Colles de Mathématiques en E2A
Réduction des matrices carrées
Semaine 12 : 2 - 6 décembre

Toutes les définitions et tous les énoncés de théorèmes/propositions du cours sont exigibles des élèves. Les démonstrations des théorèmes du cours ne sont pas exigibles, sauf si elles apparaissent en question de cours.

On pourra à tout moment demander à un·e élève de donner la nature (réel, suite, fonction, ensemble, proposition, etc) d'une expression manipulée dans un exercice, pour vérifier sa bonne compréhension. On pourra aussi demander de préciser quelles sont les variables libres et quelles sont les variables liées (muettes).

On portera une attention toute particulière à ce que les objets soient correctement introduits avant d'être utilisés, et ne soient pas introduits pour rien.

1 Chapitre XI : Réduction

1.1 Définitions

- Matrices semblables.
- Valeurs propres. Spectre d'une matrice carrée.
- Vecteurs propres. Sous-espace propre d'une matrice carrée.
- Polynôme annulateur. Valeurs propres possibles.
- Matrice carrée diagonalisable.
- Matrice carrée symétrique.

1.2 Résultats

- Puissances de matrices semblables (à savoir démontrer par récurrence). Utilisation du binôme de Newton pour calculer $(\lambda I + N)^n$.
- Formule de changement de base. Deux matrices sont semblables ssi elles représentent le même endomorphisme dans deux bases (éventuellement) différentes.
- Nombre maximal de valeurs propres.
- Pour $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$: λ valeur propre de A ssi $A - \lambda I$ est non inversible ssi $\text{rg}(A - \lambda I) < n$. Cas particulier : 0 est valeur propre de A ssi A est non inversible.
- Pour $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, le théorème du rang (matriciel) donne :
$$n = \dim(E_\lambda(A)) + \text{rg}(A - \lambda I_n)$$
- Valeurs propres d'une matrice diagonale, triangulaire supérieure ou inférieure.
- Lien entre valeurs propres de A et racines d'un polynôme annulateur de A. Notion de valeur propre possible.
- Critère de diagonalisabilité avec la base de vecteurs propres. Attention, le critère de diagonalisabilité avec la somme des dimensions des sous-espaces propres est **hors-programme**.
- Condition suffisante de diagonalisabilité : si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ possède n valeurs propres distinctes, alors A est diagonalisable.
- Cas particulier des matrices symétriques : toute matrice symétrique est diagonalisable.

1.3 Méthodes

1. Il faut savoir utiliser un polynôme annulateur pour déterminer A^{-1} en fonction de A.
2. Pour déterminer les valeurs propres de $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, il existe trois méthodes essentielles à connaître :
   (a) Le plus souvent, l'énoncé nous aide. L'aide la plus classique est de nous faire calculer un polynôme annulateur de A. On donne alors les *valeurs propres possibles de* A puis on vérifie pour chacune d'elles si il s'agit bien d'une valeur propre de A ou non (à l'aide d'un calcul de rang).
   (b) Si l'énoncé ne parle pas de polynôme annulateur et ne donne aucune piste pour nous aider, on calcule toutes les valeurs propres de A d'un coup :
      - Si A est une matrice 2×2, on utilise le déterminant.
      - Si A est une matrice 3×3, on calcule le rang de $A - \lambda I_3$ via l'algorithme du pivot de Gauss. Lorsqu'on aboutit à une matrice triangulaire supérieure (la réduite de Gauss), on identifie les réels λ qui annulent au moins un coefficient diagonal.

   (c) Si on connaît déjà des valeurs propres et que la somme des dimensions des sous-espaces propres est égale à n, on peut montrer en raisonnant **par l'absurde** qu'il n'y a pas d'autres valeurs propres. Voir exercice 10 du TD.

   On renvoie au cours pour les méthodes moins importantes, mais qui peuvent aider à trouver des valeurs propres.
3. Pour déterminer $E_\lambda(A)$, le sous-espace propre de A associé à la valeur propre λ. On rédigera toujours de la manière suivante :

$$\begin{aligned} U \in E_\lambda(A) &\iff (A - \lambda I)U = 0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{R})} \\ &\iff \cdots \end{aligned}$$

   On obtient un système linéaire à résoudre et si λ est bien une valeur propre de A, on doit forcément trouver des variables auxiliaires. En effet, $\dim(E_\lambda(A)) \geq 1$ donc ce n'est pas un système de Cramer. Une fois cette équation résolue, on traduit le résultat en :

$$E_\lambda(A) = \text{Vect}\,(\dots)$$

4. Pour déterminer si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est diagonalisable.
   - On commence par regarder si la matrice A est symétrique. Si A est symétrique, alors A est diagonalisable. Si A n'est pas symétrique, une étude plus détaillée est nécessaire pour pouvoir conclure (voir le point suivant).
   - On détermine les valeurs propres de A.
     (a) Si A possède n valeurs propres distinctes, alors A est diagonalisable.
     (b) Si A possède une unique valeur propre, alors on fait un raisonnement **par l'absurde** pour montrer que A n'est pas diagonalisable (on n'aura jamais à étudier une matrice qui est un multiple de la matrice identité).
     (c) Pour tous les cas intermédiaires, il faut calculer chaque sous-espace propre et répondre à la question suivante : peut-on construire (à l'aide du théorème de concaténation) une base de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ formée de vecteurs propres de A ?
        — Si la somme des dimensions des sous-espaces propres est égale à n, alors on peut appliquer le thm de concaténation et construire une base de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ formée de vecteurs propres de A. La matrice A est donc diagonalisable.
        — Si la somme des dimensions des sous-espaces propres est strictement inférieure à n, alors on fait un raisonnement **par l'absurde** pour démontrer qu'il n'existe pas de base de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ formée de vecteurs propres de A. La matrice A n'est donc pas diagonalisable.

2 Questions de cours

1. Soient $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer $\mathrm{Sp}(C)$ et $\mathrm{Sp}(D)$.
2. Le programme suivant

   ```
   import numpy as np
   import numpy.linalg as al
   I = np.identity(3)
   A = np.array([[2,-2,1],[2,-3,2],[-1,2,0]])
   print(al.matrix_rank(A-I))
   print(al.matrix_rank(A+3*I))
   ```

   renvoie

   ```
   1
   2
   ```

   En déduire les valeurs propres de A.
3. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

   Calculer A^2 et vérifier que $P(X) = X^2 + 2X - 3$ est un polynôme annulateur de A. Quelles sont les valeurs propres de A ?
4. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$. On admet que $P(X) = X^2 + 2X - 3$ est un polynôme annulateur de A. En déduire que A est inversible et exprimer A^{-1} en fonction de A et I.
5. La matrice $M = \begin{pmatrix} 7 & 1 & -1 \\ 0 & 7 & -2 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable ?