Exercices de cours

Exercice 1 : (Somme de DL). Déterminer le $\mathrm{DL}_2(0)$ de $x \mapsto \dfrac{1}{1+x} + x$ puis de $x \mapsto \mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}$.

Exercice 2 : (Produit de DL). Déterminer le $\mathrm{DL}_2(0)$ de $x \mapsto (1+x)\mathrm{e}^x$ puis de $x \mapsto (x-1)\ln(1+x)$.

Exercice 3 : (Composition de DL). Déterminer le $\mathrm{DL}_2(0)$ de $x \mapsto \ln(1+2x)$ puis de $x \mapsto \sqrt{1-x^2}$.

Calculs de limites, d'équivalents et de développements limités

Exercice 4 : *(Un calcul de niveau TOP 3)* Soit $x \geq 0$ et soit $\beta > 0$. Calculer $\displaystyle\lim_{k\to+\infty} \left(1 - \frac{\beta}{k}x + \underset{k\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{k}\right)\right)^k$.

Exercice 5 :

1. Déterminer un équivalent des fonctions suivantes aux points indiqués.
   (a) $f_1(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x - 1}{x\ln(1+x) - x^2}$ en 0 et en $+\infty$.
   (b) $f_2(x) = \ln\left(1+x^2\right)$ en 0 et en $+\infty$.
   (c) $f_3(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}$ en $+\infty$ et en 0.
2. Déterminer : $\displaystyle\lim_{x\to1} \left(\frac{1+x}{2}\right)^{\frac{x}{x-1}}$ *(indication : on pourra poser $t = x-1$).*

Exercice 6 : À l'aide d'équivalents ou de développements limités, déterminer les limites suivantes.

1. $\displaystyle\lim_{x\to0} \frac{\ln(1+x) - x}{2x^2}$
2. $\displaystyle\lim_{x\to0} \frac{1}{\mathrm{e}^x - 1} - \frac{1}{x}$
3. $\displaystyle\lim_{x\to0} \frac{1}{x(1+x)} - \frac{\ln(1+x)}{x^2}$
4. $\displaystyle\lim_{x\to0} \frac{\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2}}{2x}$

Continuité et dérivabilité

Exercice 7 : Étudier la continuité et la dérivabilité des fonctions suivantes.

1. $f_1(x) = \begin{cases} x\ln(x^2) - 2x & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$
2. $f_2(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{1-\mathrm{e}^{-2x}} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$
3. $f_3(x) = \begin{cases} \dfrac{x\ln(x)}{x-1} & \text{si } x \in \left]0, +\infty\right[\setminus \{1\} \\ 0 & \text{si } x = 1 \end{cases}$
4. $f_4(x) = \begin{cases} \dfrac{x\mathrm{e}^{-x}}{1-\mathrm{e}^{-x}} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

Exercice 8 : Soit $f : t \mapsto \begin{cases} \dfrac{\mathrm{e}^t - 1}{t} & \text{si } t \neq 0 \\ 1 & \text{si } t = 0 \end{cases}$.

1. Calculer la dérivée de f en tout point $t \neq 0$.
2. Trouver la limite du quotient $\dfrac{f(t) - 1}{t}$ lorsque t tend vers 0.
3. Montrer que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Études de fonctions

Exercice 9 : *(d'après* `EML 2022`*)* On considère la fonction f définie sur $]-\infty;1]$ par :

$$\forall t \in]-\infty;1],\ f(t) = \begin{cases} \dfrac{-\ln(1-t)}{t} & \text{si } t \in]-\infty;0[\cup]0;1[\\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Montrer que f est continue sur $]-\infty;1[$.
2. (a) Montrer : $\forall t \in]-\infty;1[,\ \dfrac{t}{1-t} + \ln(1-t) \geqslant 0$.
   (b) Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\infty;0[$ et sur $]0;1[$ et déterminer f' sur ces intervalles.
   (c) En déduire la monotonie de f sur $]-\infty;1[$.
3. (a) Donner le développement limité à l'ordre 2 en 0 de $t \mapsto \ln(1-t)$.
   (b) Montrer que f est dérivable en 0 et que $f'(0) = \dfrac{1}{2}$.
   (c) Montrer enfin que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\infty;1[$.
4. Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en 1.
5. Tracer l'allure de la courbe représentative de f dans un repère orthonormé en faisant apparaître la tangente en 0.

