DS3 (vB) - Correction

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidat·es sont invité·es à ***encadrer*** *dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*
Aucun document n'est autorisé. ***L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique*** *est* ***interdite****. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*
Si au cours de l'épreuve, un candidat ou une candidate repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

On suppose, et c'est valable pour toute l'épreuve, que la librairie suivante est importée sous son alias habituel :

- `import numpy.random as rd`

Définitions et notations du problème.

- Dans tout le sujet on considère un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, toutes les variables aléatoires qui interviennent dans la suite sont définies sur cet espace.
- La lettre p désigne un réel fixé de $]0,1[$. On pose $q = 1 - p$.
- Si A est un événement, on note $\mathbb{1}_A$ la variable aléatoire indicatrice de cet événement, définie par :

$$\forall \omega \in \Omega,\ \mathbb{1}_A(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } \omega \in A \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

  Exemple : on lance une infinité de fois un dé à 6 faces équilibré et on définit l'événement A : « le dé tombe sur 6 à chaque lancer ». Dans ce cas, la variable aléatoire $\mathbb{1}_A$ prend la valeur 1 si le dé tombe sur 6 à chaque lancer et la valeur 0 sinon.
- Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'événements et si $\omega \in \Omega$ est une issue, on rappelle que :

$$\omega \in \bigcap_{k=0}^{+\infty} A_k \iff \forall k \in \mathbb{N},\ \omega \in A_k \qquad \text{et} \qquad \omega \in \bigcup_{k=0}^{+\infty} A_k \iff \exists k \in \mathbb{N},\ \omega \in A_k$$

  Exemple : on lance une infinité de fois un dé à 6 faces équilibré et on définit les événements A_k : « le dé tombe sur 6 au k^{e} lancer » pour tout entier $k \geqslant 1$. Soit ω une issue. Alors :

$$\omega \in \bigcap_{k=1}^{+\infty} A_k \iff \text{le dé est tombé sur 6 à chaque lancer}$$
$$\omega \in \bigcup_{k=1}^{+\infty} A_k \iff \text{le dé est tombé au moins une fois sur 6}$$

- Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'événements, on pose :

$$\limsup_n A_n = \bigcap_{n=0}^{+\infty} \bigcup_{k=n}^{+\infty} A_k \qquad \text{et} \qquad \liminf_n A_n = \bigcup_{n=0}^{+\infty} \bigcap_{k=n}^{+\infty} A_k$$

- Si $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de variables aléatoires, on pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} X_k$.

  On appelle *série de terme général* X_n, et on note $\sum X_n$, la suite de variables aléatoires $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Il s'agit d'une *série de variables aléatoires.*

  On pose $A_{\text{cv}} = \{\omega \in \Omega \mid \sum X_n(\omega) \text{ converge}\}$ (on remarquera que $\sum X_n(\omega)$ est une série de nombres réels). On **admet** que A_{cv} est un événement, que l'on peut également écrire sous la forme :

$$A_{\text{cv}} : \text{« la série de variables aléatoires } \textstyle\sum X_n \text{ converge »}$$

  De manière analogue, on pose $A_{\text{dv}} = \{\omega \in \Omega \mid \sum X_n(\omega) \text{ diverge}\}$ et on **admet** que A_{dv} est un événement, que l'on peut également écrire sous la forme :

$$A_{\text{dv}} : \text{« la série de variables aléatoires } \textstyle\sum X_n \text{ diverge »}$$

  On dit que la série de variables aléatoires $\sum X_n$ *converge presque-sûrement* (resp. *diverge presque-sûrement*) si $\mathbb{P}(A_{\text{cv}}) = 1$ (resp. $\mathbb{P}(A_{\text{dv}}) = 1$).

Organisation du problème.

Dans le diagramme qui suit, une flèche pointant de i vers j indique que la partie j utilise des résultats de la partie i :

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] \arrow[dr] & 3 \arrow[d] & 2 \arrow[l] \arrow[dl] \arrow[d] \\
 & 4 & 5
\end{tikzcd}$$

Partie 1 : Limite supérieure et limite inférieure d'une suite d'événements

On fixe pour toute cette partie une suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'événements et $\omega \in \Omega$ une issue. On pose :

$$I(\omega) = \{k \in \mathbb{N} \mid \omega \in A_k\}$$

Ainsi, $I(\omega)$ est l'ensemble de tous les indices $k \in \mathbb{N}$ tels que A_k est réalisé pour l'issue ω.
Exemple : on lance une infinité de fois un dé à 6 faces équilibré et on définit les événements A_k : « le dé tombe sur 6 au k^{e} lancer » pour tout entier $k \geqslant 1$. Pour l'issue $\omega = (1, 6, 6, 3, 5, 6, 4, 6, \dots)$, on a $I(\omega) = \{2, 3, 6, 8, \dots\}$.

1. a) Traduire à l'aide de quantificateurs et de l'ensemble $I(\omega)$ les propositions « $\omega \in \limsup\limits_n A_n$ » et « $\omega \in \overline{\limsup\limits_n A_n}$ ».

Démonstration.

- Tout d'abord :

$$\begin{aligned} \omega \in \limsup_n A_n &\iff \omega \in \bigcap_{n=0}^{+\infty} \bigcup_{k=n}^{+\infty} A_k \\ &\iff \forall n \in \mathbb{N},\ \exists k \geqslant n,\ \omega \in A_k \\ &\iff \forall n \in \mathbb{N},\ \exists k \geqslant n,\ k \in I(\omega) \end{aligned}$$

- Ensuite, d'après ce qui précède :

$$\omega \in \overline{\limsup_n A_n} \iff \exists n \in \mathbb{N},\ \forall k \geqslant n,\ k \notin I(\omega)$$

□

b) Montrer que : si $\omega \in \overline{\limsup\limits_n A_n}$, alors $I(\omega)$ est fini.

Démonstration.
Supposons que $\omega \in \overline{\limsup\limits_n A_n}$. D'après la question ***1.a)***, il existe un entier $n \in \mathbb{N}$ tel que pour tout entier $k \geqslant n$, $k \notin I(\omega)$. Fixons un tel entier n. On a alors : $I(\omega) \subset [\![0, n-1]\!]$. Or l'ensemble $[\![0, n-1]\!]$ est fini.

$$\boxed{\text{On en déduit que } I(\omega) \text{ est fini.}}$$

□

c) Montrer que : si $I(\omega)$ est fini, alors $\omega \in \overline{\limsup\limits_n A_n}$.

Démonstration.
Supposons que $I(\omega)$ est fini. Alors il existe un entier $n \in \mathbb{N}$ tel que $I(\omega) \subset [\![0, n-1]\!]$. Fixons un tel entier n. Il vient alors que, pour tout entier $k \geqslant n$, $k \notin I(\omega)$.

$$\boxed{\text{D'après la question } \textbf{\textit{1.a)}}\text{, ceci prouve que } \omega \in \overline{\limsup_n A_n}.}$$

□

Ce qui précède justifie les équivalences suivantes (que l'on ne demande pas de démontrer) :

$$\begin{aligned} \omega \in \limsup_n A_n &\iff I(\omega) \text{ est infini} \\ &\iff \text{il existe une infinité d'indices } k \in \mathbb{N} \text{ tels que } A_k \text{ est réalisé} \end{aligned}$$

2. Traduire à l'aide de quantificateurs et de l'ensemble $I(\omega)$ la proposition « $\omega \in \liminf_n A_n$ ».

Démonstration.
On a :

$$\begin{aligned} \omega \in \liminf_n A_n &\iff \omega \in \bigcup_{n=0}^{+\infty} \bigcap_{k=n}^{+\infty} A_k \\ &\iff \exists n \in \mathbb{N},\ \forall k \geqslant n,\ \omega \in A_k \\ &\iff \exists n \in \mathbb{N},\ \forall k \geqslant n,\ k \in I(\omega) \end{aligned}$$

□

Cette traduction justifie les équivalences suivantes (que l'on ne demande pas de démontrer) :

$$\begin{aligned} \omega \in \liminf_n A_n &\iff I(\omega) \text{ contient tous les entiers naturels à partir d'un certain rang} \\ &\iff \text{tous les événements } A_k \text{ sont réalisés à partir d'un certain rang} \end{aligned}$$

3. ***a)*** Justifier : $\liminf_n A_n \subset \limsup_n A_n$.

Démonstration.
Supposons que $\omega \in \liminf_n A_n$. Alors, d'après la question ***2***, $I(\omega)$ contient tous les entiers naturels à partir d'un certain rang. En particulier, $I(\omega)$ est infini. On en déduit, d'après la question ***1***, que $\omega \in \limsup_n A_n$.

$$\boxed{\text{L'issue } \omega \text{ étant quelconque, ceci prouve que } \liminf_n A_n \subset \limsup_n A_n.}$$

□

b) Justifier : $\overline{\limsup_n A_n} = \liminf_n \overline{A_n}$.

Démonstration.
D'après les lois de Morgan :

$$\begin{aligned} \overline{\limsup_n A_n} &= \overline{\bigcap_{n=0}^{+\infty} \bigcup_{k=n}^{+\infty} A_k} && \textit{(par définition)} \\ &= \bigcup_{n=0}^{+\infty} \overline{\bigcup_{k=n}^{+\infty} A_k} \\ &= \bigcup_{n=0}^{+\infty} \bigcap_{k=n}^{+\infty} \overline{A_k} \\ &= \liminf_n \overline{A_n} && \textit{(par définition)} \end{aligned}$$

□

4. *Une application.* On lance une infinité de fois un dé à 6 faces équilibré. On définit, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'événement A_n : « le dé tombe sur 6 au n^{e} lancer ».

a) Exprimer à l'aide d'une phrase l'événement $\limsup\limits_n A_n$.

Démonstration.

$$\boxed{\limsup_n A_n \text{ : « le dé est tombé une infinité de fois sur 6 »}}$$

□

b) Exprimer à l'aide d'une phrase l'événement $\liminf\limits_n A_n$.

Démonstration.

$$\boxed{\liminf_n A_n \text{ : « le dé est toujours tombé sur 6 à partir d'un certain rang »}}$$

□

Partie 2 : Théorème de la limite monotone

L'objet de cette partie est de démontrer le théorème de la limite monotone, qui se décline en deux énoncés, puis d'en donner une première application concrète. Dans les parties suivantes, à chaque utilisation de ce théorème, les candidat·es sont invité·es à préciser si ils/elles utilisent le Théorème 1 ou le Théorème 2.

Théorème 1 (Théorème de la limite monotone)**.** *Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'événements.*

- *Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante (i.e. si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A_n \subset A_{n+1}$), alors :*

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=0}^{+\infty} A_k\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(A_n)$$

- *Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante (i.e. si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A_{n+1} \subset A_n$), alors :*

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=0}^{+\infty} A_k\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(A_n)$$

Théorème 2 (Théorème de la limite monotone)**.** *Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'événements. Alors :*

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=0}^{+\infty} A_k\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=0}^{n} A_k\right) \qquad \textit{et} \qquad \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=0}^{+\infty} A_k\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=0}^{n} A_k\right)$$

5. Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante d'événements.

a) Démontrer que la suite $(\mathbb{P}(A_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente. On pose $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}(A_n)$.

Démonstration.

- Tout d'abord, par croissance de $\mathbb{P}$ et par croissance de la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$, il vient que la suite $(\mathbb{P}(A_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est également croissante.
- De plus, la suite $(\mathbb{P}(A_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée par 1.

$$\boxed{\text{On en déduit, par théorème de convergence monotone, que la suite } (\mathbb{P}(A_n))_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge.}}$$

□

b) On pose $A_{-1} = \varnothing$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $B_n = A_n \setminus A_{n-1}$. Démontrer que : $\bigcup\limits_{k=0}^{+\infty} A_k = \bigcup\limits_{k=0}^{+\infty} B_k$.

Démonstration.

- Par construction, pour tout entier naturel n : $B_n \subset A_n$. On en déduit que :

$$\bigcup_{k=0}^{+\infty} B_k \subset \bigcup_{k=0}^{+\infty} A_k$$

- Réciproquement, soit $\omega \in \bigcup\limits_{k=0}^{+\infty} A_k$.
  Notons alors k_0 le plus petit entier naturel vérifiant : $\omega \in A_{k_0}$.
  × Si $k_0 = 0$, alors $\omega \in A_0 = B_0$.
  × Si $k_0 \geqslant 1$, alors, par minimalité de k_0, on a $\omega \notin A_{k_0-1}$ et donc $\omega \in B_{k_0}$.
  Dans tous les cas : $\omega \in \bigcup\limits_{k=0}^{+\infty} B_k$. On en déduit que :

$$\bigcup_{k=0}^{+\infty} A_k \subset \bigcup_{k=0}^{+\infty} B_k$$

$$\boxed{\text{On a bien : } \bigcup_{k=0}^{+\infty} A_k = \bigcup_{k=0}^{+\infty} B_k.}$$

□

c) Démontrer que les événements B_k sont deux à deux incompatibles.

