DS3 (vB) - Barème

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidat·es sont invité·es à ***encadrer*** *dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*
Aucun document n'est autorisé. ***L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique*** *est* ***interdite****. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*
Si au cours de l'épreuve, un candidat ou une candidate repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

On suppose, et c'est valable pour toute l'épreuve, que la librairie suivante est importée sous son alias habituel :

- `import numpy.random as rd`

Définitions et notations du problème.

- Dans tout le sujet on considère un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, toutes les variables aléatoires qui interviennent dans la suite sont définies sur cet espace.
- La lettre p désigne un réel fixé de $]0,1[$. On pose $q = 1 - p$.
- Si A est un événement, on note $\mathbb{1}_A$ la variable aléatoire indicatrice de cet événement, définie par :

$$\forall \omega \in \Omega,\ \mathbb{1}_A(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } \omega \in A \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

  Exemple : on lance une infinité de fois un dé à 6 faces équilibré et on définit l'événement A : « le dé tombe sur 6 à chaque lancer ». Dans ce cas, la variable aléatoire $\mathbb{1}_A$ prend la valeur 1 si le dé tombe sur 6 à chaque lancer et la valeur 0 sinon.
- Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'événements et si $\omega \in \Omega$ est une issue, on rappelle que :

$$\omega \in \bigcap_{k=0}^{+\infty} A_k \iff \forall k \in \mathbb{N},\ \omega \in A_k \qquad \text{et} \qquad \omega \in \bigcup_{k=0}^{+\infty} A_k \iff \exists k \in \mathbb{N},\ \omega \in A_k$$

  Exemple : on lance une infinité de fois un dé à 6 faces équilibré et on définit les événements A_k : « le dé tombe sur 6 au k^{e} lancer » pour tout entier $k \geqslant 1$. Soit ω une issue. Alors :

$$\omega \in \bigcap_{k=1}^{+\infty} A_k \iff \text{le dé est tombé sur 6 à chaque lancer}$$
$$\omega \in \bigcup_{k=1}^{+\infty} A_k \iff \text{le dé est tombé au moins une fois sur 6}$$

- Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'événements, on pose :

$$\limsup_n A_n = \bigcap_{n=0}^{+\infty} \bigcup_{k=n}^{+\infty} A_k \qquad \text{et} \qquad \liminf_n A_n = \bigcup_{n=0}^{+\infty} \bigcap_{k=n}^{+\infty} A_k$$

- Si $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de variables aléatoires, on pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} X_k$.

  On appelle *série de terme général* X_n, et on note $\sum X_n$, la suite de variables aléatoires $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Il s'agit d'une *série de variables aléatoires.*

  On pose $A_{\text{cv}} = \{\omega \in \Omega \mid \sum X_n(\omega) \text{ converge}\}$ (on remarquera que $\sum X_n(\omega)$ est une série de nombres réels). On **admet** que A_{cv} est un événement, que l'on peut également écrire sous la forme :

$$A_{\text{cv}} : \text{« la série de variables aléatoires } \textstyle\sum X_n \text{ converge »}$$

  De manière analogue, on pose $A_{\text{dv}} = \{\omega \in \Omega \mid \sum X_n(\omega) \text{ diverge}\}$ et on **admet** que A_{dv} est un événement, que l'on peut également écrire sous la forme :

$$A_{\text{dv}} : \text{« la série de variables aléatoires } \textstyle\sum X_n \text{ diverge »}$$

  On dit que la série de variables aléatoires $\sum X_n$ *converge presque-sûrement* (resp. *diverge presque-sûrement*) si $\mathbb{P}(A_{\text{cv}}) = 1$ (resp. $\mathbb{P}(A_{\text{dv}}) = 1$).

Organisation du problème.

Dans le diagramme qui suit, une flèche pointant de i vers j indique que la partie j utilise des résultats de la partie i :

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r] \arrow[dr] & 3 \arrow[d] & 2 \arrow[l] \arrow[dl] \arrow[d] \\ & 4 & 5 \end{tikzcd}$$

Partie 1 : Limite supérieure et limite inférieure d'une suite d'événements

On fixe pour toute cette partie une suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'événements et $\omega \in \Omega$ une issue. On pose :

$$I(\omega) = \{k \in \mathbb{N} \mid \omega \in A_k\}$$

Ainsi, $I(\omega)$ est l'ensemble de tous les indices $k \in \mathbb{N}$ tels que A_k est réalisé pour l'issue ω.
Exemple : on lance une infinité de fois un dé à 6 faces équilibré et on définit les événements A_k : « le dé tombe sur 6 au k^{e} lancer » pour tout entier $k \geqslant 1$. Pour l'issue $\omega = (1, 6, 6, 3, 5, 6, 4, 6, \dots)$, on a $I(\omega) = \{2, 3, 6, 8, \dots\}$.

1. ***a)*** Traduire à l'aide de quantificateurs et de l'ensemble $I(\omega)$ les propositions « $\omega \in \limsup\limits_n A_n$ » et « $\omega \in \overline{\limsup\limits_n A_n}$ ».

- **1 pt :** $\omega \in \limsup\limits_n A_n \iff \forall n \in \mathbb{N},\ \exists k \geqslant n,\ k \in I(\omega)$
- **1 pt :** $\omega \in \overline{\limsup\limits_n A_n} \iff \exists n \in \mathbb{N},\ \forall k \geqslant n,\ k \notin I(\omega)$

b) Montrer que : si $\omega \in \overline{\limsup\limits_n A_n}$, alors $I(\omega)$ est fini.

- **1 pt : traductions bien faites**

c) Montrer que : si $I(\omega)$ est fini, alors $\omega \in \overline{\limsup\limits_n A_n}$.

- **1 pt : traductions bien faites**

Ce qui précède justifie les équivalences suivantes (que l'on ne demande pas de démontrer) :

$$\begin{aligned}\omega \in \limsup_n A_n &\iff I(\omega) \text{ est infini}\\ &\iff \text{il existe une infinité d'indices } k \in \mathbb{N} \text{ tels que } A_k \text{ est réalisé}\end{aligned}$$

2. Traduire à l'aide de quantificateurs et de l'ensemble $I(\omega)$ la proposition « $\omega \in \liminf\limits_n A_n$ ».

- **1 pt :** $\omega \in \liminf\limits_n A_n \iff \exists n \in \mathbb{N},\ \forall k \geqslant n,\ k \in I(\omega)$

Cette traduction justifie les équivalences suivantes (que l'on ne demande pas de démontrer) :

$$\begin{aligned}\omega \in \liminf_n A_n &\iff I(\omega) \text{ contient tous les entiers naturels à partir d'un certain rang}\\ &\iff \text{tous les événements } A_k \text{ sont réalisés à partir d'un certain rang}\end{aligned}$$

3. ***a)*** Justifier : $\liminf\limits_n A_n \subset \limsup\limits_n A_n$.

