

On lance indéfiniment une pièce de monnaie qui tombe sur **Pile** avec probabilité $p \in]0, 1[$. On pose $q = 1 - p$.

- On note, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

P_k : « la pièce tombe sur **Pile** au k^{e} lancer »

F_k : « la pièce tombe sur **Face** au k^{e} lancer »

- On note T la variable aléatoire égale au rang du premier **Face** et on pose $U = T - 1$.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note X_n la variable aléatoire égale à la longueur de la plus grande séquence de **Pile** consécutifs parmi les n premiers lancers ou égale à 0 si il n'y a aucun **Pile**. Par convention, on pose $X_0 = 0$.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $\ell \in \mathbb{N}$, on note $X_n^{(\ell)}$ la variable aléatoire égale à la longueur de la plus grande séquence de **Pile** consécutifs parmi les lancers numéros $\ell + 1, \ell + 2, \dots, \ell + n$. Cette notation généralise la précédente, au sens où $X_n = X_n^{(0)}$. Par convention, pour tout $\ell \in \mathbb{N}^*$, $X_0^{(\ell)} = 0$.

Exemple : si l'issue est $\omega = (\text{Pile}, \text{Pile}, \text{Face}, \text{Pile}, \text{Pile}, \text{Pile}, \dots)$, alors $T(\omega) = 3$, $U(\omega) = 2$, $X_1(\omega) = 1$, $X_2(\omega) = 2$, $X_3(\omega) = 2$, $X_4(\omega) = 2$, $X_5(\omega) = 2$, $X_6(\omega) = 3$, $X_1^{(1)}(\omega) = 1$, $X_2^{(1)}(\omega) = 1$, $X_3^{(1)}(\omega) = 1$, $X_4^{(1)}(\omega) = 2$, $X_5^{(1)}(\omega) = 3$.

Partie A : Etude des variables aléatoires T et U

1. Reconnaître la loi de T . Donner son espérance et sa variance.

Démonstration. L'expérience consiste en une répétition infinie d'épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes de paramètre q (le succès étant « la pièce tombe sur **Face** »).

La variable aléatoire T est égale au rang du premier succès.

On en déduit que $T \hookrightarrow \mathcal{G}(q)$.

D'où $\mathbb{E}(T) = \frac{1}{q}$ et $\mathbb{V}(T) = \frac{p}{q^2}$. □

2. Déterminer la loi de U et calculer son espérance et sa variance. Donner une interprétation de la variable U en une phrase.

Démonstration. On a $U = T - 1$ et $T(\Omega) = \mathbb{N}^*$ donc $U(\Omega) = \mathbb{N}$.

Soit $k \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} \mathbb{P}([U = k]) &= \mathbb{P}([T - 1 = k]) \\ &= \mathbb{P}([T = k + 1]) \\ &= qp^{k+1-1} && \text{car } k + 1 \in \mathbb{N}^* \\ &= qp^k \end{aligned}$$

U admet une espérance et une variance par transformation affine d'une variable aléatoire qui admet une espérance et une variance.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(U) &= \mathbb{E}(T - 1) \\ &= \mathbb{E}(T) - 1 && (\text{par linéarité}) \\ &= \frac{1}{q} - 1 \\ &= \frac{p}{q} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \mathbb{V}(U) &= \mathbb{V}(T - 1) \\ &= \mathbb{V}(T) && (\text{par propriété de la variance}) \\ &= \frac{p}{q^2} \end{aligned}$$

La variable U est égale à la longueur de la séquence de **Pile** se situant avant le premier **Face** (cette longueur peut éventuellement être nulle si le premier lancer donne un **Face**). □

Partie B : Etude des variables aléatoires X_1 et X_2 et X_3

3. Reconnaître les lois de X_1 et X_2 .

Démonstration. On trouve que $X_1 \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$ et $X_2 \hookrightarrow \mathcal{B}(2, p)$. □

4. (a) Démontrer que la loi de X_3 est donnée par le tableau :

$x \in X_3(\Omega)$	0	1	2	3
$\mathbb{P}([X_3 = x])$	$(1-p)^3$	$p(1-p)(3-2p)$	$2p^2(1-p)$	p^3

Démonstration. La plus petite valeur que peut prendre X_3 est 0 (si il n'y a que des **Face** lors des 3 premiers lancers) et la plus grande valeur est 3 (si il n'y a que des **Pile** lors des 3 premiers lancers). Toutes les valeurs intermédiaires sont possibles donc $X_3(\Omega) = \llbracket 0, 3 \rrbracket$.

$[X_3 = 0]$ est réalisé \iff il n'y a aucun **Pile** lors des 3 premiers lancers
 $\iff F_1 \cap F_2 \cap F_3$ est réalisé

Par indépendance : $\mathbb{P}([X_3 = 0]) = (1-p)^3$.

$[X_3 = 3]$ est réalisé \iff il n'y a que des **Pile** lors des 3 premiers lancers
 $\iff P_1 \cap P_2 \cap P_3$ est réalisé

Par indépendance : $\mathbb{P}([X_3 = 3]) = p^3$.

$[X_3 = 2]$ est réalisé \iff la plus longue séquence de **Pile** consécutifs
 parmi les 3 premiers lancers est de longueur 2
 $\iff (F_1 \cap P_2 \cap P_3) \cup (P_1 \cap P_2 \cap F_3)$ est réalisé

Par incompatibilité et indépendance : $\mathbb{P}([X_3 = 2]) = 2p^2(1-p)$.

La famille $([X_3 = k])_{k \in \llbracket 0, 3 \rrbracket}$ est un système complet d'événements donc

$$\sum_{k=0}^3 \mathbb{P}([X_3 = k]) = 1$$

donc

$$\begin{aligned} \mathbb{P}([X_3 = 1]) &= 1 - p^3 - (1-p)^3 - 2p^2(1-p) \\ &= 3p - 5p^2 + 2p^3 \\ &= p(3 - 5p + 2p^2) \\ &= p(1-p)(3-2p) \end{aligned}$$

(1 est racine évidente)

□

(b) Calculer $\mathbb{E}(X_3)$. En considérant qu'il s'agit d'un polynôme en p , en donner une expression entièrement factorisée et qui ne dépend que de p .

Démonstration. La variable X_3 est finie donc admet une espérance.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X_3) &= p(1-p)(3-2p) + 4p^2(1-p) + 3p^3 \\ &= p^3 - p^2 + 3p \\ &= p(p^2 - p + 3) \end{aligned}$$

□

- (c) Calculer $\lim_{p \rightarrow 0} \mathbb{E}(X_3)$ et $\lim_{p \rightarrow 1} \mathbb{E}(X_3)$. Interpréter les résultats.

Démonstration. $\lim_{p \rightarrow 0} \mathbb{E}(X_3) = 0$ et $\lim_{p \rightarrow 1} \mathbb{E}(X_3) = 3$. Ces résultats sont cohérents avec le fait que :

- si $p = 0$, il n'y a que des **Face** (il n'y aura donc aucune séquence de **Pile** consécutifs parmi les 3 premiers lancers et donc X_3 prend toujours la valeur 0)
- si $p = 1$, il n'y a que des **Pile** (on aura donc toujours 3 **Pile** consécutifs parmi les 3 premiers lancers et donc X_3 prend toujours la valeur 3)

□

Partie C : Quelques valeurs extrémales dans le cas général

5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer $X_n(\Omega)$. On justifiera le résultat de manière concise.

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Considérons les n premiers lancers. La variable X_n peut prendre la valeur 0 (si il n'y a aucun **Pile**) ainsi que la valeur n (si il n'y a que des **Pile**). Ce sont les valeurs extrémales possibles pour X_n . De plus, toutes les valeurs intermédiaires sont possibles (pour tout $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, si on obtient k **Pile** suivis de $n-k$ **Face**, alors X_n prend la valeur k).

Donc $X_n(\Omega) = \llbracket 0, n \rrbracket$.

□

6. Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}([X_n = 0])$.

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$[X_n = 0] \text{ est réalisé} \iff \bigcap_{k=1}^n F_k \text{ est réalisé}$$

Donc, par indépendance,

$$\mathbb{P}([X_n = 0]) = (1-p)^n = q^n$$

□

7. Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}([X_n = n])$.

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$[X_n = n] \text{ est réalisé} \iff \bigcap_{k=1}^n P_k \text{ est réalisé}$$

Donc, par indépendance,

$$\mathbb{P}([X_n = n]) = p^n$$

□

8. (*) Soit $n \geq 2$.

