DS3 (vB)

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidat·es sont invité·es à ***encadrer*** *dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*
Aucun document n'est autorisé. ***L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique*** *est* ***interdite****. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*
Si au cours de l'épreuve, un candidat ou une candidate repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

On suppose, et c'est valable pour toute l'épreuve, que la librairie suivante est importée sous son alias habituel :

- `import numpy.random as rd`

Définitions et notations du problème.

- Dans tout le sujet on considère un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, toutes les variables aléatoires qui interviennent dans la suite sont définies sur cet espace.
- La lettre p désigne un réel fixé de $]0,1[$. On pose $q = 1-p$.
- Si A est un événement, on note $\mathbb{1}_A$ la variable aléatoire indicatrice de cet événement, définie par :

$$\forall \omega \in \Omega,\ \mathbb{1}_A(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } \omega \in A \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

  Exemple : on lance une infinité de fois un dé à 6 faces équilibré et on définit l'événement A : « le dé tombe sur 6 à chaque lancer ». Dans ce cas, la variable aléatoire $\mathbb{1}_A$ prend la valeur 1 si le dé tombe sur 6 à chaque lancer et la valeur 0 sinon.
- Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'événements et si $\omega \in \Omega$ est une issue, on rappelle que :

$$\omega \in \bigcap_{k=0}^{+\infty} A_k \iff \forall k \in \mathbb{N},\ \omega \in A_k \qquad \text{et} \qquad \omega \in \bigcup_{k=0}^{+\infty} A_k \iff \exists k \in \mathbb{N},\ \omega \in A_k$$

  Exemple : on lance une infinité de fois un dé à 6 faces équilibré et on définit les événements A_k : « le dé tombe sur 6 au k^{e} lancer » pour tout entier $k \geqslant 1$. Soit ω une issue. Alors :

$$\omega \in \bigcap_{k=1}^{+\infty} A_k \iff \text{le dé est tombé sur 6 à chaque lancer}$$
$$\omega \in \bigcup_{k=1}^{+\infty} A_k \iff \text{le dé est tombé au moins une fois sur 6}$$

- Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'événements, on pose :

$$\limsup_n A_n = \bigcap_{n=0}^{+\infty} \bigcup_{k=n}^{+\infty} A_k \qquad \text{et} \qquad \liminf_n A_n = \bigcup_{n=0}^{+\infty} \bigcap_{k=n}^{+\infty} A_k$$

- Si $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de variables aléatoires, on pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} X_k$.

  On appelle *série de terme général* X_n, et on note $\sum X_n$, la suite de variables aléatoires $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
  Il s'agit d'une *série de variables aléatoires*.
  On pose $A_{\text{cv}} = \{\omega \in \Omega \mid \sum X_n(\omega) \text{ converge}\}$ (on remarquera que $\sum X_n(\omega)$ est une série de nombres réels). On **admet** que A_{cv} est un événement, que l'on peut également écrire sous la forme :

$$A_{\text{cv}} : \text{« la série de variables aléatoires } \sum X_n \text{ converge »}$$

  De manière analogue, on pose $A_{\text{dv}} = \{\omega \in \Omega \mid \sum X_n(\omega) \text{ diverge}\}$ et on **admet** que A_{dv} est un événement, que l'on peut également écrire sous la forme :

$$A_{\text{dv}} : \text{« la série de variables aléatoires } \sum X_n \text{ diverge »}$$

  On dit que la série de variables aléatoires $\sum X_n$ *converge presque-sûrement* (resp. *diverge presque-sûrement*) si $\mathbb{P}(A_{\text{cv}}) = 1$ (resp. $\mathbb{P}(A_{\text{dv}}) = 1$).

Organisation du problème.