Exercice 10 : On considère la fonction f définie sur $]-\infty,1[$ comme suit :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{-x}{(1-x)\ln(1-x)} & \text{si } x \in]-\infty,1[\setminus\{0\} \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

1. Montrer que f est continue sur $]-\infty,1[$.
2. (a) Déterminer le développement limité de la fonction $x \mapsto \ln(1-x)$ à l'ordre 2 au voisinage de 0.
   (b) En déduire que f est dérivable en 0 puis vérifier que $f'(0) = \dfrac{1}{2}$.
3. (a) Montrer que f est dérivable sur $]-\infty,1[\setminus\{0\}$, puis calculer $f'(x)$ pour tout réel $x \in]-\infty,1[\setminus\{0\}$.
   (b) Déterminer le signe de la quantité $\ln(1-x)+x$ lorsque $x \in]-\infty,1[$.
   (c) En déduire les variations de f.
   (d) Déterminer les limites de f aux bornes de son domaine de définition, puis dresser son tableau de variation.
4. Tracer l'allure de la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.
5. En utilisant les questions 2b et 3a, montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\infty,1[$.

Exercice 11 : Soit f la fonction définie sur $]-1,+\infty[$ par : $f(x) = \mathrm{e}^{-2x}\ln(1+x)$.

1. Calculer le développement limité d'ordre 2 en 0 de f.
2. En déduire l'équation de la tangente en 0 ainsi que la position de la courbe par rapport à cette tangente au voisinage de 0.

Exercice 12 : On note $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par : $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{\mathrm{e}^x - 1} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$.

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.
2. Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\infty,0[$ et sur $]0,+\infty[$, et calculer $f'(x)$ pour tout $x \in]-\infty,0[\ \cup\ ]0,+\infty[$.
3. Montrer : $f'(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} -\dfrac{1}{2}$.
4. Établir que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et préciser $f'(0)$.

Exercice 13 : *(d'après EDHEC 2004)* Dans ce problème, la lettre n désigne un entier naturel non nul.

On note f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} x e^{-\frac{n}{x}} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

On note (C_n) la courbe représentative de f_n dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. (a) Montrer que f_n est continue à droite en 0.
   (b) Montrer que f_n est dérivable à droite en 0 et donner la valeur du nombre dérivé à droite en 0 de f_n.
2. (a) Montrer que f_n est dérivable sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$.
   Calculer, pour tout réel $x \neq 0$, $f_n'(x)$ puis étudier son signe.
   (b) Calculer les limites de f_n en $+\infty$, $-\infty$ et 0^-, puis donner le tableau de variations de f_n.
3. (a) Rappeler le développement limité à l'ordre 2 de e^u lorsque u est au voisinage de 0.
   (b) En déduire que, lorsque x est au voisinage de $+\infty$, on a :
   $$f_n(x) = x - n + \frac{n^2}{2x} + \underset{x \to +\infty}{o}\left(\frac{1}{x}\right).$$
   Que dire au voisinage de $-\infty$?
   (c) *(Hors programme)* En déduire qu'au voisinage de $+\infty$, ainsi qu'au voisinage de $-\infty$, (C_n) admet une asymptote oblique (D_n) dont on donnera une équation.
   Préciser la position relative de (D_n) et (C_n) aux voisinages de $+\infty$ et de $-\infty$.
   (d) Donner l'allure de la courbe (C_1).

Une égalité de Taylor-Lagrange avec reste intégral

Exercice 14 :

1. Montrer :
   $$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, \ e^{-x} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^k}{k!} + (-1)^{n+1} \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} e^{-t} dt$$
2. En écrivant l'égalité précédente pour $n = 2$, puis $n = 3$, montrer :
   $$\forall x \in \mathbb{R}_+, \ \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} \leq x - 1 + e^{-x} \leq \frac{x^2}{2}$$
3. En déduire un équivalent de $x - 1 + e^{-x}$ en 0.
4. Retrouver le résultat précédent à l'aide d'un développement limité usuel.