Démonstration.
Fixons $i < j$ deux entiers naturels. On a :

$$B_i \cap B_j = (A_i \setminus A_{i-1}) \cap (A_j \setminus A_{j-1})$$

Or, par croissance de la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on a $A_i \subset A_{j-1}$ (on a bien $i \leqslant j-1$) et donc $B_i \cap B_j = \varnothing$.

$$\boxed{\text{Ceci prouve que les événements } B_k \text{ sont deux à deux incompatibles.}}$$

□

d) Conclure que : $\mathbb{P}\left(\bigcup\limits_{k=0}^{+\infty} A_k\right) = \ell$.

Démonstration.
On a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=0}^{+\infty} A_k\right) &= \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=0}^{+\infty} B_k\right) && \textit{(d'après la question } \textbf{5.b)}\textit{)} \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(B_k) && \textit{(par incompatibilité, d'après la question } \textbf{5.c)}\textit{)} \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_k \setminus A_{k-1}) \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_k) - \mathbb{P}(A_{k-1}) && \textit{(car } A_{k-1} \subset A_k\textit{)}
\end{aligned}$$

Soit $N \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{N} \mathbb{P}(A_k) - \mathbb{P}(A_{k-1}) &= \mathbb{P}(A_N) - \mathbb{P}(A_{-1}) && \textit{(par télescopage)} \\ &= \mathbb{P}(A_N) && \textit{(car } A_{-1} = \varnothing \textit{)}\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On en déduit que : } \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=0}^{+\infty} A_k\right) = \lim_{N \to +\infty} \mathbb{P}(A_N) = \ell}$$

□

6. Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante d'événements.

a) Démontrer que la suite $(\mathbb{P}(A_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente. On pose $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}(A_n)$.

Démonstration.

- Tout d'abord, par croissance de $\mathbb{P}$ et par décroissance de la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$, il vient que la suite $(\mathbb{P}(A_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est également décroissante.
- De plus, la suite $(\mathbb{P}(A_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par 0.

$$\boxed{\text{On en déduit, par théorème de convergence monotone, que la suite } (\mathbb{P}(A_n))_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge.}}$$

□

b) On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $C_n = \overline{A_n}$. Démontrer que la suite d'événements (C_n) est croissante.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $\omega \in \Omega$. On a, par décroissance de la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

$$\omega \in A_{n+1} \implies \omega \in A_n$$

et donc, par contraposée :

$$\omega \notin A_n \implies \omega \notin A_{n+1}$$

ce qui se réécrit :

$$\omega \in \overline{A_n} \implies \omega \in \overline{A_{n+1}}$$

ou bien encore :

$$\omega \in C_n \implies \omega \in C_{n+1}$$

$$\boxed{\text{On en déduit que la suite d'événements } (C_n) \text{ est croissante.}}$$

□

c) En déduire que : $\mathbb{P}\left(\bigcup\limits_{k=0}^{+\infty} C_k\right) = 1 - \ell$.

Démonstration.
D'après la question ***5*** (que l'on peut utiliser car la suite d'événements (C_n) est croissante) :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=0}^{+\infty} C_k\right) &= \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(C_n) \\
&= \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(\overline{A_n}) \\
&= \lim_{n\to+\infty} (1-\mathbb{P}(A_n)) \\
&= 1 - \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(A_n) \\
&= 1-\ell
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On a bien : } \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=0}^{+\infty} C_k\right) = 1-\ell.}$$

□

d) Vérifier que : $\overline{\bigcup_{k=0}^{+\infty} C_k} = \bigcap_{k=0}^{+\infty} A_k$.

Démonstration.
D'après les lois de Morgan :

$$\boxed{\overline{\bigcup_{k=0}^{+\infty} C_k} = \bigcap_{k=0}^{+\infty} \overline{C_k} = \bigcap_{k=0}^{+\infty} \overline{\overline{A_k}} = \bigcap_{k=0}^{+\infty} A_k.}$$

□

e) Conclure que : $\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=0}^{+\infty} A_k\right) = \ell$.

Démonstration.
On a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=0}^{+\infty} A_k\right) &= \mathbb{P}\left(\overline{\bigcup_{k=0}^{+\infty} C_k}\right) && \textit{(d'après la question } \textbf{\textit{6.d)}}\textit{)} \\
&= 1-\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=0}^{+\infty} C_k\right) \\
&= 1-(1-\ell) && \textit{(d'après la question } \textbf{\textit{6.c)}}\textit{)} \\
&= \ell
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On a bien : } \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=0}^{+\infty} A_k\right) = \ell.}$$

□

7. Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'événements. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n = \bigcup_{k=0}^{n} A_k$.

a) Démontrer que la suite d'événements (U_n) est croissante.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}$. On remarque que :

$$U_{n+1} = \bigcup_{k=0}^{n+1} A_k = \left(\bigcup_{k=0}^{n} A_k\right) \cup A_{n+1} = U_n \cup A_{n+1}$$

donc $U_n \subset U_{n+1}$.

$$\boxed{\text{On en déduit que la suite d'événements } (U_n) \text{ est croissante.}}$$

$\square$

b) Démontrer que : $\bigcup\limits_{k=0}^{+\infty} U_k = \bigcup\limits_{k=0}^{+\infty} A_k$.

Démonstration.

- Soit $k \in \mathbb{N}$. On pose $U_{-1} = \varnothing$. On remarque que :

$$U_k = \bigcup_{i=0}^{k} A_i = U_{k-1} \cup A_k$$

donc $A_k \subset U_k$. On en déduit que :

$$\bigcup_{i=0}^{+\infty} A_i \subset \bigcup_{i=0}^{+\infty} U_i$$

- Réciproquement, soit $k \in \mathbb{N}$. On a :

$$U_k = \bigcup_{i=0}^{k} A_i \subset \bigcup_{i=0}^{+\infty} A_i$$

On en déduit que :

$$\bigcup_{i=0}^{+\infty} U_i \subset \bigcup_{i=0}^{+\infty} A_i$$

$\square$

c) Conclure que : $\mathbb{P}\left(\bigcup\limits_{k=0}^{+\infty} A_k\right) = \lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\bigcup\limits_{k=0}^{n} A_k\right)$.

Démonstration.
On a :

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=0}^{+\infty} A_k\right) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=0}^{+\infty} U_k\right) \qquad \textit{(d'après la question \textbf{7.b)})}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(U_n) \qquad \textit{(on applique le théorème 1 avec la suite } (U_n)_{n\in\mathbb{N}} \textit{ qui est croissante d'après la question \textbf{7.a)})}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=0}^{n} A_k\right) \qquad \textit{(par définition de } U_n\textit{)}$$

$$\boxed{\text{On a bien : } \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=0}^{+\infty} A_k\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=0}^{n} A_k\right).}$$

$\square$

On **admet** qu'on obtient ensuite $\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=0}^{+\infty} A_k\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=0}^{n} A_k\right)$ en utilisant un passage au complémentaire. On ne demande pas de le faire.

8. *Une application.* On lance une infinité de fois un dé à 6 faces équilibré. On définit, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, l'événement D_k : « le dé tombe sur 6 au k^{e} lancer ». On note A l'événement « le dé ne tombe jamais sur 6 ».

a) Exprimer l'événement A à l'aide des événements D_k.

Démonstration.
On remarque que :

$$\begin{aligned} A \text{ est réalisé } &\iff \text{pour tout } k \in \mathbb{N}^*, \text{ le dé ne tombe pas sur 6 au } k^{\text{e}} \text{ lancer} \\ &\iff \text{pour tout } k \in \mathbb{N}^*, \overline{D_k} \text{ est réalisé} \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On en déduit que : } A = \bigcap_{k=1}^{+\infty} \overline{D_k}.}$$

□

b) Calculer $\mathbb{P}(A)$ à l'aide du théorème de la limite monotone.

Démonstration.
D'après le théorème 2 :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A) &= \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n} \overline{D_k}\right) \\ &= \lim_{n\to+\infty} \prod_{k=1}^{n} \mathbb{P}\left(\overline{D_k}\right) && \textit{(par indépendance des lancers)} \\ &= \lim_{n\to+\infty} \prod_{k=1}^{n} \frac{5}{6} && \textit{(par équiprobabilité)} \\ &= \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{5}{6}\right)^n \\ &= 0 && \textit{(car } \tfrac{5}{6} \in]-1,1[\textit{)} \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On a : } \mathbb{P}(A) = 0.}$$

□

Partie 3 : Lemme de Borel-Cantelli

L'objet de cette partie est de démontrer le lemme de Borel-Cantelli, puis d'en donner deux applications concrètes. Ce lemme sera ensuite utilisé pour étudier certaines séries de variables aléatoires dans la partie 4.

Théorème 3 (Lemme de Borel-Cantelli)**.** *Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'événements. On pose $A = \limsup_n A_n$.*

- *Si la série $\sum \mathbb{P}(A_n)$ converge, alors $\mathbb{P}(A) = 0$ (autrement dit, $\mathbb{P}(\overline{A}) = 1$ et donc il est presque certain que tous les événements $\overline{A_k}$ sont réalisés à partir d'un certain rang).*

- *Si les événements de la suite (A_n) sont indépendants et si la série $\sum \mathbb{P}(A_n)$ diverge, alors $\mathbb{P}(A) = 1$ (autrement dit, il est presque certain qu'il existe une infinité d'indices $k \in \mathbb{N}$ tels que l'événement A_k est réalisé).*

On fixe $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'événements. On pose $A = \limsup\limits_{n} A_n$.

9. On suppose, **dans cette question uniquement**, que la série $\sum \mathbb{P}(A_n)$ converge.

a) Montrer que : $\mathbb{P}(A) = \lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\bigcup\limits_{i=n}^{+\infty} A_i\right)$. *Indication : étudier la monotonie de la suite* $\left(\bigcup\limits_{i=n}^{+\infty} A_i\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

Démonstration.
On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $B_n = \bigcup\limits_{i=n}^{+\infty} A_i$. Soit $n \in \mathbb{N}$. On remarque que :

$$B_n = A_n \cup \left(\bigcup_{i=n+1}^{+\infty} A_i\right) = A_n \cup B_{n+1}$$

On en déduit que $B_{n+1} \subset B_n$ et donc que la suite $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
De plus :

$$A = \limsup_{n} A_n = \bigcap_{n=0}^{+\infty} \bigcup_{k=n}^{+\infty} A_k = \bigcap_{n=0}^{+\infty} B_n$$

$$\boxed{\text{D'après le théorème 1 : } \mathbb{P}(A) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(B_n) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=n}^{+\infty} A_i\right).}$$

□

b) *Inégalité de Boole.* Montrer par récurrence sur $k \geqslant 2$ que si $B_1, \dots, B_k$ sont des événements, alors on a :

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{k} B_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{k} \mathbb{P}(B_i)$$

Démonstration.
Montrons par récurrence : $\forall k \geqslant 2$, $\mathcal{P}(k)$
où $\mathcal{P}(k)$: « pour tout $B_1, \dots, B_k$ des événements, $\mathbb{P}\left(\bigcup\limits_{i=1}^{k} B_i\right) \leqslant \sum\limits_{i=1}^{k} \mathbb{P}(B_i)$ ».
<u>Initialisation</u> :
Soient B_1, B_2 deux événements.

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(B_1 \cup B_2) &= \mathbb{P}(B_1) + \mathbb{P}(B_2) - \mathbb{P}(B_1 \cap B_2) && \textit{(par formule du crible)} \\ &\leqslant \mathbb{P}(B_1) + \mathbb{P}(B_2) && \textit{(car } \mathbb{P}(B_1 \cap B_2) \geqslant 0\textit{)} \end{aligned}$$

D'où $\mathcal{P}(2)$.
<u>Hérédité</u> : soit $k \geqslant 2$. Supposons $\mathcal{P}(k)$. Montrons $\mathcal{P}(k+1)$.

Soient $B_1, \dots, B_{k+1}$ des événements. Notons $C_k = \bigcup\limits_{i=1}^{k} B_i$.