Dans le diagramme qui suit, une flèche pointant de i vers j indique que la partie j utilise des résultats de la partie i :

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r] \arrow[dr] & 3 \arrow[d] & 2 \arrow[l] \arrow[dl] \arrow[d] \\ & 4 & 5 \end{tikzcd}$$

Partie 1 : Limite supérieure et limite inférieure d'une suite d'événements

On fixe pour toute cette partie une suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'événements et $\omega \in \Omega$ une issue. On pose :

$$I(\omega) = \{k \in \mathbb{N} \mid \omega \in A_k\}$$

Ainsi, $I(\omega)$ est l'ensemble de tous les indices $k \in \mathbb{N}$ tels que A_k est réalisé pour l'issue ω.
Exemple : on lance une infinité de fois un dé à 6 faces équilibré et on définit les événements A_k : « le dé tombe sur 6 au k^{e} lancer » pour tout entier $k \geqslant 1$. Pour l'issue $\omega = (1, 6, 6, 3, 5, 6, 4, 6, \dots)$, on a $I(\omega) = \{2, 3, 6, 8, \dots\}$.

1. ***a)*** Traduire à l'aide de quantificateurs et de l'ensemble $I(\omega)$ les propositions « $\omega \in \limsup\limits_n A_n$ » et « $\omega \in \overline{\limsup\limits_n A_n}$ ».

b) Montrer que : si $\omega \in \overline{\limsup\limits_n A_n}$, alors $I(\omega)$ est fini.

c) Montrer que : si $I(\omega)$ est fini, alors $\omega \in \overline{\limsup\limits_n A_n}$.

Ce qui précède justifie les équivalences suivantes (que l'on ne demande pas de démontrer) :

$$\begin{aligned} \omega \in \limsup_n A_n &\iff I(\omega) \text{ est infini} \\ &\iff \text{il existe une infinité d'indices } k \in \mathbb{N} \text{ tels que } A_k \text{ est réalisé} \end{aligned}$$

2. Traduire à l'aide de quantificateurs et de l'ensemble $I(\omega)$ la proposition « $\omega \in \liminf\limits_n A_n$ ».

Cette traduction justifie les équivalences suivantes (que l'on ne demande pas de démontrer) :

$$\begin{aligned} \omega \in \liminf_n A_n &\iff I(\omega) \text{ contient tous les entiers naturels à partir d'un certain rang} \\ &\iff \text{tous les événements } A_k \text{ sont réalisés à partir d'un certain rang} \end{aligned}$$

3. ***a)*** Justifier : $\liminf\limits_n A_n \subset \limsup\limits_n A_n$.

b) Justifier : $\overline{\limsup\limits_n A_n} = \liminf\limits_n \overline{A_n}$.

4. *Une application.* On lance une infinité de fois un dé à 6 faces équilibré. On définit, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'événement A_n : « le dé tombe sur 6 au n^{e} lancer ».

a) Exprimer à l'aide d'une phrase l'événement $\limsup\limits_n A_n$.

b) Exprimer à l'aide d'une phrase l'événement $\liminf\limits_n A_n$.

Partie 2 : Théorème de la limite monotone

L'objet de cette partie est de démontrer le théorème de la limite monotone, qui se décline en deux énoncés, puis d'en donner une première application concrète. Dans les parties suivantes, à chaque utilisation de ce théorème, les candidat·es sont invité·es à préciser si ils/elles utilisent le Théorème 1 ou le Théorème 2.

Théorème 1 (Théorème de la limite monotone)**.** *Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'événements.*

- *Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante (i.e. si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A_n \subset A_{n+1}$), alors :*

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=0}^{+\infty} A_k\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(A_n)$$

- *Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante (i.e. si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A_{n+1} \subset A_n$), alors :*

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=0}^{+\infty} A_k\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(A_n)$$

Théorème 2 (Théorème de la limite monotone)**.** *Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'événements. Alors :*

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=0}^{+\infty} A_k\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=0}^{n} A_k\right) \qquad \text{et} \qquad \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=0}^{+\infty} A_k\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=0}^{n} A_k\right)$$

5. Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante d'événements.

a) Démontrer que la suite $(\mathbb{P}(A_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente. On pose $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}(A_n)$.

b) On pose $A_{-1} = \varnothing$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $B_n = A_n \setminus A_{n-1}$. Démontrer que : $\bigcup\limits_{k=0}^{+\infty} A_k = \bigcup\limits_{k=0}^{+\infty} B_k$.

c) Démontrer que les événements B_k sont deux à deux incompatibles.

d) Conclure que : $\mathbb{P}\left(\bigcup\limits_{k=0}^{+\infty} A_k\right) = \ell$.

6. Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante d'événements.

a) Démontrer que la suite $(\mathbb{P}(A_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente. On pose $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}(A_n)$.

b) On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $C_n = \overline{A_n}$. Démontrer que la suite d'événements (C_n) est croissante.

c) En déduire que : $\mathbb{P}\left(\bigcup\limits_{k=0}^{+\infty} C_k\right) = 1 - \ell$.

d) Vérifier que : $\overline{\bigcup\limits_{k=0}^{+\infty} C_k} = \bigcap\limits_{k=0}^{+\infty} A_k$.

e) Conclure que : $\mathbb{P}\left(\bigcap\limits_{k=0}^{+\infty} A_k\right) = \ell$.

7. Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'événements. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n = \bigcup\limits_{k=0}^{n} A_k$.

a) Démontrer que la suite d'événements (U_n) est croissante.

b) Démontrer que : $\bigcup\limits_{k=0}^{+\infty} U_k = \bigcup\limits_{k=0}^{+\infty} A_k$.

c) Conclure que : $\mathbb{P}\left(\bigcup\limits_{k=0}^{+\infty} A_k\right) = \lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\bigcup\limits_{k=0}^{n} A_k\right)$.

On **admet** qu'on obtient ensuite $\mathbb{P}\left(\bigcap\limits_{k=0}^{+\infty} A_k\right) = \lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\bigcap\limits_{k=0}^{n} A_k\right)$ en utilisant un passage au complémentaire. On ne demande pas de le faire.

8. *Une application.* On lance une infinité de fois un dé à 6 faces équilibré. On définit, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, l'événement D_k : « le dé tombe sur 6 au k^{e} lancer ». On note A l'événement « le dé ne tombe jamais sur 6 ».

a) Exprimer l'événement A à l'aide des événements D_k.

b) Calculer $\mathbb{P}(A)$ à l'aide du théorème de la limite monotone.

Partie 3 : Lemme de Borel-Cantelli

L'objet de cette partie est de démontrer le lemme de Borel-Cantelli, puis d'en donner deux applications concrètes. Ce lemme sera ensuite utilisé pour étudier certaines séries de variables aléatoires dans la partie 4.

Théorème 3 (Lemme de Borel-Cantelli)**.** *Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'événements. On pose $A = \limsup_n A_n$.*

- *Si la série $\sum \mathbb{P}(A_n)$ converge, alors $\mathbb{P}(A) = 0$ (autrement dit, $\mathbb{P}(\overline{A}) = 1$ et donc il est presque certain que tous les événements $\overline{A_k}$ sont réalisés à partir d'un certain rang).*
- *Si les événements de la suite (A_n) sont indépendants et si la série $\sum \mathbb{P}(A_n)$ diverge, alors $\mathbb{P}(A) = 1$ (autrement dit, il est presque certain qu'il existe une infinité d'indices $k \in \mathbb{N}$ tels que l'événement A_k est réalisé).*

On fixe $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'événements. On pose $A = \limsup_n A_n$.

