'une pièce donnant « pile » avec la probabilité p et calcule la valeur prise par la variable aléatoire X égale au rang du premier « pile » obtenu lors de ces lancers (X suit bien la loi géométrique de paramètre p) et pour que, d'autre part, il calcule et affiche la valeur prise par T, la variable aléatoire T ayant été définie dans la deuxième question.

```
p = float(input("Entrez la valeur de p :"))
x = 1
lancer = rd.random()
while lancer <= 1-p:
    x = x+1
    lancer = rd.random()
if x % 2 == 0:
    t = x/2
else:
    t = (1+x)/2
print(t)
```

- **3 pts : 1 pt par ligne complétée**

Exercice 4 (EML 2013)

Soit n un entier supérieur ou égal à 2.
On considère une urne $\mathcal{U}$ contenant n boules numérotées de 1 à n et indiscernables au toucher.
On effectue une suite de tirages d'une boule avec remise de la boule dans l'urne $\mathcal{U}$.

Partie I / 12

Soit k un entier supérieur ou égal à 1. Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on note X_i la variable aléatoire égale au nombre d'obtentions de la boule numéro i au cours des k premiers tirages.

1. Soit $i \in [\![1, n]\!]$. Donner la loi de X_i. Rappeler l'espérance et la variance de X_i.

- **1 pt : description de l'expérience**
- **1 pt : description de la v.a.r. et loi binomiale reconnue**
- **1 pt : espérance**
- **1 pt : variance**

2. Les variables aléatoires $X_1, X_2, \dots, X_n$ sont-elles indépendantes ?

- **1 pt :** $[X_i = k] \cap [X_j = k] = \varnothing$
- **1 pt :** $\mathbb{P}([X_i = k])$
- **1 pt :** $\mathbb{P}([X_i = k] \cap [X_j = k]) = 0 \neq \mathbb{P}([X_i = k])\mathbb{P}([X_j = k])$

3. Écrire une fonction Python `simulX(n, k)` prenant en entrée un entier n supérieur ou égal à 2 (le nombre de boules dans l'urne) ainsi qu'un entier k supérieur ou égal à 1 (le nombre de tirages effectués), simulant l'expérience aléatoire lors des k premiers tirages et renvoyant un tableau `numpy` (ou une liste) contenant les réalisations des variables aléatoires $X_1, \dots, X_n$.

- **1 pt : taille correcte de la boucle `for`**
- **1 pt :** `boule = rd.randint(1,n+1)`
- **2 pt :** `T[boule-1] += 1` **(seulement 1 pt si décalage d'indice mal géré)**
- **1 pt : bonus si tout est correct**

```
def simulX(n, k):
    T = np.zeros(n) # Au départ, les boules ont été obtenues 0 fois
    for j in range(k): # On fait k tirages
        boule = rd.randint(1,n+1) # On tire au hasard une boule de l'urne
        T[boule-1] += 1 # On vient d'obtenir la boule numéro « boule »
    return T # T contient les nombres d'obtentions de chacune des boules
```

4. Soit $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$ tel que $i \neq j$.

a) Déterminer la loi de la variable $X_i + X_j$. Rappeler la variance de $X_i + X_j$.

- **1 pt : description de l'expérience**
- **1 pt : description de la v.a.r. et loi binomiale reconnue**
- **1 pt : variance**

b) En déduire la covariance du couple (X_i, X_j).

- **1 pt : variance d'une somme**
- **1 pt :** $\text{Cov}(X_i, X_j) = -\dfrac{k}{n^2}$

Pour tout entier k supérieur ou égal à 1, on note Z_k la variable aléatoire égale au nombre de numéros distincts obtenus au cours des k premiers tirages et on note $\mathbb{E}(Z_k)$ l'espérance de Z_k.

Partie II / 31

5. Déterminer la loi de la variable Z_1 et la loi de la variable Z_2.
En déduire $\mathbb{E}(Z_1)$ et $\mathbb{E}(Z_2)$.

- **1 pt :** $Z_1(\Omega) = \{1\}$
- **1 pt :** $\mathbb{E}(Z_1) = 1$
- **1 pt :** $Z_2(\Omega) = \{1, 2\}$
- **2 pts :** $\mathbb{P}([Z_2 = 1]) = \frac{1}{n}$ **(1 pt pour décomposer l'événement, 1 pt pour réunion incompatible)**
- **1 pt :** $\mathbb{P}([Z_2 = 2]) = 1 - \frac{1}{n}$
- **1 pt :** $\mathbb{E}(Z_2) = 2 - \frac{1}{n}$

6. Soit k un entier supérieur ou égal à 1.

a) Déterminer $\mathbb{P}([Z_k = 1])$ et déterminer $\mathbb{P}([Z_k = k])$.

- **1 pt :** $[Z_k = 1] = \bigcup\limits_{i=1}^{n} [X_i = k]$
- **1 pt : réunion incompatible**
- **1 pt :** $\mathbb{P}([Z_k = 1]) = \dfrac{1}{n^{k-1}}$
- **1 pt : cas** $k > n$
- **2 pts : cas** $k \leqslant n$ **(1 pt pour dénombrement de** $[Z_k = k]$ **et 1 pt pour** $\mathbb{P}([Z_k = k])$**).**

b) Montrer, pour tout $\ell \in [\![1, n]\!]$: $\mathbb{P}([Z_{k+1} = \ell]) = \dfrac{\ell}{n}\, \mathbb{P}([Z_k = \ell]) + \dfrac{n - \ell + 1}{n}\, \mathbb{P}([Z_k = \ell - 1])$.