- **1 pt : $I(\omega)$ contient tous les entiers naturels à partir d'un certain rang donc $I(\omega)$ est infini**

b) Justifier : $\overline{\limsup\limits_n A_n} = \liminf\limits_n \overline{A_n}$.

- **1 pt : lois de Morgan bien appliquées**

4. *Une application.* On lance une infinité de fois un dé à 6 faces équilibré. On définit, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'événement A_n : « le dé tombe sur 6 au n^{e} lancer ».

a) Exprimer à l'aide d'une phrase l'événement $\limsup\limits_n A_n$.

- **1 pt :** $\limsup\limits_n A_n$ **: « le dé est tombé une infinité de fois sur** 6 **»**

b) Exprimer à l'aide d'une phrase l'événement $\liminf\limits_n A_n$.

- **1 pt :** $\liminf\limits_n A_n$ **: « le dé est toujours tombé sur** 6 **à partir d'un certain rang »**

Partie 2 : Théorème de la limite monotone

L'objet de cette partie est de démontrer le théorème de la limite monotone, qui se décline en deux énoncés, puis d'en donner une première application concrète. Dans les parties suivantes, à chaque utilisation de ce théorème, les candidat·es sont invité·es à préciser si ils/elles utilisent le Théorème 1 ou le Théorème 2.

Théorème 1 (Théorème de la limite monotone)**.** *Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'événements.*

- *Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante (i.e. si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A_n \subset A_{n+1}$), alors :*

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=0}^{+\infty} A_k\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(A_n)$$

- *Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante (i.e. si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A_{n+1} \subset A_n$), alors :*

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=0}^{+\infty} A_k\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(A_n)$$

Théorème 2 (Théorème de la limite monotone)**.** *Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'événements. Alors :*

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=0}^{+\infty} A_k\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=0}^{n} A_k\right) \qquad \textit{et} \qquad \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=0}^{+\infty} A_k\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=0}^{n} A_k\right)$$

5. Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante d'événements.

a) Démontrer que la suite $(\mathbb{P}(A_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente. On pose $\ell = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(A_n)$.

- **1 pt : la suite $(\mathbb{P}(A_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante**
- **1 pt : la suite $(\mathbb{P}(A_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée par 1**
- **1 pt : thm de convergence monotone cité**

b) On pose $A_{-1} = \varnothing$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $B_n = A_n \setminus A_{n-1}$. Démontrer que : $\bigcup_{k=0}^{+\infty} A_k = \bigcup_{k=0}^{+\infty} B_k$.

- **1 pt :** $\bigcup_{k=0}^{+\infty} B_k \subset \bigcup_{k=0}^{+\infty} A_k$
- **2 pt :** $\bigcup_{k=0}^{+\infty} A_k \subset \bigcup_{k=0}^{+\infty} B_k$

c) Démontrer que les événements B_k sont deux à deux incompatibles.

- **1 pt**

d) Conclure que : $\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=0}^{+\infty} A_k\right) = \ell$.

- **1 pt :** $\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=0}^{+\infty} A_k\right) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(B_k)$ **par incompatibilité**
- **1 pt :** $\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(B_k) = \mathbb{P}(A_k) - \mathbb{P}(A_{k-1})$
- **1 pt : télescopage**

6. Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante d'événements.

a) Démontrer que la suite $(\mathbb{P}(A_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente. On pose $\ell = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(A_n)$.

- **1 pt : la suite $(\mathbb{P}(A_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante**

- **1 pt : la suite** $(\mathbb{P}(A_n))_{n\in\mathbb{N}}$ **est minorée par** 0

b) On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $C_n = \overline{A_n}$. Démontrer que la suite d'événements (C_n) est croissante.

- **2 pt : contraposée bien écrite**

c) En déduire que : $\mathbb{P}\left(\bigcup\limits_{k=0}^{+\infty} C_k\right) = 1 - \ell$.

- **1 pt : utilisation de la question *5* justifiée**
- **1 pt : fin du calcul**

d) Vérifier que : $\overline{\bigcup\limits_{k=0}^{+\infty} C_k} = \bigcap\limits_{k=0}^{+\infty} A_k$.

- **1 pt :** $\overline{\bigcup\limits_{k=0}^{+\infty} C_k} = \bigcap\limits_{k=0}^{+\infty} \overline{C_k} = \bigcap\limits_{k=0}^{+\infty} \overline{\overline{A_k}} = \bigcap\limits_{k=0}^{+\infty} A_k$

e) Conclure que : $\mathbb{P}\left(\bigcap\limits_{k=0}^{+\infty} A_k\right) = \ell$.

- **1 pt : calcul correct**

7. Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'événements. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n = \bigcup\limits_{k=0}^{n} A_k$.

a) Démontrer que la suite d'événements (U_n) est croissante.

- **1 pt :** $U_{n+1} = U_n \cup A_{n+1}$

b) Démontrer que : $\bigcup\limits_{k=0}^{+\infty} U_k = \bigcup\limits_{k=0}^{+\infty} A_k$.

- **1 pt :** $\bigcup\limits_{i=0}^{+\infty} A_i \subset \bigcup\limits_{i=0}^{+\infty} U_i$
- **1 pt :** $\bigcup\limits_{i=0}^{+\infty} U_i \subset \bigcup\limits_{i=0}^{+\infty} A_i$

c) Conclure que : $\mathbb{P}\left(\bigcup\limits_{k=0}^{+\infty} A_k\right) = \lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\bigcup\limits_{k=0}^{n} A_k\right)$.

- **1 pt : utilisation du théorème 1 avec la suite** $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **qui est croissante**
- **1 pt : reste du calcul**

On **admet** qu'on obtient ensuite $\mathbb{P}\left(\bigcap\limits_{k=0}^{+\infty} A_k\right) = \lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\bigcap\limits_{k=0}^{n} A_k\right)$ en utilisant un passage au complémentaire. On ne demande pas de le faire.

8. *Une application.* On lance une infinité de fois un dé à 6 faces équilibré. On définit, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, l'événement D_k : « le dé tombe sur 6 au k^{e} lancer ». On note A l'événement « le dé ne tombe jamais sur 6 ».

a) Exprimer l'événement A à l'aide des événements D_k.

- **1 pt :** $A = \bigcap\limits_{k=1}^{+\infty} \overline{D_k}$

b) Calculer $\mathbb{P}(A)$ à l'aide du théorème de la limite monotone.

- **1 pt : par indépendance des lancers**
- **1 pt : par équiprobabilité**
- **1 pt : car** $\dfrac{5}{6} \in]-1, 1[$

Partie 3 : Lemme de Borel-Cantelli

L'objet de cette partie est de démontrer le lemme de Borel-Cantelli, puis d'en donner deux applications concrètes. Ce lemme sera ensuite utilisé pour étudier certaines séries de variables aléatoires dans la partie 4.

Théorème 3 (Lemme de Borel-Cantelli)**.** *Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'événements. On pose $A = \limsup\limits_n A_n$.*

- *Si la série $\sum \mathbb{P}(A_n)$ converge, alors $\mathbb{P}(A) = 0$ (autrement dit, $\mathbb{P}(\overline{A}) = 1$ et donc il est presque certain que tous les événements $\overline{A_k}$ sont réalisés à partir d'un certain rang).*
- *Si les événements de la suite (A_n) sont indépendants et si la série $\sum \mathbb{P}(A_n)$ diverge, alors $\mathbb{P}(A) = 1$ (autrement dit, il est presque certain qu'il existe une infinité d'indices $k \in \mathbb{N}$ tels que l'événement A_k est réalisé).*

On fixe $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'événements. On pose $A = \limsup\limits_n A_n$.

9. On suppose, **dans cette question uniquement**, que la série $\sum \mathbb{P}(A_n)$ converge.

a) Montrer que : $\mathbb{P}(A) = \lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\bigcup\limits_{i=n}^{+\infty} A_i\right)$. *Indication : étudier la monotonie de la suite* $\left(\bigcup\limits_{i=n}^{+\infty} A_i\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

- **1 pt : la suite $\left(\bigcup\limits_{i=n}^{+\infty} A_i\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante**
- **1 pt : utilisation du théorème 1**

b) *Inégalité de Boole.* Montrer par récurrence sur $k \geqslant 2$ que si $B_1, \ldots, B_k$ sont des événements, alors on a :

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{k} B_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{k} \mathbb{P}(B_i)$$

- **1 pt : initialisation**
- **3 pt : hérédité**
  - × **1 pt : formule du crible avec $\bigcup\limits_{i=1}^{k} B_i$ et B_{k+1}**
  - × **2 pt : reste du calcul**

c) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\mathbb{P}\left(\bigcup\limits_{i=n}^{+\infty} A_i\right) \leqslant \sum\limits_{i=n}^{+\infty} \mathbb{P}(A_i)$.

- **1 pt : $\mathbb{P}\left(\bigcup\limits_{i=n}^{+\infty} A_i\right) = \lim\limits_{N\to+\infty} \mathbb{P}\left(\bigcup\limits_{i=n}^{N} A_i\right)$ d'après le théorème 2**
- **1 pt : $\mathbb{P}\left(\bigcup\limits_{i=n}^{N} A_i\right) \leqslant \sum\limits_{i=n}^{N} \mathbb{P}(A_i) \leqslant \sum\limits_{i=n}^{+\infty} \mathbb{P}(A_i)$**
- **1 pt : passage à la limite**

d) Justifier que : $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{i=n}^{+\infty} \mathbb{P}(A_i) = 0$.

- **1 pt : utilisation correcte de $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{i=0}^{n-1} \mathbb{P}(A_i) = \sum\limits_{i=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_i)$**
- **1 pt : Chasles**

e) En déduire que : $\mathbb{P}(A) = 0$.

- **1 pt : théorème d'encadrement**
- **1 pt : $\mathbb{P}(A) = 0$ correctement prouvé**

10. On suppose, **dans cette question uniquement**, que les événements de la suite (A_n) sont indépendants et que la série $\sum \mathbb{P}(A_n)$ diverge.

a) Montrer que : $\mathbb{P}(\overline{A}) = \lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\bigcap\limits_{j=n}^{+\infty} \overline{A_j}\right)$.

- **1 pt :** $\overline{A} = \bigcup\limits_{n=0}^{+\infty} \bigcap\limits_{j=n}^{+\infty} \overline{A_j}$
- **1 pt : on pose** $B_n = \bigcap\limits_{j=n}^{+\infty} \overline{A_j}$**, la suite** (B_n) **est croissante**
- **1 pt :** $\mathbb{P}(\overline{A}) = \lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\bigcap\limits_{j=n}^{+\infty} \overline{A_j}\right)$

b) Justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\mathbb{P}\left(\bigcap\limits_{j=n}^{+\infty} \overline{A_j}\right) = \lim\limits_{N\to+\infty} \mathbb{P}\left(\bigcap\limits_{j=n}^{N} \overline{A_j}\right)$.

- **2 pt : utilisation correcte du théorème 2**

c) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\mathrm{e}^{-x} \geqslant 1 - x$. En déduire que, pour tout entiers naturels $n \leqslant N$:

$$0 \leqslant \mathbb{P}\left(\bigcap_{j=n}^{N} \overline{A_j}\right) \leqslant \exp\left(-\sum_{j=n}^{N} \mathbb{P}(A_j)\right)$$

- **2 pt : argument de convexité avec équation de la tangente en** 0 $(y = x + 1)$
- **1 pt : les événements** A_j **sont indépendants, donc les événements** $\overline{A_j}$ **également**
- **1 pt :** $\mathbb{P}\left(\bigcap\limits_{j=n}^{N} \overline{A_j}\right) = \prod\limits_{j=n}^{N} \mathbb{P}(\overline{A_j}) = \prod\limits_{j=n}^{N} (1 - \mathbb{P}(A_j))$
- **1 pt :** $0 \leqslant \prod\limits_{j=n}^{N} (1 - \mathbb{P}(A_j)) \leqslant \prod\limits_{j=n}^{N} \exp(-\mathbb{P}(A_j)) = \exp\left(-\sum\limits_{j=n}^{N} \mathbb{P}(A_j)\right)$

d) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\lim\limits_{N\to+\infty} \mathbb{P}\left(\bigcap\limits_{j=n}^{N} \overline{A_j}\right) = 0$. Conclure.

- **1 pt :** $\lim\limits_{N\to+\infty} \sum\limits_{j=n}^{N} \mathbb{P}(A_j) = +\infty$
- **1 pt :** $\lim\limits_{N\to+\infty} \mathbb{P}\left(\bigcap\limits_{j=n}^{N} \overline{A_j}\right) = 0$ **par thm d'encadrement**
- **1 pt : conclusion** $(\mathbb{P}(A) = 1)$

11. *Une première application.* On lance une infinité de fois un dé à 6 faces équilibré. On définit, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, l'événement D_k : « le dé tombe sur 6 au k^{e} lancer ». On définit également, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'événement A_n : « le dé tombe sur 6 à chacun des lancers numéros $n, n+1, \ldots, 2n-1$ ». On pose $A = \limsup\limits_{n} A_n$.

a) Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(A_n)$.