9. On suppose, **dans cette question uniquement**, que la série $\sum \mathbb{P}(A_n)$ converge.

a) Montrer que : $\mathbb{P}(A) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=n}^{+\infty} A_i\right)$. *Indication : étudier la monotonie de la suite* $\left(\bigcup_{i=n}^{+\infty} A_i\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

b) *Inégalité de Boole.* Montrer par récurrence sur $k \geqslant 2$ que si $B_1, \ldots, B_k$ sont des événements, alors on a :

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{k} B_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{k} \mathbb{P}(B_i)$$

c) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=n}^{+\infty} A_i\right) \leqslant \sum_{i=n}^{+\infty} \mathbb{P}(A_i)$.

d) Justifier que : $\lim_{n\to+\infty} \sum_{i=n}^{+\infty} \mathbb{P}(A_i) = 0$.

e) En déduire que : $\mathbb{P}(A) = 0$.

10. On suppose, **dans cette question uniquement**, que les événements de la suite (A_n) sont indépendants et que la série $\sum \mathbb{P}(A_n)$ diverge.

a) Montrer que : $\mathbb{P}(\overline{A}) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\bigcap_{j=n}^{+\infty} \overline{A_j}\right)$.

b) Justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\mathbb{P}\left(\bigcap_{j=n}^{+\infty} \overline{A_j}\right) = \lim_{N\to+\infty} \mathbb{P}\left(\bigcap_{j=n}^{N} \overline{A_j}\right)$.

c) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\mathrm{e}^{-x} \geqslant 1 - x$. En déduire que, pour tout entiers naturels $n \leqslant N$:

$$0 \leqslant \mathbb{P}\left(\bigcap_{j=n}^{N} \overline{A_j}\right) \leqslant \exp\left(-\sum_{j=n}^{N} \mathbb{P}(A_j)\right)$$

d) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\lim_{N\to+\infty} \mathbb{P}\left(\bigcap_{j=n}^{N} \overline{A_j}\right) = 0$. Conclure.

11. *Une première application.* On lance une infinité de fois un dé à 6 faces équilibré. On définit, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, l'événement D_k : « le dé tombe sur 6 au k^{e} lancer ». On définit également, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'événement A_n : « le dé tombe sur 6 à chacun des lancers numéros $n, n+1, \ldots, 2n-1$ ». On pose $A = \limsup\limits_{n} A_n$.

a) Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(A_n)$.

b) Calculer $\mathbb{P}(A)$ à l'aide du lemme de Borel-Cantelli.

12. *Une deuxième application.* On lance une infinité de fois un dé à 6 faces équilibré. On dit que le motif `double 6` apparaît au rang $n \in \mathbb{N}^*$ si le dé tombe sur 6 aux lancers numéros n et $n+1$. On définit, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'événement A_n : « le motif `double 6` apparaît au rang $2n$ ». On pose $A = \limsup\limits_{n} A_n$. On définit l'événement B : « le motif `double 6` apparaît une infinité de fois ».

a) Calculer $\mathbb{P}(A)$.

b) Comparer les événements A et B. En déduire $\mathbb{P}(B)$.

Partie 4 : Étude de quelques séries de variables aléatoires

13. On considère dans cette question une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de variables aléatoires suivant toutes la même loi (appelée *loi de Rademacher*) définie ci-dessous :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \mathbb{P}([X_n = 1]) = \frac{1}{2} \qquad \text{et} \qquad \mathbb{P}([X_n = -1]) = \frac{1}{2}.$$

a) Écrire une fonction **Python** `rademacher()` qui simule une variable aléatoire suivant la loi de Rademacher.

b) Soit $\omega \in \Omega$. Expliquer pourquoi la série $\sum X_n(\omega)$ diverge.

c) En déduire que la série de variables aléatoires $\sum X_n$ diverge presque-sûrement.

14. Soit (X_n) une suite de variables aléatoires. On pose $A_0 = \liminf\limits_{n} [X_n = 0]$.

a) Exprimer à l'aide d'une phrase l'événement A_0.

b) Démontrer : $A_0 \subset A_{\text{cv}}$.

c) Conclure que : si $\mathbb{P}(A_0) = 1$, alors la série de variables aléatoires $\sum X_n$ converge presque-sûrement.