- (a) Montrer que, si $j \geq \lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor$, alors on ne peut pas trouver au cours des n premiers lancers une séquence de **Pile** consécutifs qui soit de longueur exactement j et une autre séquence de **Pile** consécutifs qui soit de longueur supérieure ou égale à j .

Démonstration. Soit $j \geq \lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor$. Supposons qu'il existe, au cours des n premiers lancers, une séquence de **Pile** consécutifs qui soit de longueur exactement j et une autre séquence de **Pile** consécutifs qui soit de longueur $k \geq j$.

Ces deux séquences sont nécessairement disjointes et séparées par au moins un **Face**, sinon elles n'en formeraient qu'une et cela contredirait le fait que la première soit de longueur exactement j . Ainsi, pour que cette configuration ait lieu, il faut avoir au moins $j+k+1$ lancers.

Or,

$$\begin{aligned} j &\geq \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor \\ \text{donc } j &> \frac{n+1}{2} - 1 \\ \text{donc } 2j + 1 &> n \\ \text{or } j + k &\geq 2j \\ \text{donc } j + k + 1 &> n \end{aligned}$$

C'est absurde. □

(b) En déduire que, pour tout $\left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor \leq j \leq n-1$, $\mathbb{P}([X_n = j]) = 2p^j q + (n-j-1)p^j q^2$.

Démonstration. Soit $\left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor \leq j \leq n-1$. D'après la question précédente, si, parmi les n premiers lancers, on trouve une séquence de **Pile** consécutifs qui soit de longueur exactement j , alors nécessairement il n'y a pas de séquence de **Pile** consécutifs qui soit strictement plus longue et donc X_n prend la valeur j . On peut le reformuler en :

$$\begin{aligned} [X_n = j] \text{ est réalisé} &\iff \begin{array}{l} \text{Il y a une séquence de Pile consécutifs de longueur} \\ \text{exactement } j \text{ mais pas de séquence strictement plus} \\ \text{longue parmi les } n \text{ premiers lancers} \end{array} \\ &\iff \begin{array}{l} \text{Il y a une séquence de Pile consécutifs de longueur} \\ \text{exactement } j \text{ parmi les } n \text{ premiers lancers} \end{array} \quad (\text{cf question 8a}) \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} [X_n = j] \text{ est réalisé} &\iff P_1 \cap P_2 \cap \dots \cap P_j \cap F_{j+1} \text{ est réalisé} \\ &\quad \text{ou } F_1 \cap P_2 \cap \dots \cap P_{j+1} \cap F_{j+2} \text{ est réalisé} \\ &\quad \dots \\ &\quad \text{ou } F_{n-j-1} \cap P_{n-j} \cap \dots \cap P_{n-1} \cap F_n \text{ est réalisé} \\ &\quad \text{ou } F_{n-j} \cap P_{n-j+1} \cap \dots \cap P_n \text{ est réalisé} \\ &\iff A_1 \cup \left(\bigcup_{k=2}^{n-j} B_k \right) \cup C_{n-j+1} \text{ est réalisé} \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} A_1 &= \left(\bigcap_{k=1}^j P_k \right) \cap F_{j+1} \\ B_i &= F_{i-1} \cap \left(\bigcap_{k=i}^{i+j-1} P_k \right) \cap F_{i+j} \quad (\text{pour tout } i \in \llbracket 2, n-j \rrbracket) \\ C_{n-j+1} &= F_{n-j} \cap \left(\bigcap_{k=n-j+1}^n P_k \right) \end{aligned}$$

Par indépendance des lancers :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A_1) &= p^j q \\ \mathbb{P}(B_i) &= p^j q^2 \quad (\text{pour tout } i \in \llbracket 2, n-j \rrbracket) \\ \mathbb{P}(C_{n-j+1}) &= p^j q \end{aligned}$$

De plus, les événements de la famille $(A_1, B_2, \dots, B_{n-j}, C_{n-j+1})$ sont deux à deux incompatibles. En effet, si deux tels événements sont simultanément réalisés, alors soit il existe un lancer où on a obtenu **Pile** et **Face**, ce qui est absurde, soit on a deux séquences distinctes de longueur j , ce qui est absurde d'après la question 8a.

On en déduit la formule : $\mathbb{P}([X_n = j]) = 2p^j q + (n-j-1)p^j q^2$.

