Colles de Mathématiques en E2A
DL, réduction des matrices carrées
Semaine 11 : 25 - 29 novembre

Toutes les définitions et tous les énoncés de théorèmes/propositions du cours sont exigibles des élèves. Les démonstrations des théorèmes du cours ne sont pas exigibles, sauf si elles apparaissent en question de cours.

On pourra à tout moment demander à un·e élève de donner la nature (réel, suite, fonction, ensemble, proposition, etc) d'une expression manipulée dans un exercice, pour vérifier sa bonne compréhension. On pourra aussi demander de préciser quelles sont les variables libres et quelles sont les variables liées (muettes).

On portera une attention toute particulière à ce que les objets soient correctement introduits avant d'être utilisés, et ne soient pas introduits pour rien.

1 Chapitre X : Développements limités

1.1 Définitions

- Développement limité d'ordre 1, puis d'ordre 2, en un point x_0.

1.2 Résultats

- Formules de Taylor-Young à l'ordre 1, puis à l'ordre 2, en un point x_0.
- Développements limités usuels en 0.
- Position locale d'une courbe par rapport à sa tangente en x_0 en fonction du signe de $f''(x_0) \neq 0$.

1.3 Méthodes

1. Il faut connaître quelques méthodes de calcul en pratique des DL :
   - Substitution de x par $\frac{1}{n}$.
   - changement de variable $x \leftarrow -x$
   - troncature
   - calcul via les dérivées (formule de Taylor-Young)
   - somme/produit/composition. Citation du programme officiel : « Aucune connaissance (somme, produit, composition...) concernant les techniques de calcul des développements limités n'est exigible. » Il faut donc s'en tenir à des exemples **très simples** et ne pas centrer le travail là dessus.
2. Il faut savoir calculer un équivalent à l'aide d'un développement limité :
   Soit f une fonction qui admet un $\mathrm{DL}_2(0)$: $f(x) = a + bx + cx^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^2)$.
   - Si $a \neq 0$, alors $f(x) \underset{x\to 0}{\sim} a$.
   - Si $a = 0$ et $b \neq 0$, alors $f(x) \underset{x\to 0}{\sim} bx$.
   - Si $a = b = 0$ et $c \neq 0$, alors $f(x) \underset{x\to 0}{\sim} cx^2$.

3. Réflexes à avoir lorsque l'on calcule une limite.
   - On regarde si c'est une F.I.
   - Si il y a une F.I., on essaye de la lever par croissances comparées
   - Si ce n'est pas directement une croissance comparée, on essaye de calculer un équivalent simple de la fonction (on peut reconnaître un produit d'équivalents usuels par exemple)
   - En cas de somme ne permettant pas le calcul direct d'un équivalent, on utilisera un $\mathrm{DL}_2(0)$ pour obtenir l'équivalent

2 Chapitre XI : Réduction

2.1 Définitions

- Matrices semblables.
- Valeurs propres. Spectre d'une matrice carrée.
- Vecteurs propres. Sous-espace propre d'une matrice carrée.

2.2 Résultats

- Puissances de matrices semblables. Utilisation du binôme de Newton pour calculer $(\lambda I + N)^n$.
- Formule de changement de base.
- Nombre maximal de valeurs propres.
- λ valeur propre de A ssi $A - \lambda I$ est non inversible ssi $\mathrm{rg}(A - \lambda I) < n$ (où $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$). Cas particulier : 0 est valeur propre de A ssi A est non inversible.
- Pour $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, le théorème du rang donne :

$$n = \dim(E_\lambda(A)) + \mathrm{rg}(A - \lambda I_n)$$

- Valeurs propres d'une matrice diagonale, triangulaire supérieure ou inférieure.

2.3 Méthodes

1. Pour calculer les valeurs propres d'une matrice 2×2, on utilise le déterminant.
2. Pour déterminer $E_\lambda(A)$, le sous-espace propre de A associé à la valeur propre λ. On rédigera toujours de la manière suivante :

$$\begin{aligned} U \in E_\lambda(A) &\iff (A - \lambda I)U = 0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{R})} \\ &\iff \cdots \end{aligned}$$

   On obtient un système linéaire à résoudre et si λ est bien une valeur propre de A, on doit forcément trouver des variables auxiliaires. En effet, $\dim(E_\lambda(A)) \geq 1$ donc ce n'est pas un système de Cramer. Une fois cette équation résolue, on traduit le résultat en :

$$E_\lambda(A) = \mathrm{Vect}\,(\dots)$$

3 Questions de cours

1. Calculer $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x) - x}{x^2}$
2. Calculer le $\mathrm{DL}_2(0)$ de $f : x \mapsto x^2 \mathrm{e}^x + 3x$
3. Soient $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer $\mathrm{Sp}(C)$ et $\mathrm{Sp}(D)$.