15. On considère dans cette question une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de variables aléatoires définie par récurrence : $X_0 \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

- la loi conditionnelle de X_{n+1} sachant $[X_n = 1]$ est la loi de Bernoulli de paramètre p ;
- la loi conditionnelle de X_{n+1} sachant $[X_n = 0]$ est la loi certaine égale à 0.

On **admet** que cette suite de variables aléatoires est bien définie et en particulier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}([X_n = 0]) \neq 0$ et $\mathbb{P}([X_n = 1]) \neq 0$.

a) Recopier et compléter la fonction **Python** `markovBernoulli(n, p)` écrite ci-dessous. Cette fonction prend en paramètres d'entrée un entier naturel n et un réel $p \in \,]0,1[$, simule les variables aléatoires $X_0, \ldots, X_n$ et renvoie la liste $[X_0, \ldots, X_n]$. On rappelle que la commande `rd.binomial(1,p)` simule une variable aléatoire qui suit la loi de Bernoulli de paramètre p.

```python
def markovBernoulli(n, p):
    L = []
    X = ...
    L.append(X)
    for k in ...:
        if ...:
            X = ...
        else:
            X = ...
        L.append(X)
    return L
```

b) On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \mathbb{P}([X_n = 1])$. Déterminer une relation de récurrence liant u_{n+1} et u_n puis en déduire une expression simple de u_n valable pour tout entier naturel n.

c) ***(i)*** Justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $[X_n = 1] = \bigcap\limits_{k=0}^{n} [X_k = 1]$.

(ii) Retrouver l'expression de u_n à l'aide de cette formule.

(iii) Soit $(n, m) \in \mathbb{N}^2$ tel que $n < m$. Les variables aléatoires X_n et X_m sont-elles indépendantes ?

d) ***(i)*** Quelle est la monotonie de la suite d'événements $([X_n = 0])_{n\in\mathbb{N}}$?

(ii) En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, une simplification de $\bigcap\limits_{k=n}^{+\infty} [X_k = 0]$.

(iii) On pose $A_0 = \liminf\limits_{n} [X_n = 0]$. Calculer $\mathbb{P}(A_0)$.

(iv) Que peut-on conclure sur la série de variables aléatoires $\sum X_n$?

16. On considère dans cette question une suite $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires indépendantes suivant toutes la loi géométrique de paramètre p. Soit α un réel fixé. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $X_n = \dfrac{Y_n}{n^\alpha}$. On étudie la convergence de la série de variables aléatoires $\sum X_n$ suivant la valeur de α.

a) On suppose, **dans cette question uniquement**, que $\alpha \leqslant 1$.
Montrer que la série de variables aléatoires $\sum X_n$ diverge presque-sûrement.

b) On suppose, **dans cette question uniquement**, que $\alpha > 2$.

(i) Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$: $\mathbb{P}([Y_k > k]) = q^k$. *(On rappelle que $q = 1 - p$)*

(ii) On pose $A = \limsup\limits_{k} [Y_k > k]$. Montrer que, pour tout $\omega \in \overline{A}$, la série $\sum X_n(\omega)$ est convergente.

(iii) En déduire que la série de variables aléatoires $\sum X_n$ converge presque-sûrement.

c) Écrire une fonction **Python** `sommePartielle(n, p, alpha)` qui prend en entrée un entier naturel `n` non nul, un réel $p \in]0, 1[$ et un réel `alpha` et qui renvoie une simulation de la variable aléatoire $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} X_k$.