Énoncés de concours

Exercice 15 : *(Séries)*

Pour tout entier naturel n non nul, on pose :

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n) \quad \text{et} \quad v_n = u_n - \frac{1}{n}$$

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = \dfrac{1}{x+1} + \ln(x) - \ln(x+1)$.
   (a) Déterminer $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.
   (b) Étudier les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}_+^*$ et dresser son tableau de variations.
   (c) Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_{n+1} - u_n = f(n)$.
   (d) En déduire la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
   (e) Écrire une fonction **Python** d'en-tête `def u(n):` qui prend en argument un entier naturel n non nul et qui renvoie la valeur de u_n.

2. (a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $v_{n+1} - v_n = \dfrac{1}{n} - \ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)$.
   (b) Montrer que pour tout réel x positif : $\ln(1+x) \le x$.
   En déduire que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante.
   (c) Donner le développement limité d'ordre 2 de $\ln(1+x)$ en 0. En déduire que :
   $$v_{n+1} - v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2n^2}$$
   (d) Déterminer la nature de la série de terme général $v_{n+1} - v_n$. On note $\gamma = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} (v_{n+1} - v_n)$.
   (e) Pour $n \ge 2$, simplifier la somme partielle : $\sum\limits_{k=1}^{n-1} (v_{k+1} - v_k)$.
   En déduire que la suite $(v_n)_{n\ge 2}$ converge vers γ.

3. (a) Déterminer $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$.
   (b) Montrer que :
   $$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ v_n \le \gamma \le u_n$$
   puis que :
   $$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ |u_n - \gamma| \le \frac{1}{n}$$
   (c) On rappelle que l'instruction `np.floor(x)` renvoie la partie entière d'un réel x et on suppose que la fonction **Python**, nommée `u`, de la question `1.e)` a été correctement programmée. Expliquer l'intérêt et le fonctionnement du script ci-dessous :

```
import numpy as np
eps = float(input('Entrer un réel strictement positif : '))
n = np.floor(1/eps) + 1
print(u(n))
```

Exercice 16 : *(Variables aléatoires discrètes)*

Soit X une v.a.r. à valeurs dans $\mathbb{N}^*$.
On suppose qu'il existe un réel α strictement positif tel que pour tout entier naturel j on ait :

$$\mathbb{P}([X > j]) = \frac{1}{(j+1)^\alpha} \qquad (*)$$

1. Montrer que pour tout entier naturel j non nul :

$$\mathbb{P}([X = j]) = \mathbb{P}([X > j-1]) - \mathbb{P}([X > j])$$

   Par une série de questions, on démontrait alors que X admet une espérance si et seulement si la série de terme général $\mathbb{P}([X > j])$ converge. De plus, dans ce cas : $\mathbb{E}(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}([X > j])$. *(on pourra utiliser ce résultat dans la suite)*
2. Légitimer que $(*)$ définit bien une loi de probabilité d'une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$.
3. Montrer que X admet une espérance si et seulement si α est strictement supérieur à 1.
4. Montrer que pour tout entier naturel j non nul :

$$\mathbb{P}([X = j]) = \frac{1}{j^\alpha}\left(1 - \frac{1}{(1+\frac{1}{j})^\alpha}\right)$$

5. (a) Étudier les variations de $f : x \mapsto 1 - (1+x)^{-\alpha} - \alpha x$ sur $[0,1]$.
   (b) Montrer que pour tout entier naturel j non nul :

$$\mathbb{P}([X = j]) \leq \frac{\alpha}{j^{1+\alpha}}$$

6. Montrer, en utilisant le résultat de 3., que :

$$\lim_{j\to+\infty} j^{\alpha+1}\,\mathbb{P}([X = j]) = \alpha$$

7. Montrer que X admet une variance si et seulement si $\alpha > 2$.

Exercice 17 : *(Intégration)* On considère la fonction f qui à tout réel x associe : $f(x) = \int_0^x \ln(1+t^2)\,\mathrm{d}t$.