- **1 pt :** $A_n = \bigcap\limits_{k=n}^{2n-1} D_k$
- **1 pt :** $\mathbb{P}(A_n) = \prod\limits_{k=n}^{2n-1} \mathbb{P}(D_k) = \prod\limits_{k=n}^{2n-1} \dfrac{1}{6} = \left(\dfrac{1}{6}\right)^{2n-1-n+1} = \left(\dfrac{1}{6}\right)^{n}$

- **1 pt : par indépendance des lancers**

b) Calculer $\mathbb{P}(A)$ à l'aide du lemme de Borel-Cantelli.

- **1 pt : la série** $\sum \left(\frac{1}{6}\right)^n$ **est une série géométrique de raison** $\frac{1}{6} \in]-1,1[$ **et donc converge**
- **1 pt : d'après le lemme de Borel-Cantelli, on peut conclure que** $\mathbb{P}(A) = 0$

12. *Une deuxième application.* On lance une infinité de fois un dé à 6 faces équilibré. On dit que le motif `double 6` apparaît au rang $n \in \mathbb{N}^*$ si le dé tombe sur 6 aux lancers numéros n et $n+1$. On définit, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'événement A_n : « le motif `double 6` apparaît au rang $2n$ ». On pose $A = \limsup\limits_{n} A_n$. On définit l'événement B : « le motif `double 6` apparaît une infinité de fois ».

a) Calculer $\mathbb{P}(A)$.

- **1 pt :** $\mathbb{P}(A_n) = \frac{1}{6^2}$
- **1 pt : la série** $\sum \mathbb{P}(A_n)$ **diverge grossièrement**
- **1 pt : les événements de la famille** $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ **sont indépendants**
- **1 pt : d'après le lemme de Borel-Cantelli, on peut conclure que** $\mathbb{P}(A) = 1$

b) Comparer les événements A et B. En déduire $\mathbb{P}(B)$.

- **1 pt :** $A \subset B$
- **1 pt :** $\mathbb{P}(B) = 1$

Partie 4 : Étude de quelques séries de variables aléatoires

13. On considère dans cette question une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de variables aléatoires suivant toutes la même loi (appelée *loi de Rademacher*) définie ci-dessous :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \mathbb{P}([X_n = 1]) = \frac{1}{2} \qquad \text{et} \qquad \mathbb{P}([X_n = -1]) = \frac{1}{2}.$$

a) Écrire une fonction **Python** `rademacher()` qui simule une variable aléatoire suivant la loi de Rademacher.

- **1 pt :** `if rd.random() < 1/2:`
- **1 pt : bonnes valeurs renvoyées**

b) Soit $\omega \in \Omega$. Expliquer pourquoi la série $\sum X_n(\omega)$ diverge.

- **1 pt : la suite** $(X_n(\omega))_{n\in\mathbb{N}}$ **ne tend pas vers** 0

c) En déduire que la série de variables aléatoires $\sum X_n$ diverge presque-sûrement.

- **1 pt :** $A_{\mathbf{dv}} = \Omega$ **donc** $\mathbb{P}(A_{\mathbf{dv}}) = 1$

14. Soit (X_n) une suite de variables aléatoires. On pose $A_0 = \liminf\limits_{n} [X_n = 0]$.

a) Exprimer à l'aide d'une phrase l'événement A_0.

- **1 pt :** A_0 **: « toutes les variables aléatoires** X_n **prennent la valeur** 0 **à partir d'un certain rang »**

b) Démontrer : $A_0 \subset A_{\text{cv}}$.

- **1 pt : Soit** $\omega \in A_0$**. D'après la question *14.a)*, il existe un entier** $m \in \mathbb{N}$ **tel que, pour tout** $k \geqslant m$**,** $X_k(\omega) = 0$**. Fixons un tel entier** m

- **2 pt :** $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} X_k(\omega) = \sum\limits_{k=0}^{m-1} X_k(\omega)$

c) Conclure que : si $\mathbb{P}(A_0) = 1$, alors la série de variables aléatoires $\sum X_n$ converge presque-sûrement.

- **1 pt : par croissance de l'application $\mathbb{P}$, on a :** $1 = \mathbb{P}(A_0) \leqslant \mathbb{P}(A_{\mathbf{cv}})$**. On en déduit que** $\mathbb{P}(A_{\mathbf{cv}}) = 1$

15. On considère dans cette question une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de variables aléatoires définie par récurrence : $X_0 \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

- la loi conditionnelle de X_{n+1} sachant $[X_n = 1]$ est la loi de Bernoulli de paramètre p ;
- la loi conditionnelle de X_{n+1} sachant $[X_n = 0]$ est la loi certaine égale à 0.

On **admet** que cette suite de variables aléatoires est bien définie et en particulier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}([X_n = 0]) \neq 0$ et $\mathbb{P}([X_n = 1]) \neq 0$.

a) Recopier et compléter la fonction **Python** `markovBernoulli(n, p)` écrite ci-dessous. Cette fonction prend en paramètres d'entrée un entier naturel n et un réel $p \in \,]0,1[$, simule les variables aléatoires $X_0, \dots, X_n$ et renvoie la liste $[X_0, \dots, X_n]$. On rappelle que la commande `rd.binomial(1,p)` simule une variable aléatoire qui suit la loi de Bernoulli de paramètre p.

```python
def markovBernoulli(n, p):
    L = []
    X = ...
    L.append(X)
    for k in ...:
        if ...:
            X = ...
        else:
            X = ...
        L.append(X)
    return L
```

- **1 pt :** `X = rd.binomial(1,p)`
- **1 pt :** `for k in range(n):`
- **1 pt :** `if X == 1:`
- **1 pt :** `X = rd.binomial(1,p)`
- **1 pt :** `X = 0`

```python
def markovBernoulli(n, p):
    L = []
    X = rd.binomial(1,p)
    L.append(X)
    for k in range(n):
        if X == 1:
            X = rd.binomial(1,p)
        else:
            X = 0
        L.append(X)
    return L
```

b) On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \mathbb{P}([X_n = 1])$. Déterminer une relation de récurrence liant u_{n+1} et u_n puis en déduire une expression simple de u_n valable pour tout entier naturel n.

- **1 pt : formule des probabilités totales avec le système complet d'événements associé à** X_n
- **1 pt :** $u_{n+1} = pu_n$
- **2 pt :** $u_n = p^{n+1}$

c) *(i)* Justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $[X_n = 1] = \bigcap\limits_{k=0}^{n} [X_k = 1]$.