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{k+1} B_i\right) &= \mathbb{P}(C_k \cup B_{k+1}) \\
&= \mathbb{P}(C_k) + \mathbb{P}(B_{k+1}) - \mathbb{P}(C_k \cap B_{k+1}) && \textit{(par formule du crible)} \\
&\leqslant \mathbb{P}(C_k) + \mathbb{P}(B_{k+1}) && \textit{(car } \mathbb{P}(C_k \cap B_{k+1}) \geqslant 0\textit{)} \\
&= \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{k} B_i\right) + \mathbb{P}(B_{k+1}) && \textit{(par définition de } C_k\textit{)} \\
&\leqslant \sum_{i=1}^{k} \mathbb{P}(B_i) + \mathbb{P}(B_{k+1}) && \textit{(par hypothèse de récurrence)} \\
&= \sum_{i=1}^{k+1} \mathbb{P}(B_i)
\end{aligned}$$

D'où $\mathcal{P}(k+1)$.

$$\boxed{\text{On a donc montré par récurrence : pour tout } k \geqslant 2, \text{ si } B_1, \dots, B_k \text{ sont des événements, alors } \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{k} B_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{k} \mathbb{P}(B_i).}$$

□

c) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\mathbb{P}\left(\bigcup\limits_{i=n}^{+\infty} A_i\right) \leqslant \sum\limits_{i=n}^{+\infty} \mathbb{P}(A_i)$.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après le théorème 2 :

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=n}^{+\infty} A_i\right) = \lim_{N \to +\infty} \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=n}^{N} A_i\right)$$

Soit $N \geqslant n$.

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=n}^{N} A_i\right) &\leqslant \sum_{i=n}^{N} \mathbb{P}(A_i) && \textit{(d'après l'inégalité de Boole)} \\
&\leqslant \sum_{i=n}^{+\infty} \mathbb{P}(A_i) && \textit{(car la série } \sum \mathbb{P}(A_n) \textit{ converge)}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On en déduit, par passage à la limite dans les inégalités larges : } \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=n}^{+\infty} A_i\right) \leqslant \sum_{i=n}^{+\infty} \mathbb{P}(A_i).}$$

□

d) Justifier que : $\lim\limits_{n \to +\infty} \sum\limits_{i=n}^{+\infty} \mathbb{P}(A_i) = 0$.

Démonstration.
Posons $S = \sum\limits_{i=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_i)$. Par définition :

$$\lim_{n \to +\infty} \sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{P}(A_i) = S$$

Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$S - \sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{P}(A_i) = \sum_{i=n}^{+\infty} \mathbb{P}(A_i)$$

$$\boxed{\text{On en déduit que : } \lim_{n \to +\infty} \sum_{i=n}^{+\infty} \mathbb{P}(A_i) = S - S = 0.}$$

□

e) En déduire que : $\mathbb{P}(A) = 0$.

Démonstration.
D'après la question ***9.c)***, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$0 \leqslant \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=n}^{+\infty} A_i\right) \leqslant \sum_{i=n}^{+\infty} \mathbb{P}(A_i)$$

(une probabilité est toujours positive).

D'après la question ***9.d)*** : $\lim\limits_{n \to +\infty} \sum\limits_{i=n}^{+\infty} \mathbb{P}(A_i) = 0$.

On en déduit, par théorème d'encadrement, que :

$$\lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=n}^{+\infty} A_i\right) = 0$$

Or, d'après la question ***9.a)*** : $\mathbb{P}(A) = \lim\limits_{n \to +\infty} \mathbb{P}\left(\bigcup\limits_{i=n}^{+\infty} A_i\right)$.

$$\boxed{\text{On en déduit que : } \mathbb{P}(A) = 0.}$$

□

10. On suppose, **dans cette question uniquement**, que les événements de la suite (A_n) sont indépendants et que la série $\sum \mathbb{P}(A_n)$ diverge.

a) Montrer que : $\mathbb{P}(\overline{A}) = \lim\limits_{n \to +\infty} \mathbb{P}\left(\bigcap\limits_{j=n}^{+\infty} \overline{A_j}\right)$.

Démonstration.

- Tout d'abord :

$$\begin{aligned} \overline{A} &= \overline{\limsup_n A_n} \\ &= \liminf_n \overline{A_n} && \textit{(d'après la question } \textbf{\textit{3.b)}}\textit{)} \\ &= \bigcup_{n=0}^{+\infty} \bigcap_{j=n}^{+\infty} \overline{A_j} \end{aligned}$$

- Ensuite, on pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $B_n = \bigcap\limits_{j=n}^{+\infty} \overline{A_j}$, de sorte que :

$$\overline{A} = \bigcup_{n=0}^{+\infty} B_n$$

On remarque que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$B_n = \overline{A_n} \cap B_{n+1}$$

et donc $B_n \subset B_{n+1}$. On en déduit que la suite (B_n) est croissante.

$$\boxed{\text{D'après le théorème 1 : } \mathbb{P}(\overline{A}) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(B_n) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\bigcap_{j=n}^{+\infty} \overline{A_j}\right).}$$

□

b) Justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\mathbb{P}\left(\bigcap\limits_{j=n}^{+\infty} \overline{A_j}\right) = \lim\limits_{N\to+\infty} \mathbb{P}\left(\bigcap\limits_{j=n}^{N} \overline{A_j}\right)$.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\bigcap_{j=n}^{+\infty} \overline{A_j}\right) &= \mathbb{P}\left(\bigcap_{j=0}^{+\infty} \overline{A_{j+n}}\right) && \textit{(par décalage d'indice)} \\
&= \lim_{N\to+\infty} \mathbb{P}\left(\bigcap_{j=0}^{N} \overline{A_{j+n}}\right) && \textit{(d'après le théorème 2)} \\
&= \lim_{N\to+\infty} \mathbb{P}\left(\bigcap_{j=n}^{N} \overline{A_j}\right) && \textit{(par décalage d'indice)}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On a bien, pour tout } n \in \mathbb{N} : \mathbb{P}\left(\bigcap_{j=n}^{+\infty} \overline{A_j}\right) = \lim_{N\to+\infty} \mathbb{P}\left(\bigcap_{j=n}^{N} \overline{A_j}\right).}$$

□

c) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\mathrm{e}^{-x} \geqslant 1 - x$. En déduire que, pour tout entiers naturels $n \leqslant N$:

$$0 \leqslant \mathbb{P}\left(\bigcap_{j=n}^{N} \overline{A_j}\right) \leqslant \exp\left(-\sum_{j=n}^{N} \mathbb{P}(A_j)\right)$$

Démonstration.

- La fonction $f : x \mapsto \mathrm{e}^x$ est convexe sur $\mathbb{R}$. Ainsi, son graphe est en dessous de toutes ses tangentes, en particulier celle en 0, d'équation :

$$y = f'(0)(x - 0) + f(0) = x + 1$$

$$\boxed{\text{On a donc, pour tout } x \in \mathbb{R} : \mathrm{e}^{-x} \leqslant (-x) + 1 = 1 - x.}$$

- Les événements A_j sont indépendants, donc les événements $\overline{A_j}$ également.
  Soit $n \leqslant N$ deux entiers naturels. Par indépendance :

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{j=n}^{N} \overline{A_j}\right) = \prod_{j=n}^{N} \mathbb{P}(\overline{A_j}) = \prod_{j=n}^{N} (1 - \mathbb{P}(A_j))$$

- Pour tout $j \in [\![n, N]\!]$: $0 \leqslant 1 - \mathbb{P}(A_j) \leqslant \exp(-\mathbb{P}(A_j))$. On multiplie ces inégalités pour j variant de n à N :

$$0 \leqslant \prod_{j=n}^{N} (1 - \mathbb{P}(A_j)) \leqslant \prod_{j=n}^{N} \exp(-\mathbb{P}(A_j)) = \exp\left(-\sum_{j=n}^{N} \mathbb{P}(A_j)\right)$$

$$\boxed{\text{On a bien : pour tout entiers naturels } n \leqslant N,\ 0 \leqslant \mathbb{P}\left(\bigcap_{j=n}^{N} \overline{A_j}\right) \leqslant \exp\left(-\sum_{j=n}^{N} \mathbb{P}(A_j)\right).}$$

□

d) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\lim\limits_{N \to +\infty} \mathbb{P}\left(\bigcap\limits_{j=n}^{N} \overline{A_j}\right) = 0$. Conclure.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}$. La série $\sum \mathbb{P}(A_n)$ diverge, or il s'agit d'une série à termes positifs donc :

$$\lim_{N \to +\infty} \sum_{j=n}^{N} \mathbb{P}(A_j) = +\infty$$

Il suit que :

$$\lim_{N \to +\infty} \exp\left(-\sum_{j=n}^{N} \mathbb{P}(A_j)\right) = 0$$

Or, d'après la question ***10.c)***, pour tout entier $N \geqslant n$:

$$0 \leqslant \mathbb{P}\left(\bigcap_{j=n}^{N} \overline{A_j}\right) \leqslant \exp\left(-\sum_{j=n}^{N} \mathbb{P}(A_j)\right)$$

On en déduit, par théorème d'encadrement, que :

$$\lim_{N \to +\infty} \mathbb{P}\left(\bigcap_{j=n}^{N} \overline{A_j}\right) = 0$$

On en déduit, d'après la question ***10.b)***, que :

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{j=n}^{+\infty} \overline{A_j}\right) = 0$$

Ainsi, d'après la question ***10.a)*** :

$$\mathbb{P}(\overline{A}) = \lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}\left(\bigcap_{j=n}^{+\infty} \overline{A_j}\right) = \lim_{n \to +\infty} 0 = 0$$

$$\boxed{\text{On peut alors conclure que } \mathbb{P}(A) = 1.}$$

□

11. *Une première application.* On lance une infinité de fois un dé à 6 faces équilibré. On définit, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, l'événement D_k : « le dé tombe sur 6 au k^{e} lancer ». On définit également, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'événement A_n : « le dé tombe sur 6 à chacun des lancers numéros $n, n+1, \ldots, 2n-1$ ». On pose $A = \limsup\limits_{n} A_n$.

a) Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(A_n)$.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$A_n = \bigcap_{k=n}^{2n-1} D_k$$

On en déduit, par indépendance des lancers :

$$\mathbb{P}(A_n) = \prod_{k=n}^{2n-1} \mathbb{P}(D_k) = \prod_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{6} = \left(\frac{1}{6}\right)^{2n-1-n+1} = \left(\frac{1}{6}\right)^n$$

$$\boxed{\text{On obtient : } \mathbb{P}(A_n) = \left(\frac{1}{6}\right)^n}$$

□

b) Calculer $\mathbb{P}(A)$ à l'aide du lemme de Borel-Cantelli.

Démonstration.
La série $\sum \left(\frac{1}{6}\right)^n$ est une série géométrique de raison $\frac{1}{6} \in]-1,1[$ et donc converge.
On en déduit, d'après la question ***11.a)***, que la série $\sum \mathbb{P}(A_n)$ converge.

$$\boxed{\text{D'après le lemme de Borel-Cantelli, on peut conclure que } \mathbb{P}(A) = 0.}$$

□

12. *Une deuxième application.* On lance une infinité de fois un dé à 6 faces équilibré. On dit que le motif `double` 6 apparaît au rang $n \in \mathbb{N}^*$ si le dé tombe sur 6 aux lancers numéros n et $n+1$. On définit, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'événement A_n : « le motif `double` 6 apparaît au rang $2n$ ». On pose $A = \limsup\limits_{n} A_n$. On définit l'événement B : « le motif `double` 6 apparaît une infinité de fois ».

a) Calculer $\mathbb{P}(A)$.

Démonstration.

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a $A_n = D_{2n} \cap D_{2n+1}$ (en réutilisant les notations de la question ***11***). On en déduit, par indépendance des lancers : $\mathbb{P}(A_n) = \frac{1}{6^2}$. Par suite, la série $\sum \mathbb{P}(A_n)$ diverge (grossièrement puisque son terme général est constant et non nul).
- On remarque que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la réalisation de l'événement A_n dépend uniquement des résultats des lancers numéros $2n$ et $2n+1$. De plus, si $k \neq n$, alors la réalisation de l'événement A_k ne dépend pas des lancers $2n$ et $2n+1$ (on a $\{2n, 2n+1\} \cap \{2k, 2k+1\} = \varnothing$). On en déduit, par indépendance des lancers et par lemme des coalitions, que les événements de la famille $(A_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ sont indépendants.

$$\boxed{\text{D'après le lemme de Borel-Cantelli, on peut conclure que } \mathbb{P}(A) = 1.}$$

□

b) Comparer les événements A et B. En déduire $\mathbb{P}(B)$.

Démonstration.
Si l'événement A est réalisé, alors il existe une infinité d'indices $n \in \mathbb{N}^*$ tels que A_n est réalisé (d'après la question ***1***) et donc le motif `double` 6 apparaît à une infinité de rangs pairs. A fortiori, le motif `double` 6 apparaît une infinité de fois et donc l'événement B est réalisé.

On en déduit : $A \subset B$.

Par croissance de l'application $\mathbb{P}$, il vient : $1 \leqslant \mathbb{P}(B)$. Or on sait que $\mathbb{P}(B) \leqslant 1$.

On peut conclure que $\mathbb{P}(B) = 1$.