1. (a) Déterminer le signe de $f(x)$ selon le signe de x.
   (b) Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et calculer $f'(x)$ pour tout réel x.
   (c) En déduire les variations de f sur $\mathbb{R}$ (on ne cherchera pas à calculer les limites de f).
2. (a) Montrer que f est impaire.
   (b) Étudier la convexité de la fonction f et donner les coordonnées des éventuels points d'inflexion de la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.
3. (a) Déterminer les réels a et b tels que :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \frac{t^2}{1+t^2} = a + \frac{b}{1+t^2}$$

   (b) En déduire, grâce à une intégration par parties, que, pour tout réel x, on a :

$$f(x) = x\left(\ln(1+x^2) - 2\right) + 2\int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$$

4. Recherche d'un équivalent de $f(x)$ au voisinage de $+\infty$.
   (a) Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\, \mathrm{d}t$ est une intégrale convergente.
   (b) En déduire que $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} x\ln(1+x^2)$.
   (c) Vérifier que, pour tout réel x strictement positif, on a : $\ln(1+x^2) = 2\ln(x) + \ln\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)$, puis établir l'équivalent suivant :
   $$f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} 2x\ \ln(x)$$
   (d) Donner sans calcul un équivalent de $f(x)$ lorsque x est au voisinage de $-\infty$.

5. Recherche d'un équivalent de $f(x)$ au voisinage de 0.
   (a) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^3$ sur $\mathbb{R}$.
   On admet la formule de Taylor-Young à l'ordre 3 au voisinage de 0 pour la fonction f, c'est à dire :
   $$f(x) = f(0) + \frac{x^1}{1!}f'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \frac{x^3}{3!}f^{(3)}(0) + \underset{x\to 0}{o}(x^3)$$
   (b) Déterminer $f(0)$, $f'(0)$, $f''(0)$, $f^{(3)}(0)$.
   (c) En déduire alors un équivalent de $f(x)$ au voisinage de 0 (on trouve $f(x) \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{x^3}{3}$).

Exercice 18 : *(Variables aléatoires à densité)*

1. On désigne par n un entier naturel non nul et par $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé, indépendantes et suivant la même loi que V, c'est à dire la loi $\mathcal{E}(1)$.
2. On considère la v.a.r. Y_n définie par $Y_n = \max(X_1, X_2, \ldots, X_n)$, c'est à dire que pour tout ω de Ω, on a : $Y_n(\omega) = \max(X_1(\omega), X_2(\omega), \ldots, X_n(\omega))$.
   On admet que Y_n est une variable aléatoire à densité.

2. (a) Montrer que la fonction de répartition F_{Y_n} de Y_n est définie par :
   $$F_{Y_n}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ (1-\mathrm{e}^{-x})^n & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$
   (b) En déduire une densité f_{Y_n} de Y_n.

3. (a) Donner un équivalent de $1 - F_{Y_n}(t)$ lorsque t est au voisinage de $+\infty$, puis montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(1 - F_{Y_n}(t)\right)\, dt$ est convergente.
   (b) Établir l'égalité suivante :
   $$\forall x \in \mathbb{R}^+,\ \int_0^x (1 - F_{Y_n}(t))\, dt = x\left(1 - F_{Y_n}(x)\right) + \int_0^x t f_{Y_n}(t)\, dt$$
   (c) Montrer que : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x\left(1 - F_{Y_n}(x)\right) = 0$.
   (d) En déduire que Y_n possède une espérance et prouver l'égalité :
   $$\mathbb{E}(Y_n) = \int_0^{+\infty} \left(1 - F_{Y_n}(t)\right)\, dt$$

4. (a) Montrer, grâce au changement de variable $u = 1 - \mathrm{e}^{-t}$, que l'on a :
   $$\forall x \in \mathbb{R}^+,\ \int_0^x \left(1 - F_{Y_n}(t)\right)\, dt = \int_0^{1-\mathrm{e}^{-x}} \frac{1-u^n}{1-u}\, du$$
   (b) En déduire que : $\displaystyle\int_0^x \left(1 - F_{Y_n}(t)\right)\, dt = \sum_{k=1}^{n} \frac{(1-\mathrm{e}^{-x})^k}{k}$ puis donner $\mathbb{E}(Y_n)$ sous forme de somme.