- **1 pt :** $Z_k(\Omega) \subset [\![1, n]\!]$
- **1 pt :** $\Big([Z_k = i]\Big)_{i \in [\![1,n]\!]}$ **est un SCE**
- **1 pt : expression de la formule des probabilités totales**
- **1 pt :** $[Z_k = i] \cap [Z_{k+1} = \ell] = \varnothing$ **si** $i \neq \ell$ **et** $i \neq \ell - 1$
- **1 pt :** $\mathbb{P}_{[Z_k = \ell - 1]}([Z_{k+1} = \ell]) = \dfrac{n - \ell + 1}{n}$
- **1 pt :** $\mathbb{P}_{[Z_k = \ell]}([Z_{k+1} = \ell]) = \dfrac{\ell}{n}$
- **1 pt : cas** $\ell = 1$

c) En déduire : $\mathbb{E}(Z_{k+1}) = \dfrac{n-1}{n}\,\mathbb{E}(Z_k) + 1$.

- **1 pt : existence de $\mathbb{E}(Z_k)$ et $\mathbb{E}(Z_{k+1})$**
- **1 pt : expression correcte de l'espérance**
- **1 pt : changement d'indice**
- **1 pt : regrouper les deux sommes $\sum\limits_{\ell=1}^{n}$**
- **1 pt : reconnaître $\mathbb{E}(Z_k)$**
- **1 pt :** $\sum\limits_{\ell=1}^{n} \mathbb{P}([Z_k = \ell]) = 1$

7. a) Montrer que la suite $(v_k)_{k\geqslant 1}$ de terme général $v_k = \mathbb{E}(Z_k) - n$ est une suite géométrique.

- **2 pts**

b) En déduire, pour tout entier k supérieur ou égal à 1 : $\mathbb{E}(Z_k) = n\left(1 - \left(\dfrac{n-1}{n}\right)^k\right)$.

- **1 pt : formule** $v_k = \left(\dfrac{n-1}{n}\right)^{k-1} v_1$
- **1 pt :** $v_1 = -(n-1)$
- **1 pt :** $\mathbb{E}(Z_k)$

Partie III / 23

On suppose maintenant que $n = 4$; ainsi l'urne $\mathcal{U}$ contient 4 boules numérotées de 1 à 4.
Soit k un entier supérieur ou égal à 4. On se propose de déterminer la loi de Z_k.

8. Rappeler la valeur de $\mathbb{P}([Z_k = 1])$. Déterminer $\mathbb{P}([Z_k \geqslant 5])$.

- **1 pt :** $\mathbb{P}([Z_k = 1]) = \dfrac{1}{4^{k-1}}$
- **1 pt :** $\mathbb{P}([Z_k \geqslant 5]) = \mathbb{P}(\varnothing) = 0$

9. Montrer : $\mathbb{P}([Z_k = 2]) = 6\,\dfrac{2^k - 2}{4^k}$.

- **3 pts :** $\mathrm{Card}([Z_k = 2])$
- **1 pt :** $\mathbb{P}([Z_k = 2])$

10. On note, pour tout i de $[\![1, 4]\!]$, A_i l'événement :
« la boule numéro i n'a pas été obtenue au cours des k premiers tirages ».

a) Montrer : $\mathbb{P}([Z_k \leqslant 3]) = 4\,\mathbb{P}(A_1) - 6\,\mathbb{P}(A_1 \cap A_2) + 4\,\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$.

- **1 pt :** $[Z_k \leqslant 3] = A_1 \ \cup\ A_2 \ \cup\ A_3 \ \cup\ A_4$
- **2 pts : formule du crible au rang 4**
- **1 pt :** $\mathbb{P}(A_1) = \ldots = \mathbb{P}(A_4)$
- **1 pt :** $A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 = \varnothing$
- **1 pt : résultat**

b) Calculer $\mathbb{P}(A_1)$, $\mathbb{P}(A_1 \cap A_2)$ et $\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$.

- **1 pt :** $A_1 = [X_1 = 0]$

- **1 pt :** $\mathbb{P}(A_1) = \left(\frac{3}{4}\right)^k$
- **1 pt :** $A_1 \cap A_2 = [X_1 = 0] \cap [X_2 = 0] = [X_1 + X_2 = 0]$
- **1 pt :** $\mathbb{P}(A_1 \cap A_2) = \left(\frac{1}{2}\right)^k$
- **1 pt :** $A_1 \cap A_2 \cap A_3 = [X_4 = k]$
- **1 pt :** $\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \left(\frac{1}{4}\right)^k$

c) En déduire : $\mathbb{P}([Z_k \leqslant 3])$, puis $\mathbb{P}([Z_k = 3])$ et $\mathbb{P}([Z_k = 4])$.

- **1 pt :** $\mathbb{P}([Z_k \leqslant 3]) = \dfrac{4 \times 3^k - 6 \times 2^k + 4}{4^k}$
- **1 pt :** $[Z_k \leqslant 3] = [Z_k = 1] \cup [Z_k = 2] \cup [Z_k = 3]$
- **1 pt : réunion incompatible**
- **1 pt :** $\mathbb{P}([Z_k = 3]) = \dfrac{4 \times 3^k - 12 \times 2^k + 12}{4^k}$
- **1 pt :** $[Z_k = 4] = \overline{[Z_k \leqslant 3]}$