□

Partie 4 : Étude de quelques séries de variables aléatoires

13. On considère dans cette question une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de variables aléatoires suivant toutes la même loi (appelée *loi de Rademacher*) définie ci-dessous :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \mathbb{P}([X_n = 1]) = \frac{1}{2} \qquad \text{et} \qquad \mathbb{P}([X_n = -1]) = \frac{1}{2}.$$

a) Écrire une fonction **Python** `rademacher()` qui simule une variable aléatoire suivant la loi de Rademacher.

Démonstration.

```
def rademacher():
    if rd.random() < 1/2:
        return 1
    else:
        return -1
```

□

b) Soit $\omega \in \Omega$. Expliquer pourquoi la série $\sum X_n(\omega)$ diverge.

Démonstration.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n(\omega) \in \{-1, 1\}$. On en déduit que la suite $(X_n(\omega))_{n\in\mathbb{N}}$ ne tend pas vers 0.

La série $\sum X_n(\omega)$ diverge grossièrement.

□

c) En déduire que la série de variables aléatoires $\sum X_n$ diverge presque-sûrement.

Démonstration.
D'après la question ***13.b)***, $A_{\text{dv}} = \Omega$. On en déduit que $\mathbb{P}(A_{\text{dv}}) = 1$.

La série de variables aléatoires $\sum X_n$ diverge presque-sûrement.

□

14. Soit (X_n) une suite de variables aléatoires. On pose $A_0 = \liminf\limits_{n} [X_n = 0]$.

a) Exprimer à l'aide d'une phrase l'événement A_0.

Démonstration.
D'après la question ***2*** :

A_0 : « toutes les variables aléatoires X_n prennent la valeur 0 à partir d'un certain rang »

$\square$

b) Démontrer : $A_0 \subset A_{\text{cv}}$.

Démonstration.
Soit $\omega \in A_0$. D'après la question ***14.a)***, il existe un entier $m \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $k \geqslant m$, $X_k(\omega) = 0$. Fixons un tel entier m.
Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant m$. On a :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} X_k(\omega) &= \sum_{k=0}^{m-1} X_k(\omega) + \sum_{k=m}^{n} X_k(\omega) && \textit{(par relation de Chasles)} \\
&= \sum_{k=0}^{m-1} X_k(\omega) && \textit{(tous les termes de la deuxième somme étant nuls)}
\end{aligned}$$

Le terme de droite ne dépend pas de n. On en déduit que la suite des sommes partielles $\left(\sum\limits_{k=0}^{n} X_k(\omega)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante à partir du rang m. A fortiori, cette suite converge et

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} X_k(\omega) = \sum_{k=0}^{m-1} X_k(\omega)$$

On en déduit que $\omega \in A_{\text{cv}}$.

D'où : $A_0 \subset A_{\text{cv}}$.

$\square$

c) Conclure que : si $\mathbb{P}(A_0) = 1$, alors la série de variables aléatoires $\sum X_n$ converge presque-sûrement.

Démonstration.
Supposons que : $\mathbb{P}(A_0) = 1$.
D'après la question précédente, $A_0 \subset A_{\text{cv}}$ et donc, par croissance de l'application $\mathbb{P}$, on a : $1 = \mathbb{P}(A_0) \leqslant \mathbb{P}(A_{\text{cv}})$. On en déduit que $\mathbb{P}(A_{\text{cv}}) = 1$.

Par définition, on peut conclure que la série de variables aléatoires $\sum X_n$ converge presque-sûrement.

$\square$

15. On considère dans cette question une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de variables aléatoires définie par récurrence : $X_0 \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

- la loi conditionnelle de X_{n+1} sachant $[X_n = 1]$ est la loi de Bernoulli de paramètre p ;
- la loi conditionnelle de X_{n+1} sachant $[X_n = 0]$ est la loi certaine égale à 0.

On **admet** que cette suite de variables aléatoires est bien définie et en particulier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}([X_n = 0]) \neq 0$ et $\mathbb{P}([X_n = 1]) \neq 0$.

a) Recopier et compléter la fonction **Python** `markovBernoulli(n, p)` écrite ci-dessous. Cette fonction prend en paramètres d'entrée un entier naturel n et un réel $p \in]0,1[$, simule les variables aléatoires $X_0, \dots, X_n$ et renvoie la liste $[X_0, \dots, X_n]$. On rappelle que la commande `rd.binomial(1,p)` simule une variable aléatoire qui suit la loi de Bernoulli de paramètre p.

```
def markovBernoulli(n, p):
    L = []
    X = ...
    L.append(X)
    for k in ...:
        if ...:
            X = ...
        else:
            X = ...
        L.append(X)
    return L
```

Démonstration.
On propose de compléter la fonction de la manière suivante :

```
def markovBernoulli(n, p):
    L = []
    X = rd.binomial(1,p)
    L.append(X)
    for k in range(n):
        if X == 1:
            X = rd.binomial(1,p)
        else:
            X = 0
        L.append(X)
    return L
```

□

b) On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \mathbb{P}([X_n = 1])$. Déterminer une relation de récurrence liant u_{n+1} et u_n puis en déduire une expression simple de u_n valable pour tout entier naturel n.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}$. On applique la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements associé à X_n :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}([X_{n+1} = 1]) &= \mathbb{P}([X_{n+1} = 1] \cap [X_n = 0]) + \mathbb{P}([X_{n+1} = 1] \cap [X_n = 1]) \\ &= \mathbb{P}([X_n = 0])\mathbb{P}_{[X_n=0]}([X_{n+1} = 1]) + \mathbb{P}([X_n = 1])\mathbb{P}_{[X_n=1]}([X_{n+1} = 1])\end{aligned}$$

(car $\mathbb{P}([X_n = 0]) \neq 0$ et $\mathbb{P}([X_n = 1]) \neq 0$)

$$= \mathbb{P}([X_n = 0]) \times 0 + \mathbb{P}([X_n = 1]) \times p$$

$$\boxed{\text{On en déduit que, pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = p u_n.}$$

La suite (u_n) est donc géométrique, de raison p. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n = u_0 p^n$$

De plus, $X_0 \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$ donc $u_0 = p$.

$$\boxed{\text{Finalement : pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_n = p^{n+1}.}$$

□

c) ***(i)*** Justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $[X_n = 1] = \bigcap\limits_{k=0}^{n} [X_k = 1]$.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}$.

- Tout d'abord :

$$\bigcap_{k=0}^{n} [X_k = 1] = \left(\bigcap_{k=0}^{n-1} [X_k = 1]\right) \cap [X_n = 1] \subset [X_n = 1]$$

- Réciproquement, montrons que $[X_n = 1] \subset \bigcap\limits_{k=0}^{n} [X_k = 1]$. Ceci revient à montrer que :

$$\overline{\bigcap_{k=0}^{n} [X_k = 1]} \subset \overline{[X_n = 1]}$$

Or :

$$\overline{[X_n = 1]} = [X_n = 0]$$

et

$$\overline{\bigcap_{k=0}^{n} [X_k = 1]} = \bigcup_{k=0}^{n} \overline{[X_k = 1]} = \bigcup_{k=0}^{n} [X_k = 0]$$

Soit $k \in [\![0, n]\!]$. Rappelons que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la loi conditionnelle de X_{n+1} sachant $[X_n = 0]$ est la loi certaine égale à 0. On en déduit (par récurrence finie immédiate) que :

$$[X_k = 0] \subset [X_{k+1} = 0] \subset \cdots \subset [X_n = 0]$$

D'où :

$$\bigcup_{k=0}^{n} [X_k = 0] \subset [X_n = 0]$$

et donc :

$$[X_n = 1] \subset \bigcap_{k=0}^{n} [X_k = 1]$$

$$\boxed{\text{On a démontré par double inclusion que, pour tout } n \in \mathbb{N} : [X_n = 1] = \bigcap_{k=0}^{n} [X_k = 1].}$$

□

(ii) Retrouver l'expression de u_n à l'aide de cette formule.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après la question ***15.c)(i)***), on a : $[X_0 = 1] \cap \cdots \cap [X_{n-1} = 1] = [X_{n-1} = 1]$.
Ainsi : $\mathbb{P}\left([X_0 = 1] \cap \cdots \cap [X_{n-1} = 1]\right) = \mathbb{P}([X_{n-1} = 1]) \neq 0$ d'après l'énoncé. D'après la formule des probabilités composées (valable d'après ce qui précède) :

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=0}^{n} [X_k = 1]\right) \\
&= \mathbb{P}([X_0 = 1])\mathbb{P}_{[X_0=1]}([X_1 = 1]) \dots \mathbb{P}_{[X_0=1]\cap\cdots\cap[X_{n-1}=1]}([X_n = 1]) \\
&= \mathbb{P}([X_0 = 1])\mathbb{P}_{[X_0=1]}([X_1 = 1]) \dots \mathbb{P}_{[X_{n-1}=1]}([X_n = 1]) && \textit{(d'après \textbf{15.c)(i)})} \\
&= \mathbb{P}([X_0 = 1]) \prod_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}_{[X_k=1]}([X_{k+1} = 1]) \\
&= p \prod_{k=0}^{n-1} p \\
&= p^{n+1}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{D'après la question } \textbf{\textit{15.c)(i)}}\text{), on peut conclure que, pour tout } n \in \mathbb{N} : u_n = p^{n+1}.}$$

□

(iii) Soit $(n, m) \in \mathbb{N}^2$ tel que $n < m$. Les variables aléatoires X_n et X_m sont-elles indépendantes ?

Démonstration.

- Tout d'abord :

$$\begin{aligned}
[X_n = 1] \cap [X_m = 1] &= \left(\bigcap_{k=0}^{n} [X_k = 1]\right) \cap \left(\bigcap_{k=0}^{m} [X_k = 1]\right) && \textit{(d'après \textbf{15.c)(i)})} \\
&= \bigcap_{k=0}^{m} [X_k = 1] && \textit{(car } n < m\textit{)} \\
&= [X_m = 1] && \textit{(d'après \textbf{15.c)(i)})}
\end{aligned}$$

  D'où :

$$\mathbb{P}([X_n = 1] \cap [X_m = 1]) = \mathbb{P}([X_m = 1]) = u_m = p^{m+1} \qquad \textit{(d'après la question \textbf{15.b)})}$$

- Or, toujours d'après la question ***15.b)***, on a :

$$\mathbb{P}([X_n = 1])\mathbb{P}([X_m = 1]) = p^{n+1}p^{m+1}$$

On en déduit que :

$$\mathbb{P}([X_n = 1] \cap [X_m = 1]) \neq \mathbb{P}([X_n = 1])\mathbb{P}([X_m = 1])$$

puisque $n + 1 \geqslant 1$ et donc $p^{n+1} \neq 1$.

$$\boxed{\text{Les variables aléatoires } X_n \text{ et } X_m \text{ ne sont pas indépendantes.}}$$

□

d) ***(i)*** Quelle est la monotonie de la suite d'événements $([X_n = 0])_{n\in\mathbb{N}}$?

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que l'événement $[X_n = 0]$ est réalisé. Rappelons que la loi conditionnelle de X_{n+1} sachant $[X_n = 0]$ est la loi certaine égale à 0. On en déduit que X_{n+1} prend la valeur 0 et donc que $[X_{n+1} = 0]$ est réalisé.
D'où :

$$[X_n = 0] \subset [X_{n+1} = 0]$$

$$\boxed{\text{La suite d'événements } ([X_n = 0])_{n\in\mathbb{N}} \text{ est croissante.}}$$

□

(ii) En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, une simplification de $\bigcap\limits_{k=n}^{+\infty} [X_k = 0]$.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}$.

- Tout d'abord :

$$\bigcap_{k=n}^{+\infty} [X_k = 0] = [X_n = 0] \cap \left(\bigcap_{k=n+1}^{+\infty} [X_k = 0] \right) \subset [X_n = 0]$$

- Réciproquement, la suite $([X_n = 0])_{n\in\mathbb{N}}$ étant croissante, il vient que :

$$\forall k \geqslant n, \; [X_n = 0] \subset [X_k = 0]$$

et donc :

$$[X_n = 0] \subset \bigcap_{k=n}^{+\infty} [X_k = 0]$$

$$\boxed{\text{Finalement : } \bigcap_{k=n}^{+\infty} [X_k = 0] = [X_n = 0].}$$

□

(iii) On pose $A_0 = \liminf\limits_{n} [X_n = 0]$. Calculer $\mathbb{P}(A_0)$.