17. On considère dans cette question une suite d'urnes $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'urne U_n contient $2n$ boules numérotées de 1 à $2n$. L'expérience aléatoire consiste à faire deux tirages successifs et **sans** remise dans chacune de ces urnes. On note, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $T_{n,1}$ (resp. $T_{n,2}$) la variable aléatoire égale au numéro de la boule obtenue au premier (resp. second) tirage effectué dans l'urne U_n. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $X_n = |T_{n,1} - T_{n,2}|$.

a) Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $T_{n,1}(\Omega)$, $T_{n,2}(\Omega)$ et $X_n(\Omega)$.

b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $(i,j) \in T_{n,1}(\Omega) \times T_{n,2}(\Omega)$. Calculer $\mathbb{P}([T_{n,1} = i] \cap [T_{n,2} = j])$.

c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $k \in X_n(\Omega)$. Démontrer que :

$$\mathbb{P}([X_n = k]) = \frac{2n-k}{n(2n-1)}$$

d) ***(i)*** Soit $k \in \mathbb{N}^*$ fixé. Déterminer la nature de la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \mathbb{P}([X_n = k])$.

(ii) On pose $A = \limsup\limits_{n} [X_n = 1]$. Calculer $\mathbb{P}(A)$ puis en déduire que, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, la série de variables aléatoires $\sum \dfrac{1}{X_n^\alpha}$ diverge presque-sûrement.

Partie 5 : Théorème de Kolmogorov

L'objet de cette partie est de démontrer le théorème de Kolmogorov, puis d'en donner une application.

Théorème 4 (Théorème de Kolmogorov)**.** *Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires discrètes indépendantes admettant chacune un moment d'ordre 2. On suppose que toutes les variables aléatoires X_n sont d'espérance nulle et que la série $\sum \mathbb{V}(X_n)$ converge. Alors la série de variables aléatoires $\sum X_n$ converge presque-sûrement.*

On fixe une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant les hypothèses du théorème de Kolmogorov.
On rappelle que $A_{\text{cv}} = \{\omega \in \Omega \mid \sum X_n(\omega) \text{ converge}\}$ et que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} X_k$.
On définit, pour tout $(n,N) \in \mathbb{N}^2$, l'événement :

$$C(N,n) = \bigcap_{i=n}^{+\infty} \bigcap_{j=n}^{+\infty} \left[\, |S_i - S_j| \leqslant 2^{-N} \,\right]$$

On **admet** que l'on peut réécrire l'événement A_{cv} de la manière suivante :

$$\begin{aligned} A_{\text{cv}} &= \{\omega \in \Omega \mid \forall N \in \mathbb{N}, \exists n \in \mathbb{N}, \forall i \geqslant n, \forall j \geqslant n, |S_i(\omega) - S_j(\omega)| \leqslant 2^{-N}\} \\ &= \bigcap_{N=0}^{+\infty} \bigcup_{n=0}^{+\infty} C(N,n) \end{aligned}$$

18. *(Résultats préliminaires sur les variables aléatoires indicatrices)*

a) Soit B un événement. Déterminer la loi de $\mathbb{1}_B$ puis en déduire que : $\mathbb{E}(\mathbb{1}_B) = \mathbb{P}(B)$.

b) Soient B_1 et B_2 deux événements incompatibles. Montrer que : $\mathbb{1}_{B_1} + \mathbb{1}_{B_2} = \mathbb{1}_{B_1 \cup B_2}$.

c) Soit B un événement et soit Z une variable aléatoire discrète admettant une espérance.
Démontrer que la variable aléatoire $Z\,\mathbb{1}_B$ admet également une espérance.
(Indication : on notera pour cette preuve $Z(\Omega) \subset \{x_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ où $x_0 = 0$ et $x_i \neq 0$ pour $i \geqslant 1$. On comparera $\mathbb{P}([Z\,\mathbb{1}_B = x_i])$ avec $\mathbb{P}([Z = x_i])$ pour $i \geqslant 1$.)