- **1 pt :** $\bigcap\limits_{k=0}^{n} [X_k = 1] = \left(\bigcap\limits_{k=0}^{n-1} [X_k = 1]\right) \cap [X_n = 1] \subset [X_n = 1]$
- **2 pt :** $[X_n = 1] \subset \bigcap\limits_{k=0}^{n} [X_k = 1]$

(ii) Retrouver l'expression de u_n à l'aide de cette formule.

- **1 pt : formule des probabilités composées bien écrite**
- **1 pt :** $\mathbb{P}\left(\bigcap\limits_{k=0}^{n} [X_k = 1]\right) = \mathbb{P}([X_0 = 1]) \prod\limits_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}_{[X_k=1]}([X_{k+1} = 1])$
- **1 pt :** $u_n = p^{n+1}$

(iii) Soit $(n, m) \in \mathbb{N}^2$ tel que $n < m$. Les variables aléatoires X_n et X_m sont-elles indépendantes ?

- **1 pt : choix de deux événements explicites**
- **2 pt : calculs corrects des probabilités**

d) *(i)* Quelle est la monotonie de la suite d'événements $([X_n = 0])_{n\in\mathbb{N}}$?

- **1 pt : la suite d'événements** $([X_n = 0])_{n\in\mathbb{N}}$ **est croissante**

(ii) En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, une simplification de $\bigcap\limits_{k=n}^{+\infty} [X_k = 0]$.

- **1 pt :** $\bigcap\limits_{k=n}^{+\infty} [X_k = 0] = [X_n = 0] \cap \left(\bigcap\limits_{k=n+1}^{+\infty} [X_k = 0]\right) \subset [X_n = 0]$
- **2 pt :** $[X_n = 0] \subset \bigcap\limits_{k=n}^{+\infty} [X_k = 0]$

(iii) On pose $A_0 = \liminf\limits_{n} [X_n = 0]$. Calculer $\mathbb{P}(A_0)$.

- **1 pt :** $\liminf\limits_{n} [X_n = 0] = \bigcup\limits_{n=0}^{+\infty} \bigcap\limits_{k=n}^{+\infty} [X_k = 0] = \bigcup\limits_{n=0}^{+\infty} [X_n = 0]$
- **1 pt :** $\mathbb{P}\left(\bigcup\limits_{n=0}^{+\infty} [X_n = 0]\right) = \lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}([X_n = 0])$ **d'après le théorème 1**
- **1 pt :** $\mathbb{P}(A_0) = 1$

(iv) Que peut-on conclure sur la série de variables aléatoires $\sum X_n$?

- **1 pt : d'après la question *14.c)*, la série de variables aléatoires** $\sum X_n$ **converge presque-sûrement**

16. On considère dans cette question une suite $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires indépendantes suivant toutes la loi géométrique de paramètre p. Soit α un réel fixé. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $X_n = \dfrac{Y_n}{n^\alpha}$. On étudie la convergence de la série de variables aléatoires $\sum X_n$ suivant la valeur de α.

a) On suppose, **dans cette question uniquement**, que $\alpha \leqslant 1$. Montrer que la série de variables aléatoires $\sum X_n$ diverge presque-sûrement.

- **1 pt : calcul à ω fixé**
- **1 pt :** $Y_n(\Omega) = \mathbb{N}^*$ **donc** $Y_n(\omega) \geqslant 1$
- **1 pt :** $X_n(\omega) \geqslant \dfrac{1}{n^\alpha} \geqslant 0$ **(car** $n^\alpha > 0$**)**
- **1 pt : la série** $\sum \dfrac{1}{n^\alpha}$ **diverge par critère de Riemann**
- **1 pt : par critère de comparaison pour les séries à termes positifs, on en déduit que la série** $\sum X_n(\omega)$ **diverge également**
- **1 pt : la série de variables aléatoires** $\sum X_n$ **diverge presque-sûrement**

b) On suppose, **dans cette question uniquement**, que $\alpha > 2$.

(i) Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$: $\mathbb{P}([Y_k > k]) = q^k$. *(On rappelle que $q = 1 - p$)*

- **1 pt :** $[Y_k > k] = \bigcup\limits_{i=k+1}^{+\infty} [Y_k = i]$
- **1 pt : incompatibilité**
- **1 pt :** $\mathbb{P}([Y_k > k]) = q^k$
- **1 pt : argument de somme géométrique de raison** $q \in]-1, 1[$

(ii) On pose $A = \limsup\limits_k [Y_k > k]$. Montrer que, pour tout $\omega \in \overline{A}$, la série $\sum X_n(\omega)$ est convergente.

- **1 pt :** $\overline{A} = \liminf\limits_k \overline{[Y_k > k]} = \liminf\limits_k [Y_k \leqslant k]$
- **1 pt : il existe un rang** $k_0 \in \mathbb{N}^*$ **tel que, pour tout entier** $k \geqslant k_0$**, on a :** $Y_k(\omega) \leqslant k$
- **1 pt : pour tout** $k \geqslant k_0$**,** $0 \leqslant X_k(\omega) \leqslant \dfrac{k}{k^\alpha} = \dfrac{1}{k^{\alpha-1}}$
- **1 pt : la série** $\sum \dfrac{1}{k^{\alpha-1}}$ **converge par critère de Riemann (on a** $\alpha > 2$ **donc** $\alpha - 1 > 1$**)**

(iii) En déduire que la série de variables aléatoires $\sum X_n$ converge presque-sûrement.

- **1 pt : la série** $\sum q^k$ **converge en tant que série géométrique de raison** $q \in]-1, 1[$ **donc la série** $\sum \mathbb{P}([Y_k > k])$ **est convergente**
- **1 pt : d'après le lemme de Borel-Cantelli :** $\mathbb{P}(A) = 0$ **et donc** $\mathbb{P}(\overline{A}) = 1$
- **1 pt :** $\overline{A} \subset A_{\mathbf{dv}}$ **donc** $\mathbb{P}(A_{\mathbf{dv}}) = 1$

c) Écrire une fonction **Python** `sommePartielle(n, p, alpha)` qui prend en entrée un entier naturel `n` non nul, un réel $p \in]0, 1[$ et un réel `alpha` et qui renvoie une simulation de la variable aléatoire $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} X_k$.

- **1 pt : initialisation** `S = 0`
- **1 pt :** `for k in range(1, n+1):`
- **1 pt :** `Y = rd.geometric(p)`
- **1 pt :** `S = S + Y / (k**alpha)`
- **1 pt : bonus si tout est parfait**

17. On considère dans cette question une suite d'urnes $(U_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'urne U_n contient $2n$ boules numérotées de 1 à $2n$. L'expérience aléatoire consiste à faire deux tirages successifs et **sans** remise dans chacune de ces urnes. On note, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $T_{n,1}$ (resp. $T_{n,2}$) la variable aléatoire égale au numéro de la boule obtenue au premier (resp. second) tirage effectué dans l'urne U_n. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $X_n = |T_{n,1} - T_{n,2}|$.

a) Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $T_{n,1}(\Omega)$, $T_{n,2}(\Omega)$ et $X_n(\Omega)$.

- **1 pt :** $T_{n,1} \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 1, 2n \rrbracket)$
- **1 pt :** $T_{n,2}(\Omega) = \bigcup\limits_{k=1}^{2n} \big(\llbracket 1, 2n \rrbracket \setminus \{k\}\big) = \llbracket 1, 2n \rrbracket$
- **1 pt : X_n ne peut pas prendre la valeur 0 et donc la plus petite valeur possible pour X_n est 1**
- **1 pt : la plus grande valeur pour X_n est obtenue lorsque, par exemple, on pioche la boule numéro 1 au premier tirage puis la boule numéro $2n$ au second tirage. Dans ce cas, X_n prend la valeur $2n-1$**
- **1 pt :** $X_n(\Omega) = \llbracket 1, 2n-1 \rrbracket$

b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $(i,j) \in T_{n,1}(\Omega) \times T_{n,2}(\Omega)$. Calculer $\mathbb{P}([T_{n,1} = i] \cap [T_{n,2} = j])$.

- **1 pt : si $i = j$,** $\mathbb{P}([T_{n,1} = i] \cap [T_{n,2} = i]) = 0$
- **3 pt : si $i \neq j$,** $\mathbb{P}([T_{n,1} = i] \cap [T_{n,2} = j]) = \dfrac{1}{2n(2n-1)}$ **(2 pts pour les explications)**

c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $k \in X_n(\Omega)$. Démontrer que :

$$\mathbb{P}([X_n = k]) = \frac{2n-k}{n(2n-1)}$$

- **1 pt : formule des probabilités totales avec le système complet d'événements associé à $T_{n,1}$**
- **1 pt :** $\mathbb{P}([X_n = k]) = \sum\limits_{i=1}^{2n} \left(\mathbb{P}([T_{n,2} = i-k] \cap [T_{n,1} = i]) + \mathbb{P}([T_{n,2} = i+k] \cap [T_{n,1} = i])\right)$ **par incompatibilité**
- **1 pt :** $\mathbb{P}([X_n = k]) = \sum\limits_{i=k+1}^{2n} \mathbb{P}([T_{n,2} = i-k] \cap [T_{n,1} = i]) + \sum\limits_{i=1}^{2n-k} \mathbb{P}([T_{n,2} = i+k] \cap [T_{n,1} = i])$
- **1 pt :** $\mathbb{P}([X_n = k]) = \dfrac{2n-k}{n(2n-1)}$ **(fin du calcul)**

d) *(i)* Soit $k \in \mathbb{N}^*$ fixé. Déterminer la nature de la série $\sum\limits_{n \geqslant 1} \mathbb{P}([X_n = k])$.

- **1 pt : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}([X_n = k]) \geqslant 0$ et $\dfrac{1}{n} \geqslant 0$ (si le reste est bon)**
- **1 pt :** $\mathbb{P}([X_n = k]) \underset{n \to +\infty}{\sim} \dfrac{2n}{2n^2} = \dfrac{1}{n}$
- **1 pt : la série $\sum \dfrac{1}{n}$ diverge par critère de Riemann**
- **1 pt : par critère d'équivalence sur les séries à termes positifs, la série $\sum\limits_{n \geqslant 1} \mathbb{P}([X_n = k])$ diverge**

(ii) On pose $A = \limsup\limits_{n} [X_n = 1]$. Calculer $\mathbb{P}(A)$ puis en déduire que, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, la série de variables aléatoires $\sum \dfrac{1}{X_n^\alpha}$ diverge presque-sûrement.

- **1 pt : Les tirages dans des urnes différentes sont indépendants, on en déduit que les variables aléatoires $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ sont mutuellement indépendantes. Ainsi, les événements $[X_n = 1]$ sont indépendants**
- **1 pt : la série $\sum \mathbb{P}([X_n = 1])$ diverge d'après la question *18.d)(i)*. D'après le lemme de Borel-Cantelli :** $\mathbb{P}(A) = 1$

- **2 pt : Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Soit $\omega \in A$. D'après la question *1*, il existe une infinité d'indices $n \in \mathbb{N}^*$ tels que $[X_n = 1]$ est réalisé, autrement dit tels que $X_n(\omega) = 1$. On en déduit qu'il existe une infinité d'indices $n \in \mathbb{N}^*$ tels que $\dfrac{1}{X_n(\omega)^\alpha} = 1$. Ceci implique que la suite $\left(\dfrac{1}{X_n(\omega)^\alpha}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ne converge pas vers 0 et donc la série $\sum \dfrac{1}{X_n(\omega)^\alpha}$ diverge grossièrement**
- **1 pt : $A \subset A_{\mathbf{dv}}$ et donc $\mathbb{P}(A_{\mathbf{dv}}) = 1$**

Partie 5 : Théorème de Kolmogorov

L'objet de cette partie est de démontrer le théorème de Kolmogorov, puis d'en donner une application.

Théorème 4 (Théorème de Kolmogorov)**.** *Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires discrètes indépendantes admettant chacune un moment d'ordre 2. On suppose que toutes les variables aléatoires X_n sont d'espérance nulle et que la série $\sum \mathbb{V}(X_n)$ converge. Alors la série de variables aléatoires $\sum X_n$ converge presque-sûrement.*

On fixe une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant les hypothèses du théorème de Kolmogorov. On rappelle que $A_{\text{cv}} = \{\omega \in \Omega \mid \sum X_n(\omega) \text{ converge}\}$ et que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} X_k$.
On définit, pour tout $(n, N) \in \mathbb{N}^2$, l'événement :

$$C(N, n) = \bigcap_{i=n}^{+\infty} \bigcap_{j=n}^{+\infty} \left[\, |S_i - S_j| \leqslant 2^{-N} \,\right]$$

On **admet** que l'on peut réécrire l'événement A_{cv} de la manière suivante :

$$\begin{aligned} A_{\text{cv}} &= \{\omega \in \Omega \mid \forall N \in \mathbb{N}, \exists n \in \mathbb{N}, \forall i \geqslant n, \forall j \geqslant n, |S_i(\omega) - S_j(\omega)| \leqslant 2^{-N}\} \\ &= \bigcap_{N=0}^{+\infty} \bigcup_{n=0}^{+\infty} C(N, n) \end{aligned}$$

18. ***a)*** Soit B un événement. Déterminer la loi de $\mathbb{1}_B$ puis en déduire que : $\mathbb{E}(\mathbb{1}_B) = \mathbb{P}(B)$.

- **1 pt : $\mathbb{1}_B(\Omega) = \{0, 1\}$ donc $\mathbb{1}_B$ suit une loi de Bernoulli**
- **1 pt : $\mathbb{1}_B \hookrightarrow \mathcal{B}(\mathbb{P}(B))$**

b) Soient B_1 et B_2 deux événements incompatibles. Montrer que : $\mathbb{1}_{B_1} + \mathbb{1}_{B_2} = \mathbb{1}_{B_1 \cup B_2}$.

- **1 pt : ω fixé**
- **2 pt : disjonction de cas bien menée**

c) Soit B un événement et soit Z une variable aléatoire discrète admettant une espérance.
Démontrer que la variable aléatoire $Z\,\mathbb{1}_B$ admet également une espérance.
(Indication : on notera pour cette preuve $Z(\Omega) \subset \{x_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ où $x_0 = 0$ et $x_i \neq 0$ pour $i \geqslant 1$. On comparera $\mathbb{P}([Z\,\mathbb{1}_B = x_i])$ avec $\mathbb{P}([Z = x_i])$ pour $i \geqslant 1$.)

- **1 pt : ainsi, la variable aléatoire $Z\,\mathbb{1}_B$ (qui est discrète) admet une espérance si et seulement si la série $\sum x_i \mathbb{P}([Z\,\mathbb{1}_B = x_i])$ converge absolument**
- **1 pt : formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $([\mathbb{1}_B = 0], [\mathbb{1}_B = 1])$: $\mathbb{P}([Z\,\mathbb{1}_B = x_i]) = \mathbb{P}([Z\,\mathbb{1}_B = x_i] \cap [\mathbb{1}_B = 0]) + \mathbb{P}([Z\,\mathbb{1}_B = x_i] \cap [\mathbb{1}_B = 1])$**
- **1 pt : $\mathbb{P}([Z\,\mathbb{1}_B = x_i]) \leqslant \mathbb{P}([Z = x_i])$**
- **1 pt : la série $\sum |x_i|\, \mathbb{P}([Z = x_i])$ converge car Z admet une espérance**

- **1 pt : par critère de comparaison pour les séries à termes positifs, la série $\sum |x_i| \, \mathbb{P}([Z \, \mathbb{1}_B = x_i])$ converge**

19. Soit $n \in \mathbb{N}$ et soit $\alpha > 0$. On pose :

$$A = [\max(|S_0|, |S_1|, \ldots, |S_n|) \geqslant \alpha]$$

et, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$:

$$A_k = [\, |S_k| \geqslant \alpha \,] \cap \left(\bigcap_{i=0}^{k-1} [\, |S_i| < \alpha \,] \right)$$

a) Montrer que les événements A_k sont deux à deux incompatibles puis que $A = \bigcup_{k=0}^{n} A_k$.

- **2 pt :** $A_k \cap A_{k'} = \varnothing$
- **1 pt :** $\bigcup_{k=0}^{n} A_k \subset A$
- **2 pt :** $A \subset \bigcup_{k=0}^{n} A_k$

b) Recopier et compléter la fonction **Python** `indicA(n, alpha)` qui prend en paramètres d'entrée un entier naturel n et un réel $\alpha > 0$ et qui simule la variable aléatoire $\mathbb{1}_A$. On supposera que l'on dispose d'une fonction **Python** `simulX()` qui simule la variable aléatoire X_0. On rappelle que la fonction **Python** `abs` renvoie la valeur absolue du nombre donné en argument.

```
def indicA(n, alpha):
    S = 0
    for k in range(n+1):
        S = S + simulX()
        if abs(S) >= alpha:
            return 1
    return 0
```

- **1 pt par ligne**

c) Démontrer par récurrence que, pour tout $i \in [\![0, n]\!]$:

$$\sum_{k=0}^{i} \mathbb{1}_{A_k} = \mathbb{1}_{A_0 \cup \cdots \cup A_i}$$

- **1 pt : initialisation**
- **2 pt : hérédité**

d) Montrer que :

$$\mathbb{E}\left(\sum_{k=0}^{n} S_n^2 \, \mathbb{1}_{A_k} \right) \leqslant \mathbb{E}\left(S_n^2\right)$$

- **2 pt : existence des espérances**
- **1 pt :** $\sum_{k=0}^{n} S_n^2 \, \mathbb{1}_{A_k} \leqslant S_n^2$
- **1 pt : croissance de l'espérance**

e) En déduire que :

$$\sum_{k=0}^{n} \mathbb{E}\big(\left(S_k^2 + 2S_k(S_n - S_k)\right) \mathbb{1}_{A_k} \big) \leqslant \mathbb{E}\left(S_n^2\right)$$

(Indication : commencer par justifier que, pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $a^2 \geqslant b^2 + 2b(a - b)$)

- **1 pt :** $a^2 \geqslant b^2 + 2b(a-b)$
- **2 pt : existence des espérances**
- **1 pt :** $\mathbb{E}\big(\left(S_k^2 + 2S_k(S_n - S_k)\right) \mathbb{1}_{A_k}\big) \leqslant \mathbb{E}\left(S_n^2 \, \mathbb{1}_{A_k}\right)$
- **1 pt : sommation de l'inégalité**
- **1 pt : linéarité de l'espérance**

f) Montrer que, pour tout $k \in [\![0,n]\!]$: $\mathbb{E}\left(S_k(S_n - S_k)\mathbb{1}_{A_k}\right) = 0$.

- **1 pt : par lemme des coalitions, les variables aléatoires $S_k \, \mathbb{1}_{A_k}$ et $S_n - S_k$ sont indépendantes**
- **2 pt : existence des espérances**
- **1 pt :** $\mathbb{E}\big(\left(S_k^2 + 2S_k(S_n - S_k)\right) \mathbb{1}_{A_k}\big) \leqslant \mathbb{E}\left(S_n^2 \, \mathbb{1}_{A_k}\right)$
- **1 pt : sommation de l'inégalité**
- **1 pt : linéarité de l'espérance**

g) Montrer que : $\sum\limits_{k=0}^{n} \mathbb{E}\big(S_k^2 \, \mathbb{1}_{A_k}\big) \geqslant \alpha^2 \sum\limits_{k=0}^{n} \mathbb{E}\big(\mathbb{1}_{A_k}\big)$.