Démonstration.
D'après la question ***15.d)(ii)*** :

$$\liminf_{n} [X_n = 0] = \bigcup_{n=0}^{+\infty} \bigcap_{k=n}^{+\infty} [X_k = 0] = \bigcup_{n=0}^{+\infty} [X_n = 0]$$

De plus, la suite d'événements $([X_n = 0])_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante (d'après la question ***15.d)(i)***) et donc, d'après le théorème 1 :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} [X_n = 0] \right) &= \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}([X_n = 0]) \\
&= \lim_{n\to+\infty} 1 - u_n && \textit{(par définition de } u_n\textit{)} \\
&= \lim_{n\to+\infty} 1 - p^n && \textit{(d'après la question } \textbf{15.b)}\textit{)} \\
&= 1 && \textit{(car } p \in]0,1[\textit{)}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On peut alors conclure que : } \mathbb{P}(A_0) = 1.}$$

□

(iv) Que peut-on conclure sur la série de variables aléatoires $\sum X_n$?

Démonstration.

D'après la question ***14.c)***, la série de variables aléatoires $\sum X_n$ converge presque-sûrement.

□

16. On considère dans cette question une suite $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires indépendantes suivant toutes la loi géométrique de paramètre p. Soit α un réel fixé. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $X_n = \dfrac{Y_n}{n^\alpha}$.
On étudie la convergence de la série de variables aléatoires $\sum X_n$ suivant la valeur de α.

a) On suppose, **dans cette question uniquement**, que $\alpha \leqslant 1$. Montrer que la série de variables aléatoires $\sum X_n$ diverge presque-sûrement.

Démonstration.
Soit $\omega \in \Omega$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
On remarque que $Y_n(\Omega) = \mathbb{N}^*$ donc $Y_n(\omega) \geqslant 1$ donc $X_n(\omega) \geqslant \dfrac{1}{n^\alpha}$ (car $n^\alpha > 0$).
Ainsi :

- pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leqslant \dfrac{1}{n^\alpha} \leqslant X_n(\omega)$
- la série $\sum \dfrac{1}{n^\alpha}$ diverge par critère de Riemann

Par critère de comparaison pour les séries à termes positifs, on en déduit que la série $\sum X_n(\omega)$ diverge également.
D'où $A_{\text{dv}} = \Omega$ et, a fortiori, $\mathbb{P}(A_{\text{dv}}) = 1$.

La série de variables aléatoires $\sum X_n$ diverge presque-sûrement.

□

b) On suppose, **dans cette question uniquement**, que $\alpha > 2$.

(i) Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$: $\mathbb{P}([Y_k > k]) = q^k$. *(On rappelle que $q = 1 - p$)*

Démonstration.
Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$[Y_k > k] = \bigcup_{i=k+1}^{+\infty} [Y_k = i]$$

et donc, par incompatibilité :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([Y_k > k]) &= \sum_{i=k+1}^{+\infty} \mathbb{P}([Y_k = i]) \\
&= \sum_{i=k+1}^{+\infty} pq^{i-1} && \textit{(car } Y_k \hookrightarrow \mathcal{G}(p) \textit{ et } i \in \mathbb{N}^*\textit{)} \\
&= p\sum_{i=0}^{+\infty} q^{i+k} && \textit{(décalage d'indice)} \\
&= pq^k \sum_{i=0}^{+\infty} q^i \\
&= pq^k \frac{1}{1-q} && \textit{(somme géométrique de raison } q \in]-1,1[\textit{)} \\
&= q^k && \textit{(car } 1-q=p\textit{)}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Pour tout } k \in \mathbb{N}^* : \mathbb{P}([Y_k > k]) = q^k.}$$

□

(ii) On pose $A = \limsup\limits_k [Y_k > k]$. Montrer que, pour tout $\omega \in \overline{A}$, la série $\sum X_n(\omega)$ est convergente.

Démonstration.
Soit $\omega \in \overline{A}$. D'après la question ***3.b)*** :

$$\overline{A} = \liminf_k \overline{[Y_k > k]} = \liminf_k [Y_k \leqslant k]$$

D'après la question ***2***, il existe un rang $k_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que, pour tout entier $k \geqslant k_0$, on a : $Y_k(\omega) \leqslant k$.
Ainsi :

- pour tout $k \geqslant k_0$, $0 \leqslant X_k(\omega) \leqslant \dfrac{k}{k^\alpha} = \dfrac{1}{k^{\alpha-1}}$
- la série $\sum \dfrac{1}{k^{\alpha-1}}$ converge par critère de Riemann (on a $\alpha > 2$ donc $\alpha - 1 > 1$)

Par critère de comparaison pour les séries à termes positifs, on en déduit que la série $\sum X_n(\omega)$ converge également.

□

(iii) En déduire que la série de variables aléatoires $\sum X_n$ converge presque-sûrement.

Démonstration.
D'après la question ***16.b)(i)***, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$: $\mathbb{P}([Y_k > k]) = q^k$.
De plus, la série $\sum q^k$ converge en tant que série géométrique de raison $q \in]-1,1[$.
On en déduit que la série $\sum \mathbb{P}([Y_k > k])$ est convergente.
D'après le lemme de Borel-Cantelli : $\mathbb{P}(A) = 0$ et donc $\mathbb{P}(\overline{A}) = 1$.
Or, d'après la question ***16.b)(ii)***, $\overline{A} \subset A_{\text{dv}}$. D'où : $\mathbb{P}(A_{\text{dv}}) = 1$.

La série de variables aléatoires $\sum X_n$ converge presque-sûrement.

□

c) Écrire une fonction **Python** `sommePartielle(n, p, alpha)` qui prend en entrée un entier naturel `n` non nul, un réel $p \in]0,1[$ et un réel `alpha` et qui renvoie une simulation de la variable aléatoire $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} X_k$.

Démonstration.
On propose la fonction suivante :

```
def sommePartielle(n, p, alpha):
    S = 0
    for k in range(1, n+1):
        Y = rd.geometric(p)
        S = S + Y / (k**alpha)
    return S
```

□

17. On considère dans cette question une suite d'urnes $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'urne U_n contient $2n$ boules numérotées de 1 à $2n$. L'expérience aléatoire consiste à faire deux tirages successifs et **sans** remise dans chacune de ces urnes. On note, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $T_{n,1}$ (resp. $T_{n,2}$) la variable aléatoire égale au numéro de la boule obtenue au premier (resp. second) tirage effectué dans l'urne U_n. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $X_n = |T_{n,1} - T_{n,2}|$.

a) Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $T_{n,1}(\Omega)$, $T_{n,2}(\Omega)$ et $X_n(\Omega)$.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- Par équiprobabilité : $T_{n,1} \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1, 2n]\!])$.

  $$\boxed{\text{D'où : } T_{n,1}(\Omega) = [\![1, 2n]\!].}$$

- Soit $k \in [\![1, 2n]\!]$. Si on a pioché la boule numéro k au premier tirage, alors on peut obtenir au second tirage n'importe quel numéro parmi les numéros $1, 2, \dots, k-1, k+1, \dots, 2n$.

  $$\boxed{\text{D'où : } T_{n,2}(\Omega) = \bigcup_{k=1}^{2n} \big([\![1, 2n]\!] \setminus \{k\}\big) = [\![1, 2n]\!].}$$

- Les deux tirages se faisant sans remise, les variables aléatoires $T_{n,1}$ et $T_{n,2}$ ne peuvent pas prendre la même valeur. Ainsi, X_n ne peut pas prendre la valeur 0 et donc la plus petite valeur possible pour X_n est 1 (atteinte par exemple lorsque l'on pioche la boule numéro 1 au premier tirage puis la boule numéro 2 au second tirage).

  La plus grande valeur pour X_n est obtenue lorsque, par exemple, on pioche la boule numéro 1 au premier tirage puis la boule numéro $2n$ au second tirage. Dans ce cas, X_n prend la valeur $2n - 1$.

  Toutes les valeurs intermédiaires sont possibles (on pioche par exemple la boule numéro 1 au premier tirage puis la boule numéro $i \in [\![3, 2n-1]\!]$ au second tirage).

  $$\boxed{\text{D'où : } X_n(\Omega) = [\![1, 2n-1]\!].}$$

□

b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $(i, j) \in T_{n,1}(\Omega) \times T_{n,2}(\Omega)$. Calculer $\mathbb{P}([T_{n,1} = i] \cap [T_{n,2} = j])$.

Démonstration.
Distinguons deux cas.

- Premier cas : $i = j$.
  Alors $[T_{n,1} = i] \cap [T_{n,2} = j] = \varnothing$ car les tirages se font sans remise.
  $$\boxed{\text{D'où : } \mathbb{P}([T_{n,1} = i] \cap [T_{n,2} = i]) = 0}$$
- Deuxième cas : $i \neq j$.
  On sait que $\mathbb{P}([T_{n,1} = i]) = \dfrac{1}{2n} \neq 0$ (car $T_{n,1} \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1, 2n]\!])$) donc :
  $$\mathbb{P}([T_{n,1} = i] \cap [T_{n,2} = j]) = \mathbb{P}([T_{n,1} = i])\mathbb{P}_{[T_{n,1}=i]}([T_{n,2} = j]) = \frac{1}{2n}\mathbb{P}_{[T_{n,1}=i]}([T_{n,2} = j])$$
  Si l'événement $[T_{n,1} = i]$ est réalisé, alors c'est que l'on a tiré la boule numéro i au premier tirage. Ainsi, le second tirage s'effectue dans une urne contenant $2n - 1$ boules, numérotées $1, \dots, i - 1, i + 1, \dots, 2n$. Par équiprobabilité :
  $$\mathbb{P}_{[T_{n,1}=i]}([T_{n,2} = j]) = \frac{1}{2n - 1}$$
  $$\boxed{\text{D'où : } \mathbb{P}([T_{n,1} = i] \cap [T_{n,2} = j]) = \frac{1}{2n(2n - 1)}}$$

$\square$

c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $k \in X_n(\Omega)$. Démontrer que :
$$\mathbb{P}([X_n = k]) = \frac{2n - k}{n(2n - 1)}$$

Démonstration.
On applique la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements associé à $T_{n,1}$:

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}([X_n = k]) \\
&= \sum_{i=1}^{2n} \mathbb{P}([X_n = k] \cap [T_{n,1} = i]) \\
&= \sum_{i=1}^{2n} \mathbb{P}([|i - T_{n,2}| = k] \cap [T_{n,1} = i]) \\
&= \sum_{i=1}^{2n} \mathbb{P}(([T_{n,2} = i - k] \cup [T_{n,2} = i + k]) \cap [T_{n,1} = i]) \\
&= \sum_{i=1}^{2n} \left(\mathbb{P}([T_{n,2} = i - k] \cap [T_{n,1} = i]) + \mathbb{P}([T_{n,2} = i + k] \cap [T_{n,1} = i])\right) && \textit{(par incompatibilité)} \\
&= \sum_{i=k+1}^{2n} \mathbb{P}([T_{n,2} = i - k] \cap [T_{n,1} = i]) + \sum_{i=1}^{2n-k} \mathbb{P}([T_{n,2} = i + k] \cap [T_{n,1} = i])
\end{aligned}$$

(car $i - k \geqslant 1 \iff i \geqslant k+1$ *et* $i+k \leqslant 2n \iff i \leqslant 2n-k$*)*

$$= \sum_{i=k+1}^{2n} \frac{1}{2n(2n-1)} + \sum_{i=1}^{2n-k} \frac{1}{2n(2n-1)} \qquad \textit{(d'après la question } \textbf{\textit{17.b)}}\textit{)}$$

$$= \frac{1}{2n(2n-1)}(2n-(k+1)+1) + \frac{1}{2n(2n-1)}(2n-k-1+1)$$

$$= \frac{2(2n-k)}{2n(2n-1)}$$

$$= \frac{(2n-k)}{n(2n-1)}$$

$$\boxed{\text{On a bien : } \mathbb{P}([X_n = k]) = \frac{2n-k}{n(2n-1)}.}$$

□

d) ***(i)*** Soit $k \in \mathbb{N}^*$ fixé. Déterminer la nature de la série $\sum\limits_{n \geqslant 1} \mathbb{P}([X_n = k])$.

Démonstration.
Pour tout $n \geqslant k$, $k \in X_n(\Omega)$ et donc, d'après la question ***17.c)*** :

$$\mathbb{P}([X_n = k]) = \frac{2n-k}{n(2n-1)}$$

Ainsi :

- pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}([X_n = k]) \geqslant 0$ et $\dfrac{1}{n} \geqslant 0$
- $\mathbb{P}([X_n = k]) \underset{n \to +\infty}{\sim} \dfrac{2n}{2n^2} = \dfrac{1}{n}$
- la série $\sum \dfrac{1}{n}$ diverge par critère de Riemann

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{On en déduit, par critère d'équivalence sur les séries à termes positifs,} \\ \text{que la série } \sum\limits_{n \geqslant 1} \mathbb{P}([X_n = k]) \text{ diverge.}\end{array}}$$

□

(ii) On pose $A = \limsup\limits_{n} \, [X_n = 1]$. Calculer $\mathbb{P}(A)$ puis en déduire que, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, la série de variables aléatoires $\sum \dfrac{1}{X_n^{\alpha}}$ diverge presque-sûrement.