19. Soit $n \in \mathbb{N}$ et soit $\alpha > 0$. On pose :

$$A = [\max(|S_0|, |S_1|, \dots, |S_n|) \geqslant \alpha]$$

et, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$:

$$A_k = [\,|S_k| \geqslant \alpha\,] \cap \left(\bigcap_{i=0}^{k-1} [\,|S_i| < \alpha\,] \right)$$

a) Montrer que les événements A_k sont deux à deux incompatibles puis que $A = \bigcup\limits_{k=0}^{n} A_k$.

b) Recopier et compléter la fonction **Python** `indicA(n, alpha)` qui prend en paramètres d'entrée un entier naturel n et un réel $\alpha > 0$ et qui simule la variable aléatoire $\mathbb{1}_A$. On supposera que l'on dispose d'une fonction **Python** `simulX()` qui simule la variable aléatoire X_0. On rappelle que la fonction **Python** `abs` renvoie la valeur absolue du nombre donné en argument.

```
def indicA(n, alpha):
    S = 0
    for k in ______________:
        S = ________________
        if ___________________:
            return _____
    return _____
```

c) Démontrer par récurrence que, pour tout $i \in [\![0, n]\!]$:

$$\sum_{k=0}^{i} \mathbb{1}_{A_k} = \mathbb{1}_{A_0 \cup \cdots \cup A_i}$$

d) Montrer que :

$$\mathbb{E}\left(\sum_{k=0}^{n} S_n^2 \, \mathbb{1}_{A_k}\right) \leqslant \mathbb{E}\left(S_n^2\right)$$

e) En déduire que :

$$\sum_{k=0}^{n} \mathbb{E}\big(\left(S_k^2 + 2S_k(S_n - S_k)\right) \mathbb{1}_{A_k}\big) \leqslant \mathbb{E}\left(S_n^2\right)$$

(Indication : commencer par justifier que, pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $a^2 \geqslant b^2 + 2b(a - b)$)

f) Montrer que, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$: $\mathbb{E}\left(S_k(S_n - S_k)\mathbb{1}_{A_k}\right) = 0$.

g) Montrer que : $\sum\limits_{k=0}^{n} \mathbb{E}\big(S_k^2 \, \mathbb{1}_{A_k}\big) \geqslant \alpha^2 \sum\limits_{k=0}^{n} \mathbb{E}\big(\mathbb{1}_{A_k}\big)$.

h) Conclure que :

$$\mathbb{P}(A) \leqslant \frac{\mathbb{V}(S_n)}{\alpha^2} \qquad \textit{(Inégalité de Kolmogorov)}$$

20. On fixe dans cette question un réel $\varepsilon > 0$.

a) Justifier, à l'aide de l'inégalité de Kolmogorov, que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $j \in \mathbb{N}^*$:

$$\mathbb{P}\left(\left[\max_{1 \leqslant k \leqslant j} |S_{n+k} - S_n| \geqslant \varepsilon\right]\right) \leqslant \frac{\mathbb{V}(S_{n+j} - S_n)}{\varepsilon^2}$$

b) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $j \in \mathbb{N}^*$:

$$\mathbb{P}\left(\left[\max_{1 \leqslant k \leqslant j} |S_{n+k} - S_n| \geqslant \varepsilon\right]\right) \leqslant \frac{R_n}{\varepsilon^2}$$

où $R_n = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} \mathbb{V}(X_k)$.

c) On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $B_n(\varepsilon) = \left[\max\limits_{k \geqslant 1} |S_{n+k} - S_n| \geqslant \varepsilon\right]$. Conclure que :

$$\lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}(B_n(\varepsilon)) = 0$$

21. On fixe dans cette question un entier naturel N.

a) Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\overline{B_n\left(2^{-(N+1)}\right)} \subset C(N,n)$$

b) En déduire que :

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} C(N,n)\right) = 1$$

22. Conclure que : $\mathbb{P}(A_{\mathrm{cv}}) = 1$.

23. *Une application.* On considère dans cette question une suite $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires indépendantes suivant toutes la loi de Rademacher (voir question ***13*** pour la définition).

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $X_n = \dfrac{Y_n}{n}$.

Démontrer que la série de variables aléatoires $\sum X_n$ converge presque-sûrement.