- **1 pt :** $\forall k \in [\![0,n]\!], \ S_k^2 \, \mathbb{1}_{A_k} \geqslant \alpha^2 \, \mathbb{1}_{A_k}$
- **1 pt : croissance et linéarité de l'espérance**
- **1 pt : sommation de l'inégalité pour k variant de 0 à n**

h) Conclure que :

$$\mathbb{P}(A) \leqslant \frac{\mathbb{V}(S_n)}{\alpha^2} \qquad \textit{(Inégalité de Kolmogorov)}$$

- **1 pt :** $\mathbb{E}\big(\left(S_k^2 + 2S_k(S_n - S_k)\right) \mathbb{1}_{A_k}\big) = \mathbb{E}\big(S_k^2 \, \mathbb{1}_{A_k}\big)$
- **1 pt :** $\alpha^2 \sum\limits_{k=0}^{n} \mathbb{E}\big(\mathbb{1}_{A_k}\big) \leqslant \mathbb{E}\left(S_n^2\right)$
- **1 pt :** $\sum\limits_{k=0}^{n} \mathbb{E}\big(\mathbb{1}_{A_k}\big) = \mathbb{P}(A)$
- **1 pt :** $\mathbb{E}(S_n) = 0$ **par linéarité de l'espérance**
- **1 pt :** $\mathbb{V}(S_n) = \mathbb{E}\left(S_n^2\right)$
- **1 pt : bonus si la rédaction est soignée (questions citées)**

20. On fixe dans cette question un réel $\varepsilon > 0$.

a) Justifier, à l'aide de l'inégalité de Kolmogorov, que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $j \in \mathbb{N}^*$:

$$\mathbb{P}\left(\left[\max_{1 \leqslant k \leqslant j} |S_{n+k} - S_n| \geqslant \varepsilon \right] \right) \leqslant \frac{\mathbb{V}(S_{n+j} - S_n)}{\varepsilon^2}$$

- **2 pt :** $[\max_{1 \leqslant k \leqslant j} |S_{n+k} - S_n| \geqslant \varepsilon]$ **est l'événement A défini dans la question *19* mais où on a remplacé :**
  - × α **par** ε,
  - × **la suite $(X_i)_{i \geqslant 0}$ par la suite $(X_i)_{i \geqslant n+1}$ (qui vérifie les mêmes propriétés),**
  - × S_n **par** $S_{n+j} - S_n$.

b) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $j \in \mathbb{N}^*$:

$$\mathbb{P}\left(\left[\max_{1 \leqslant k \leqslant j} |S_{n+k} - S_n| \geqslant \varepsilon \right] \right) \leqslant \frac{R_n}{\varepsilon^2}$$

où $R_n = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} \mathbb{V}(X_k)$.

- **1 pt :** $\mathbb{V}(S_{n+j} - S_n) = \sum\limits_{k=n+1}^{n+j} \mathbb{V}(X_k)$ **par indépendance**
- **1 pt :** $\sum\limits_{k=n+1}^{n+j} \mathbb{V}(X_k) \leqslant \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} \mathbb{V}(X_k)$

c) On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $B_n(\varepsilon) = \left[\max\limits_{k\geqslant 1} |S_{n+k} - S_n| \geqslant \varepsilon\right]$. Conclure que :

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(B_n(\varepsilon)) = 0$$

- **1 pt :** $B_n(\varepsilon) = \left[\max\limits_{k\geqslant 1} |S_{n+k} - S_n| \geqslant \varepsilon\right] = \bigcup\limits_{k=1}^{+\infty} [\,|S_{n+k} - S_n| \geqslant \varepsilon\,]$
- **1 pt :** $\mathbb{P}(B_n(\varepsilon)) = \lim\limits_{j\to+\infty} \mathbb{P}\left(\left[\max\limits_{1\leqslant k\leqslant j} |S_{n+k} - S_n| \geqslant \varepsilon\right]\right)$ **par théorème 2**
- **1 pt : par passage à la limite dans les inégalités larges :**

$$0 \leqslant \mathbb{P}(B_n(\varepsilon)) \leqslant \frac{R_n}{\varepsilon^2}$$

- **1 pt :** $\lim\limits_{n\to+\infty} R_n = 0$ **car il s'agit d'un reste de série convergente**
- **1 pt : thm d'encadrement**

21. On fixe dans cette question un entier naturel N.

a) Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\overline{B_n\left(2^{-(N+1)}\right)} \subset C(N, n)$$

- **1 pt :** $\overline{B_n\left(2^{-(N+1)}\right)} = \bigcap\limits_{k=1}^{+\infty} \left[\,|S_{n+k} - S_n| < 2^{-(N+1)}\,\right]$
- **2 pt : preuve de** $|S_i(\omega) - S_j(\omega)| \leqslant 2^{-N}$ **par disjonction de cas**
- **1 pt : inégalité triangulaire citée**

b) En déduire que :

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} C(N, n)\right) = 1$$

- **1 pt : la suite d'événements** $(C(N, n))_{n\in\mathbb{N}}$ **est croissante**
- **1 pt : d'après le théorème 1 :**

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} C(N, n)\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(C(N, n))$$

- **1 pt : choix de** $\varepsilon = 2^{-(N+1)} > 0$
- **1 pt :** $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}(C(N, n)) = 1$ **par thm d'encadrement**

22. Conclure que : $\mathbb{P}(A_{\text{cv}}) = 1$.

- **1 pt : la suite d'événements** $\left(\bigcup\limits_{n=0}^{+\infty} C(N, n)\right)_{N\in\mathbb{N}}$ **est décroissante**

- **1 pt : d'après le théorème 1 :**

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}(A_{\mathbf{cv}}) &= \mathbb{P}\left(\bigcap_{N=0}^{+\infty} \bigcup_{n=0}^{+\infty} C(N,n)\right) \\
&= \lim_{N\to+\infty} \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} C(N,n)\right) \\
&= \lim_{N\to+\infty} 1 && \textbf{\textit{(d'après la question 21.b))}} \\
&= 1
\end{aligned}
$$

23. *Une application.* On considère dans cette question une suite $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires indépendantes suivant toutes la loi de Rademacher (voir question ***13*** pour la définition).

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $X_n = \dfrac{Y_n}{n}$.

Démontrer que la série de variables aléatoires $\sum X_n$ converge presque-sûrement.

- **1 pt : les variables aléatoires Y_n et X_n sont toutes finies dont admettent toutes une espérance et une variance**
- **1 pt : les variables aléatoires X_n sont indépendantes par lemme des coalitions**
- **1 pt : $\mathbb{E}(X_n) = 0$**
- **1 pt : $\mathbb{V}(X_n) = \dfrac{1}{n^2}$**
- **1 pt : la série $\sum \mathbb{V}(X_n)$ converge par critère de Riemann**
- **1 pt : d'après le théorème de Kolmogorov, la série de variables aléatoires $\sum X_n$ converge presque-sûrement**