Démonstration.

- Les tirages dans des urnes différentes sont indépendants, on en déduit que les variables aléatoires $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ sont mutuellement indépendantes. Ainsi, les événements $[X_n = 1]$ sont indépendants.
- La série $\sum \mathbb{P}([X_n = 1])$ diverge d'après la question ***17.d)(i)***. D'après le lemme de Borel-Cantelli : $\mathbb{P}(A) = 1$.

- Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Soit $\omega \in A$. D'après la question ***1***, il existe une infinité d'indices $n \in \mathbb{N}^*$ tels que $[X_n = 1]$ est réalisé, autrement dit tels que $X_n(\omega) = 1$. On en déduit qu'il existe une infinité d'indices $n \in \mathbb{N}^*$ tels que $\dfrac{1}{X_n(\omega)^\alpha} = 1$. Ceci implique que la suite $\left(\dfrac{1}{X_n(\omega)^\alpha}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ne converge pas vers 0 et donc la série $\sum \dfrac{1}{X_n(\omega)^\alpha}$ diverge grossièrement.
  Ainsi : $A \subset A_{\text{dv}}$ et donc $\mathbb{P}(A_{\text{dv}}) = 1$.

$$\boxed{\text{On peut conclure que, pour tout } \alpha \in \mathbb{R}, \text{ la série de variables aléatoires } \sum \frac{1}{X_n^\alpha} \text{ diverge presque-sûrement.}}$$

□

Partie 5 : Théorème de Kolmogorov

L'objet de cette partie est de démontrer le théorème de Kolmogorov, puis d'en donner une application.

Théorème 4 (Théorème de Kolmogorov)**.** *Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires discrètes indépendantes admettant chacune un moment d'ordre 2. On suppose que toutes les variables aléatoires X_n sont d'espérance nulle et que la série $\sum \mathbb{V}(X_n)$ converge. Alors la série de variables aléatoires $\sum X_n$ converge presque-sûrement.*

On fixe une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant les hypothèses du théorème de Kolmogorov.
On rappelle que $A_{\text{cv}} = \{\omega \in \Omega \mid \sum X_n(\omega) \text{ converge}\}$ et que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} X_k$.
On définit, pour tout $(n, N) \in \mathbb{N}^2$, l'événement :

$$C(N, n) = \bigcap_{i=n}^{+\infty} \bigcap_{j=n}^{+\infty} \left[\, |S_i - S_j| \leqslant 2^{-N} \,\right]$$

On **admet** que l'on peut réécrire l'événement A_{cv} de la manière suivante :

$$\begin{aligned} A_{\text{cv}} &= \{\omega \in \Omega \mid \forall N \in \mathbb{N}, \exists n \in \mathbb{N}, \forall i \geqslant n, \forall j \geqslant n, |S_i(\omega) - S_j(\omega)| \leqslant 2^{-N}\} \\ &= \bigcap_{N=0}^{+\infty} \bigcup_{n=0}^{+\infty} C(N, n) \end{aligned}$$

18. a) Soit B un événement. Déterminer la loi de $\mathbb{1}_B$ puis en déduire que : $\mathbb{E}(\mathbb{1}_B) = \mathbb{P}(B)$.

Démonstration.
On remarque tout d'abord que $\mathbb{1}_B(\Omega) = \{0, 1\}$. Ainsi, $\mathbb{1}_B \hookrightarrow \mathcal{B}(\beta)$ où $\beta = \mathbb{P}([\mathbb{1}_B = 1])$.
Or, par définition de $\mathbb{1}_B$:

$$\mathbb{P}([\mathbb{1}_B = 1]) = \mathbb{P}(B)$$

$$\boxed{\text{On peut conclure que } \mathbb{1}_B \hookrightarrow \mathcal{B}(\mathbb{P}(B)) \text{ et il suit que } \mathbb{E}(\mathbb{1}_B) = \mathbb{P}(B).}$$

□

b) Soient B_1 et B_2 deux événements incompatibles. Montrer que : $\mathbb{1}_{B_1} + \mathbb{1}_{B_2} = \mathbb{1}_{B_1 \cup B_2}$.

Démonstration.
Soit $\omega \in \Omega$. Puisque B_1 et B_2 sont incompatibles, on a la disjonction de cas suivante :

- Premier cas : $\omega \notin B_1 \cup B_2$.
  Alors $\mathbb{1}_{B_1}(\omega) = \mathbb{1}_{B_2}(\omega) = \mathbb{1}_{B_1 \cup B_2}(\omega) = 0$ et donc $(\mathbb{1}_{B_1} + \mathbb{1}_{B_2})(\omega) = 0 = \mathbb{1}_{B_1 \cup B_2}(\omega)$.
- Deuxième cas : $\omega \in B_1$ (et donc $\omega \notin B_2$).
  Alors $\mathbb{1}_{B_1}(\omega) = \mathbb{1}_{B_1 \cup B_2}(\omega) = 1$ et $\mathbb{1}_{B_2}(\omega) = 0$. D'où : $(\mathbb{1}_{B_1} + \mathbb{1}_{B_2})(\omega) = 1 = \mathbb{1}_{B_1 \cup B_2}(\omega)$.
- Troisième cas : $\omega \in B_2$ (et donc $\omega \notin B_1$).
  Alors $\mathbb{1}_{B_2}(\omega) = \mathbb{1}_{B_1 \cup B_2}(\omega) = 1$ et $\mathbb{1}_{B_1}(\omega) = 0$. D'où : $(\mathbb{1}_{B_1} + \mathbb{1}_{B_2})(\omega) = 1 = \mathbb{1}_{B_1 \cup B_2}(\omega)$.

$$\boxed{\text{On a bien : } \mathbb{1}_{B_1} + \mathbb{1}_{B_2} = \mathbb{1}_{B_1 \cup B_2}.}$$

□

c) Soit B un événement et soit Z une variable aléatoire discrète admettant une espérance.
Démontrer que la variable aléatoire $Z\,\mathbb{1}_B$ admet également une espérance.
(Indication : on notera pour cette preuve $Z(\Omega) \subset \{x_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ où $x_0 = 0$ et $x_i \neq 0$ pour $i \geqslant 1$. On comparera $\mathbb{P}([Z\,\mathbb{1}_B = x_i])$ avec $\mathbb{P}([Z = x_i])$ pour $i \geqslant 1$.)

Démonstration.
Tout d'abord, on a également $(Z\,\mathbb{1}_B)(\Omega) \subset \{x_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ (puisque $\mathbb{1}_B$ ne peut prendre que les valeurs 0 et 1).
Ainsi, la variable aléatoire $Z\,\mathbb{1}_B$ (qui est discrète) admet une espérance si et seulement si la série $\sum x_i \mathbb{P}([Z\,\mathbb{1}_B = x_i])$ converge absolument.
Soit $i \geqslant 1$. D'après la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $([\mathbb{1}_B = 0], [\mathbb{1}_B = 1])$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([Z\,\mathbb{1}_B = x_i]) &= \mathbb{P}([Z\,\mathbb{1}_B = x_i] \cap [\mathbb{1}_B = 0]) + \mathbb{P}([Z\,\mathbb{1}_B = x_i] \cap [\mathbb{1}_B = 1]) \\
&= \mathbb{P}([0 = x_i] \cap [\mathbb{1}_B = 0]) + \mathbb{P}([Z = x_i] \cap [\mathbb{1}_B = 1]) \\
&= \mathbb{P}([Z = x_i] \cap [\mathbb{1}_B = 1]) && \textit{(car } x_i \neq 0\textit{)}
\end{aligned}$$

Or, $[Z = x_i] \cap [\mathbb{1}_B = 1] \subset [Z = x_i]$ donc, par croissance de $\mathbb{P}$:

$$\mathbb{P}([Z\,\mathbb{1}_B = x_i]) \leqslant \mathbb{P}([Z = x_i])$$

Ainsi :

- pour tout $i \geqslant 1$, $0 \leqslant \mathbb{P}([Z\,\mathbb{1}_B = x_i]) \leqslant \mathbb{P}([Z = x_i])$
  et donc $0 \leqslant |x_i|\, \mathbb{P}([Z\,\mathbb{1}_B = x_i]) \leqslant |x_i|\, \mathbb{P}([Z = x_i])$
- la série $\sum |x_i|\, \mathbb{P}([Z = x_i])$ converge car Z admet une espérance

Par critère de comparaison pour les séries à termes positifs, on en déduit que la série $\sum |x_i|\, \mathbb{P}([Z\,\mathbb{1}_B = x_i])$ converge également.

$$\boxed{\text{La variable aléatoire } Z\,\mathbb{1}_B \text{ admet une espérance.}}$$

□

19. Soit $n \in \mathbb{N}$ et soit $\alpha > 0$. On pose :

$$A = [\max(|S_0|, |S_1|, \dots, |S_n|) \geqslant \alpha]$$

et, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$:

$$A_k = [\,|S_k| \geqslant \alpha\,] \cap \left(\bigcap_{i=0}^{k-1} [\,|S_i| < \alpha\,] \right)$$

a) Montrer que les événements A_k sont deux à deux incompatibles puis que $A = \bigcup\limits_{k=0}^{n} A_k$.

Démonstration.

- Soit $(k, k') \in [\![0, n]\!]^2$ tel que $k \neq k'$. Par symétrie des rôles, on peut supposer que $k < k'$. D'où :

$$\begin{aligned}
& A_k \cap A_{k'} \\
&= \left([\, |S_k| \geqslant \alpha \,] \cap \left(\bigcap_{i=0}^{k-1} [\, |S_i| < \alpha \,] \right) \right) \cap \left([\, |S_{k'}| \geqslant \alpha \,] \cap \left(\bigcap_{j=0}^{k'-1} [\, |S_j| < \alpha \,] \right) \right) \\
&= \big([\, |S_k| \geqslant \alpha \,] \cap [\, |S_k| < \alpha \,] \big) \cap \left(\left(\bigcap_{i=0}^{k-1} [\, |S_i| < \alpha \,] \right) \cap [\, |S_{k'}| \geqslant \alpha \,] \cap \left(\bigcap_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^{k'-1} [\, |S_j| < \alpha \,] \right) \right) \\
&= \varnothing \cap \left(\left(\bigcap_{i=0}^{k-1} [\, |S_i| < \alpha \,] \right) \cap [\, |S_{k'}| \geqslant \alpha \,] \cap \left(\bigcap_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^{k'-1} [\, |S_j| < \alpha \,] \right) \right) \\
&= \varnothing
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, les événements } A_k \text{ sont deux à deux incompatibles.}}$$

- Montrons maintenant que $A = \bigcup\limits_{k=0}^{n} A_k$.

  × Soit $\omega \in \bigcup\limits_{k=0}^{n} A_k$.
  Il existe $k \in [\![0, n]\!]$ tel que $\omega \in A_k$. On fixe un tel k et on a alors : $|S_k(\omega)| \geqslant \alpha$. A fortiori :

  $$\max(|S_0(\omega)|, |S_1(\omega)|, \ldots, |S_n(\omega)|) \geqslant \alpha$$

  et donc $\omega \in A$.

  × Réciproquement, soit $\omega \in A$.
  Par définition de A, il existe un entier $k \in [\![0, n]\!]$ tel que $|S_k(\omega)| \geqslant \alpha$. Notons j le plus petit entier de $[\![0, n]\!]$ vérifiant cette propriété.
  Par minimalité de j :

  $$|S_j(\omega)| \geqslant \alpha \qquad \text{et} \qquad \forall i \in [\![0, j-1]\!],\ |S_i(\omega)| < \alpha$$

  On en déduit que $\omega \in A_j$. A fortiori : $\omega \in \bigcup\limits_{k=0}^{n} A_k$.

$$\boxed{\text{D'où : } A = \bigcup_{k=0}^{n} A_k \text{ par double inclusion.}}$$

□

b) Recopier et compléter la fonction **Python** `indicA(n, alpha)` qui prend en paramètres d'entrée un entier naturel n et un réel $\alpha > 0$ et qui simule la variable aléatoire $\mathbb{1}_A$. On supposera que l'on dispose d'une fonction **Python** `simulX()` qui simule la variable aléatoire X_0. On rappelle que la fonction **Python** `abs` renvoie la valeur absolue du nombre donné en argument.

```
def indicA(n, alpha):
    S = 0
    for k in ______________:
        S = ________________
        if ____________________:
            return _____
    return _____
```

Démonstration. On propose de compléter cette fonction de la manière suivante :

```
def indicA(n, alpha):
    S = 0
    for k in range(n+1):
        S = S + simulX()
        if abs(S) >= alpha:
            return 1
    return 0
```

L'idée est de tester si A_0 est réalisé, puis de tester si A_1 est réalisé, et ainsi de suite jusqu'à A_n. Si l'un de ces événements est réalisé, on renvoie 1. Si aucun n'est réalisé, on renvoie 0. □

c) Démontrer par récurrence que, pour tout $i \in [\![0, n]\!]$:

$$\sum_{k=0}^{i} \mathbb{1}_{A_k} = \mathbb{1}_{A_0 \cup \dots \cup A_i}$$

Démonstration.
Montrons par récurrence : $\forall i \in [\![0, n]\!]$, $\mathcal{P}(i)$
où $\mathcal{P}(i)$: « $\sum\limits_{k=0}^{i} \mathbb{1}_{A_k} = \mathbb{1}_{A_0 \cup \dots \cup A_i}$ ».
<u>Initialisation</u> :
D'une part : $\sum\limits_{k=0}^{0} \mathbb{1}_{A_k} = \mathbb{1}_{A_0}$. D'autre part : $\mathbb{1}_{A_0 \cup \dots \cup A_0} = \mathbb{1}_{A_0}$.
D'où $\mathcal{P}(0)$.
<u>Hérédité</u> : soit $i \in [\![0, n-1]\!]$. Supposons $\mathcal{P}(i)$. Montrons $\mathcal{P}(i+1)$.
Par hypothèse de récurrence :

$$\sum_{k=0}^{i+1} \mathbb{1}_{A_k} = \sum_{k=0}^{i} \mathbb{1}_{A_k} + \mathbb{1}_{A_{i+1}} = \mathbb{1}_{A_0 \cup \dots \cup A_i} + \mathbb{1}_{A_{i+1}}$$

De plus, les événements $A_0 \cup \dots \cup A_i$ et A_{i+1} sont incompatibles d'après la question ***19.a)***.
On peut donc appliquer la question ***18.b)*** avec les événements $B_1 = A_0 \cup \dots \cup A_i$ et $B_2 = A_{i+1}$.
Il suit que :

$$\mathbb{1}_{A_0 \cup \dots \cup A_i} + \mathbb{1}_{A_{i+1}} = \mathbb{1}_{(A_0 \cup \dots \cup A_i) \cup A_{i+1}} = \mathbb{1}_{A_0 \cup \dots \cup A_{i+1}}$$

D'où $\mathcal{P}(i+1)$.

On a donc montré par récurrence : pour tout $i \in [\![0, n]\!]$, $\sum\limits_{k=0}^{i} \mathbb{1}_{A_k} = \mathbb{1}_{A_0 \cup \dots \cup A_i}$.

□

d) Montrer que :

$$\mathbb{E}\left(\sum_{k=0}^{n} S_n^2 \, \mathbb{1}_{A_k}\right) \leqslant \mathbb{E}\left(S_n^2\right)$$

Démonstration.

- Commençons par montrer que les espérances existent.
  - × La variable aléatoire S_n admet un moment d'ordre 2 comme somme de variables aléatoires admettant chacune un moment d'ordre 2. Ainsi, S_n^2 admet une espérance.
  - × Soit $k \in [\![0, n]\!]$. D'après la question ***18.c)***, la variable aléatoire $S_n^2 \, \mathbb{1}_{A_k}$ admet également une espérance.
  - × La variable aléatoire $\sum\limits_{k=0}^{n} S_n^2 \, \mathbb{1}_{A_k}$ admet une espérance comme somme de variables aléatoires admettant chacune une espérance.
- De plus :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} S_n^2 \, \mathbb{1}_{A_k} &= S_n^2 \sum_{k=0}^{n} \mathbb{1}_{A_k} \\
&= S_n^2 \, \mathbb{1}_{A_0 \cup \cdots \cup A_n} && \textit{(d'après la question } \textbf{\textit{19.c)}}\textit{)} \\
&\leqslant S_n^2 && \textit{(car } \mathbb{1}_{A_0 \cup \cdots \cup A_n} \leqslant 1 \textit{ et } S_n^2 \geqslant 0\textit{)}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On en déduit, par croissance de l'espérance : } \mathbb{E}\left(\sum_{k=0}^{n} S_n^2 \, \mathbb{1}_{A_k}\right) \leqslant \mathbb{E}\left(S_n^2\right).}$$

□

e) En déduire que :

$$\sum_{k=0}^{n} \mathbb{E}\Big(\big(S_k^2 + 2 S_k (S_n - S_k)\big) \, \mathbb{1}_{A_k} \Big) \leqslant \mathbb{E}\left(S_n^2\right)$$

(Indication : commencer par justifier que, pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $a^2 \geqslant b^2 + 2b(a-b)$)

Démonstration.

- Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned}
(*) \ a^2 \geqslant b^2 + 2b(a-b) &\iff a^2 \geqslant b^2 + 2ab - 2b^2 \\
&\iff a^2 \geqslant -b^2 + 2ab \\
&\iff a^2 - 2ab + b^2 \geqslant 0 \\
&\iff (a - b^2) \geqslant 0 && \textit{(ce qui est vrai)}
\end{aligned}$$

- Soit $k \in [\![0, n]\!]$.
  - × Les variables aléatoires S_k et $S_n - S_k$ admettent chacune un moment d'ordre 2 comme somme de variables aléatoires admettant chacune un moment d'ordre 2.
  - × On en déduit que $S_k(S_n - S_k)$ admet une espérance puis que $S_k^2 + 2S_k(S_n - S_k)$ admet une espérance.
  - × Enfin, d'après la question ***18.c)***, on peut conclure que $\big(S_k^2 + 2S_k(S_n - S_k)\big) \, \mathbb{1}_{A_k}$ admet une espérance.

- D'après l'inégalité $(*)$, on a :
$$S_n^2 \geqslant S_k^2 + 2S_k(S_n - S_k)$$
et donc (par positivité de $\mathbb{1}_{A_k}$) :
$$S_n^2\, \mathbb{1}_{A_k} \geqslant \big(S_k^2 + 2S_k(S_n - S_k)\big)\, \mathbb{1}_{A_k}$$
On en déduit, par croissance de l'espérance :
$$\mathbb{E}\big(\, \big(S_k^2 + 2S_k(S_n - S_k)\big)\, \mathbb{1}_{A_k}\big) \leqslant \mathbb{E}\left(S_n^2\, \mathbb{1}_{A_k}\right)$$
On somme cette inégalité pour k variant de 0 à n :
$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n} \mathbb{E}\big(\, \big(S_k^2 + 2S_k(S_n - S_k)\big)\, \mathbb{1}_{A_k}\big) &\leqslant \sum_{k=0}^{n} \mathbb{E}\left(S_n^2\, \mathbb{1}_{A_k}\right) \\ &= \mathbb{E}\left(\sum_{k=0}^{n} S_n^2\, \mathbb{1}_{A_k}\right) && \textit{(par linéarité de l'espérance)} \\ &\leqslant \mathbb{E}\left(S_n^2\right) && \textit{(d'après la question } \textbf{\textit{19.d)}}\textit{)} \end{aligned}$$
$$\boxed{\text{On a bien : } \sum_{k=0}^{n} \mathbb{E}\big(\, \big(S_k^2 + 2S_k(S_n - S_k)\big)\, \mathbb{1}_{A_k}\big) \leqslant \mathbb{E}\left(S_n^2\right).}$$
□

f) Montrer que, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$: $\mathbb{E}\left(S_k(S_n - S_k)\mathbb{1}_{A_k}\right) = 0$.

Démonstration.
Soit $k \in [\![0, n]\!]$. On a :
$$S_k(S_n - S_k)\mathbb{1}_{A_k} = \left(S_k\, \mathbb{1}_{A_k}\right)\left(S_n - S_k\right)$$
Si $k = n$, alors $S_n - S_k = 0$ et le résultat est évident. On suppose dans la suite que $k \leqslant n - 1$.
On remarque que :
× $S_k = \sum\limits_{i=0}^{k} X_i$ donc S_k ne dépend que de $X_0, \dots, X_k$.
× $A_k = [\,|S_k| \geqslant \alpha\,] \cap \left(\bigcap\limits_{i=0}^{k-1} [\,|S_i| < \alpha\,]\right)$ donc $\mathbb{1}_{A_k}$ ne dépend que de $X_0, \dots, X_k$.
× $S_n - S_k = \sum\limits_{i=k+1}^{n} X_i$ donc $S_n - S_k$ ne dépend que de $X_{k+1}, \dots, X_n$.

De plus, les variables aléatoires X_i sont indépendantes par hypothèse. Ainsi, d'après le lemme des coalitions, les variables aléatoires $S_k\, \mathbb{1}_{A_k}$ et $S_n - S_k$ sont indépendantes.
Puisque ces deux variables aléatoires admettent une espérance (on l'a démontré dans les deux questions précédentes), on en déduit que :
$$\mathbb{E}\left(S_k(S_n - S_k)\mathbb{1}_{A_k}\right) = \mathbb{E}\left(S_k\mathbb{1}_{A_k}\right)\mathbb{E}\left(S_n - S_k\right)$$
Or :
$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left(S_n - S_k\right) &= \mathbb{E}\left(\sum_{i=k+1}^{n} X_i\right) \\ &= \sum_{i=k+1}^{n} \mathbb{E}(X_i) && \textit{(par linéarité de l'espérance)} \\ &= \sum_{i=k+1}^{n} 0 && \textit{(par hypothèse)} \\ &= 0 \end{aligned}$$
□

g) Montrer que : $\sum\limits_{k=0}^{n} \mathbb{E}\big(S_k^2\, \mathbb{1}_{A_k}\big) \geqslant \alpha^2 \sum\limits_{k=0}^{n} \mathbb{E}\big(\mathbb{1}_{A_k}\big)$.

Démonstration.
Montrons que :

$$\forall k \in [\![0, n]\!],\ S_k^2\, \mathbb{1}_{A_k} \geqslant \alpha^2\, \mathbb{1}_{A_k}$$

Cela revient à démontrer :

$$\forall k \in [\![0, n]\!],\ \forall \omega \in \Omega,\ S_k^2(\omega)\, \mathbb{1}_{A_k}(\omega) \geqslant \alpha^2\, \mathbb{1}_{A_k}(\omega)$$

Soit $k \in [\![0, n]\!]$. Soit $\omega \in \Omega$. Distinguons deux cas.

- Premier cas : $\mathbb{1}_{A_k}(\omega) = 0$.
  Alors $S_k^2(\omega)\, \mathbb{1}_{A_k}(\omega) = 0$ et $\alpha^2\, \mathbb{1}_{A_k}(\omega) = 0$ d'où $S_k^2(\omega)\, \mathbb{1}_{A_k}(\omega) \geqslant \alpha^2\, \mathbb{1}_{A_k}(\omega)$.
- Deuxième cas : $\mathbb{1}_{A_k}(\omega) = 1$.
  On doit démontrer dans ce cas : $S_k^2(\omega) \geqslant \alpha^2$.
  Or, l'événement A_k est réalisé et donc $S_k(\omega) \geqslant \alpha$. On en déduit, par croissance de $x \mapsto x^2$ sur $\mathbb{R}^+$, que $S_k^2(\omega) \geqslant \alpha^2$ (rappelons que $S_k^2(\omega) = S_k(\omega)^2$).

$$\boxed{\text{D'où : } S_k^2\, \mathbb{1}_{A_k} \geqslant \alpha^2\, \mathbb{1}_{A_k}.}$$

Par croissance et par linéarité de l'espérance :

$$\mathbb{E}\left(S_k^2\, \mathbb{1}_{A_k}\right) \geqslant \mathbb{E}\left(\alpha^2\, \mathbb{1}_{A_k}\right) = \alpha^2\, \mathbb{E}\left(\mathbb{1}_{A_k}\right)$$

On somme cette inégalité pour k variant de 0 à n :

$$\sum_{k=0}^{n} \mathbb{E}\big(S_k^2\, \mathbb{1}_{A_k}\big) \geqslant \sum_{k=0}^{n} \alpha^2\, \mathbb{E}\big(\mathbb{1}_{A_k}\big) = \alpha^2 \sum_{k=0}^{n} \mathbb{E}\big(\mathbb{1}_{A_k}\big)$$

$$\boxed{\text{On a bien : } \sum_{k=0}^{n} \mathbb{E}\big(S_k^2\, \mathbb{1}_{A_k}\big) \geqslant \alpha^2 \sum_{k=0}^{n} \mathbb{E}\big(\mathbb{1}_{A_k}\big).}$$

□

h) Conclure que :

$$\mathbb{P}(A) \leqslant \frac{\mathbb{V}(S_n)}{\alpha^2} \qquad \textit{(Inégalité de Kolmogorov)}$$

Démonstration.

- Tout d'abord, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\big(\,\big(S_k^2 + 2S_k(S_n - S_k)\big)\, \mathbb{1}_{A_k}\big) &= \mathbb{E}\big(S_k^2\, \mathbb{1}_{A_k}\big) + 2\mathbb{E}\big(S_k(S_n - S_k)\mathbb{1}_{A_k}\big) && \textit{(par linéarité de l'espérance)}\\ &= \mathbb{E}\big(S_k^2\, \mathbb{1}_{A_k}\big) && \textit{(d'après la question } \textbf{\textit{19.f)}}\textit{)}\end{aligned}$$

- On en déduit :

$$\begin{aligned}\alpha^2 \sum_{k=0}^{n} \mathbb{E}\big(\mathbb{1}_{A_k}\big) &\leqslant \sum_{k=0}^{n} \mathbb{E}\big(S_k^2\, \mathbb{1}_{A_k}\big) && \textit{(d'après la question } \textbf{\textit{19.g)}}\textit{)}\\ &\leqslant \sum_{k=0}^{n} \mathbb{E}\big(\,\big(S_k^2 + 2S_k(S_n - S_k)\big)\, \mathbb{1}_{A_k}\big) && \textit{(d'après ce qui précède)}\\ &\leqslant \mathbb{E}\left(S_n^2\right) && \textit{(d'après la question } \textbf{\textit{19.e)}}\textit{)}\end{aligned}$$

- De plus :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} \mathbb{E}\big(\mathbb{1}_{A_k}\big) &= \mathbb{E}\left(\sum_{k=0}^{n} \mathbb{1}_{A_k}\right) && \textit{(par linéarité de l'espérance)}\\
&= \mathbb{E}\left(\mathbb{1}_{A_0\cup\dots\cup A_n}\right) && \textit{(d'après la question } \textbf{19.c)}\textit{)}\\
&= \mathbb{E}\left(\mathbb{1}_{A}\right) && \textit{(d'après la question } \textbf{19.a)}\textit{)}\\
&= \mathbb{P}(A) && \textit{(d'après la question } \textbf{18.a)}\textit{)}
\end{aligned}$$

- Enfin, d'après la formule de Koenig-Huygens :

$$\mathbb{V}(S_n) = \mathbb{E}\left(S_n^2\right) - \left(\mathbb{E}(S_n)\right)^2$$

  Or, toutes les variables aléatoires X_i sont d'espérance nulle et donc $\mathbb{E}(S_n) = 0$ par linéarité de l'espérance. D'où :

$$\mathbb{V}(S_n) = \mathbb{E}\left(S_n^2\right)$$

On en déduit que :

$$\alpha^2\, \mathbb{P}(A) \leqslant \mathbb{V}(S_n)$$

$$\boxed{\text{Puisque } \alpha > 0\text{, on peut conclure que : } \mathbb{P}(A) \leqslant \dfrac{\mathbb{V}(S_n)}{\alpha^2}.}$$

□

20. On fixe dans cette question un réel $\varepsilon > 0$.

a) Justifier, à l'aide de l'inégalité de Kolmogorov, que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $j \in \mathbb{N}^*$:

$$\mathbb{P}\left(\left[\max_{1\leqslant k\leqslant j} |S_{n+k} - S_n| \geqslant \varepsilon\right]\right) \leqslant \frac{\mathbb{V}(S_{n+j} - S_n)}{\varepsilon^2}$$

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}$ et soit $j \in \mathbb{N}^*$. On remarque que :

$$\left[\max_{1\leqslant k\leqslant j} |S_{n+k} - S_n| \geqslant \varepsilon\right] = \left[\max\left(|X_{n+1}|, |X_{n+1} + X_{n+2}|, \dots, |X_{n+1} + \dots + X_{n+k}|\right) \geqslant \varepsilon\right]$$

Il s'agit donc de l'événement A défini dans la question ***19*** mais où on a remplacé :

× α par ε,

× la suite $(X_i)_{i\geqslant 0}$ par la suite $(X_i)_{i\geqslant n+1}$ (qui vérifie les mêmes propriétés),

× S_n par $S_{n+j} - S_n$.

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{En appliquant l'inégalité de Kolmogorov, on obtient bien :}\\ \mathbb{P}\left(\left[\max\limits_{1\leqslant k\leqslant j} |S_{n+k} - S_n| \geqslant \varepsilon\right]\right) \leqslant \dfrac{\mathbb{V}(S_{n+j} - S_n)}{\varepsilon^2}.\end{array}}$$

□

b) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $j \in \mathbb{N}^*$:

$$\mathbb{P}\left(\left[\max_{1\leqslant k\leqslant j} |S_{n+k} - S_n| \geqslant \varepsilon\right]\right) \leqslant \frac{R_n}{\varepsilon^2}$$

où $R_n = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} \mathbb{V}(X_k)$.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}$ et soit $j \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}(S_{n+j} - S_n) &= \mathbb{V}\left(\sum_{k=n+1}^{n+j} X_k\right) \\
&= \sum_{k=n+1}^{n+j} \mathbb{V}(X_k) && \textit{(par indépendance)} \\
&\leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} \mathbb{V}(X_k) && \textit{(par convergence de la série } \sum \mathbb{V}(X_k) \textit{ qui est à termes positifs)}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{D'après la question } \textbf{\textit{20.a)}} : \mathbb{P}\left(\left[\max_{1\leqslant k\leqslant j} |S_{n+k} - S_n| \geqslant \varepsilon\right]\right) \leqslant \frac{R_n}{\varepsilon^2}.}$$

□

c) On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $B_n(\varepsilon) = \left[\max\limits_{k\geqslant 1} |S_{n+k} - S_n| \geqslant \varepsilon\right]$. Conclure que :

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(B_n(\varepsilon)) = 0$$

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$B_n(\varepsilon) = \left[\max_{k\geqslant 1} |S_{n+k} - S_n| \geqslant \varepsilon\right] = \bigcup_{k=1}^{+\infty} [\,|S_{n+k} - S_n| \geqslant \varepsilon\,]$$

D'après le théorème 2 :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(B_n(\varepsilon)) &= \lim_{j\to+\infty} \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{j} [\,|S_{n+k} - S_n| \geqslant \varepsilon\,]\right) \\
&= \lim_{j\to+\infty} \mathbb{P}\left(\left[\max_{1\leqslant k\leqslant j} |S_{n+k} - S_n| \geqslant \varepsilon\right]\right)
\end{aligned}$$

Or, d'après la question ***20.b)*** :

$$\forall j \in \mathbb{N}^*, \ \mathbb{P}\left(\left[\max_{1\leqslant k\leqslant j} |S_{n+k} - S_n| \geqslant \varepsilon\right]\right) \leqslant \frac{R_n}{\varepsilon^2}$$

et donc, par passage à la limite dans les inégalités larges :

$$0 \leqslant \mathbb{P}(B_n(\varepsilon)) \leqslant \frac{R_n}{\varepsilon^2}$$

De plus, $\lim\limits_{n\to+\infty} R_n = 0$ car il s'agit d'un reste de série convergente (même argument qu'en question ***9.d)***).

$$\boxed{\text{On en déduit, par théorème d'encadrement : } \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(B_n(\varepsilon)) = 0.}$$

□

21. On fixe dans cette question un entier naturel N.

a) Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\overline{B_n\left(2^{-(N+1)}\right)} \subset C(N,n)$$

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$\begin{aligned}
\overline{B_n\left(2^{-(N+1)}\right)} &= \overline{\left[\max_{k\geqslant 1} |S_{n+k}-S_n| \geqslant 2^{-(N+1)}\right]} \\
&= \overline{\bigcup_{k=1}^{+\infty} \left[\,|S_{n+k}-S_n| \geqslant 2^{-(N+1)}\,\right]} \\
&= \bigcap_{k=1}^{+\infty} \overline{\left[\,|S_{n+k}-S_n| \geqslant 2^{-(N+1)}\,\right]} \\
&= \bigcap_{k=1}^{+\infty} \left[\,|S_{n+k}-S_n| < 2^{-(N+1)}\,\right]
\end{aligned}$$

Soit $\omega \in \overline{B_n\left(2^{-(N+1)}\right)}$. Alors, d'après ce qui précède, pour tout entier $k \geqslant 1$:

$$|S_{n+k}(\omega) - S_n(\omega)| < 2^{-(N+1)} \qquad (*)$$

Soient $i \geqslant n$ et $j \geqslant n$ deux entiers. Il s'agit de montrer que :

$$|S_i(\omega) - S_j(\omega)| \leqslant 2^{-N} \qquad (**)$$

Distinguons 3 cas.

- Premier cas : $i = j = n$.
  Alors $(**)$ est évidemment vérifiée puisque $S_i(\omega) - S_j(\omega) = 0$.
- Deuxième cas : $i > n$ et $j = n$ (le cas $i = n$ et $j > n$ est symétrique).
  Alors $(**)$ est une conséquence directe de $(*)$ en posant $k = i-n \geqslant 1$. En effet, $2^{-(N+1)} \leqslant 2^{-N}$.
- Troisième cas : $i > n$ et $j > n$.
  Alors :

$$\begin{aligned}
|S_i(\omega) - S_j(\omega)| &= |(S_i(\omega) - S_n(\omega)) + (S_n(\omega) - S_j(\omega))| \\
&\leqslant |S_i(\omega) - S_n(\omega)| + |S_n(\omega) - S_j(\omega)| && \textit{(par inégalité triangulaire)} \\
&< 2^{-(N+1)} + 2^{-(N+1)} && \textit{(par } (*)\textit{)} \\
&= 2^{-N}
\end{aligned}$$

  On a bien $|S_i(\omega) - S_j(\omega)| \leqslant 2^{-N}$.

$$\boxed{\text{D'où : } \overline{B_n\left(2^{-(N+1)}\right)} \subset C(N,n).}$$

□

b) En déduire que :

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} C(N,n)\right) = 1$$

Démonstration.
On remarque que la suite d'événements $(C(N,n))_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
Ainsi, d'après le théorème 1 :

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} C(N,n)\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(C(N,n))$$

Or, d'après la question ***21.a)*** et par croissance de $\mathbb{P}$:

$$\mathbb{P}\left(\overline{B_n\left(2^{-(N+1)}\right)}\right) \leqslant \mathbb{P}(C(N,n)) \leqslant 1$$

De plus, d'après la question ***20.c)*** avec $\varepsilon = 2^{-(N+1)} > 0$:

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(B_n\left(2^{-(N+1)}\right)\right) = 0$$

et donc, par passage à l'événement contraire :

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\overline{B_n\left(2^{-(N+1)}\right)}\right) = 1$$

Par théorème d'encadrement :

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(C(N,n)) = 1$$

$$\boxed{\text{On a bien : } \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} C(N,n)\right) = 1.}$$

□

22. Conclure que : $\mathbb{P}(A_{\mathrm{cv}}) = 1$.

Démonstration.
On remarque que la suite d'événements $\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} C(N,n)\right)_{N\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
Ainsi, d'après le théorème 1 :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A_{\mathrm{cv}}) &= \mathbb{P}\left(\bigcap_{N=0}^{+\infty}\bigcup_{n=0}^{+\infty} C(N,n)\right) \\
&= \lim_{N\to+\infty} \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} C(N,n)\right) \\
&= \lim_{N\to+\infty} 1 && \textit{(d'après la question } \textbf{\textit{21.b)}}\textit{)} \\
&= 1
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On a bien : } \mathbb{P}(A_{\mathrm{cv}}) = 1.}$$

□

23. *Une application.* On considère dans cette question une suite $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires indépendantes suivant toutes la loi de Rademacher (voir question ***13*** pour la définition).
On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $X_n = \dfrac{Y_n}{n}$.
Démontrer que la série de variables aléatoires $\sum X_n$ converge presque-sûrement.

Démonstration.

- Les variables aléatoires Y_n et X_n sont toutes finies dont admettent toutes une espérance et une variance.
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X_n) &= \frac{1}{n}\mathbb{E}(Y_n) && \textit{(par linéarité de l'espérance)} \\
&= \frac{1}{n}\left(1 \times \frac{1}{2} + (-1) \times \frac{1}{2}\right) \\
&= 0
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}(X_n) &= \frac{1}{n^2}\mathbb{V}(Y_n) && \textit{(par propriété de la variance)} \\
&= \frac{1}{n^2}\mathbb{E}(Y_n^2) && \textit{(d'après la formule de Koenig-Huygens, puisque } \mathbb{E}(Y_n) = 0\textit{)} \\
&= \frac{1}{n^2} && \textit{(car } Y_n^2 = 1\textit{)}
\end{aligned}$$

Ainsi, les variables aléatoires X_n sont toutes d'espérance nulle et la série $\sum \mathbb{V}(X_n)$ converge par critère de Riemann.

- Les variables aléatoires X_n sont indépendantes par lemme des coalitions.

$$\boxed{\text{D'après le théorème de Kolmogorov, la série de variables aléatoires } \sum X_n \text{ converge presque-sûrement.}}$$

□