□

9. Soient n et m deux entiers tels que $m > n \geq 1$. Les variables aléatoires X_n et X_m sont-elles indépendantes ?

Démonstration. Soient n et m deux entiers tels que $m > n \geq 1$. On a

$$[X_n = n] \cap [X_m = 0] = \emptyset \quad \text{donc} \quad \mathbb{P}([X_n = n] \cap [X_m = 0]) = 0$$

Or,

$$\mathbb{P}([X_n = n]) \neq 0 \quad \text{et} \quad \mathbb{P}([X_m = 0]) \neq 0 \quad (\text{cf questions 6 et 7})$$

Donc les variables aléatoires X_n et X_m ne sont pas indépendantes. \square

Partie D : Calcul de $\mathbb{P}([X_n \leq 1])$ puis de $\mathbb{P}([X_n = 1])$

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \mathbb{P}([X_n \leq 1])$ et $u_n = \mathbb{P}([X_n = 1])$.

10. Soit $n \geq 2$.

(a) Montrer que

$$\mathbb{P}([X_n \leq 1]) = \mathbb{P}([X_n \leq 1] \cap [U = 0]) + \mathbb{P}([X_n \leq 1] \cap [U = 1])$$

Démonstration. La famille $([U = i])_{i \in \mathbb{N}}$ est un système complet d'événements. En effet, $U(\Omega) = \mathbb{N}$ d'après la question 2. D'après la formule des probabilités totales :

$$\mathbb{P}([X_n \leq 1]) = \sum_{i=0}^{+\infty} \mathbb{P}([X_n \leq 1] \cap [U = i])$$

Or, pour tout $i \geq 2$, $[X_n \leq 1] \cap [U = i] = \emptyset$. En effet, si l'événement $[X_n \leq 1]$ est réalisé, alors la longueur de la première séquence de Pile ne peut pas excéder 1. On en déduit que

$$\mathbb{P}([X_n \leq 1]) = \mathbb{P}([X_n \leq 1] \cap [U = 0]) + \mathbb{P}([X_n \leq 1] \cap [U = 1])$$

\square

(b) Exprimer l'événement $[X_n \leq 1] \cap [U = 0]$ à l'aide de la variable aléatoire $X_{n-1}^{(1)}$, puis l'événement $[X_n \leq 1] \cap [U = 1]$ à l'aide de la variable aléatoire $X_{n-2}^{(2)}$.

Démonstration. On a

$$\begin{aligned} [X_n \leq 1] \cap [U = 0] &= [X_n \leq 1] \cap F_1 \\ &= \boxed{[X_{n-1}^{(1)} \leq 1] \cap F_1} \end{aligned}$$

En effet, le Face obtenu au premier lancer ne compte pas dans la longueur des séquences de Pile consécutifs donc si toutes les séquences obtenues au cours des lancers numéros $2, \dots, n$ ont une longueur inférieure ou égale à 1, il en est de même au cours des n premiers lancers, et réciproquement.

De même,

$$\begin{aligned} [X_n \leq 1] \cap [U = 1] &= [X_n \leq 1] \cap P_1 \cap F_2 \\ &= \boxed{[X_{n-2}^{(2)} \leq 1] \cap P_1 \cap F_2} \end{aligned}$$

\square

(c) En déduire que

$$\mathbb{P}([X_n \leq 1]) = q\mathbb{P}([X_{n-1} \leq 1]) + pq\mathbb{P}([X_{n-2} \leq 1])$$

(on remarquera que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $\ell \in \mathbb{N}$, X_n et $X_n^{(\ell)}$ suivent la même loi)

Démonstration. D'après ce qui précède :

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}([X_n \leq 1]) &= \mathbb{P}([X_n \leq 1] \cap [U = 0]) + \mathbb{P}([X_n \leq 1] \cap [U = 1]) \\
 &= \mathbb{P}\left([X_{n-1}^{(1)} \leq 1] \cap F_1\right) + \mathbb{P}\left([X_{n-2}^{(2)} \leq 1] \cap P_1 \cap F_2\right) \\
 &= \mathbb{P}\left([X_{n-1}^{(1)} \leq 1]\right)\mathbb{P}(F_1) + \mathbb{P}\left([X_{n-2}^{(2)} \leq 1]\right)\mathbb{P}(P_1 \cap F_2) \quad (\text{par indépendance des lancers}) \\
 &= q\mathbb{P}\left([X_{n-1}^{(1)} \leq 1]\right) + pq\mathbb{P}\left([X_{n-2}^{(2)} \leq 1]\right) \\
 &= \boxed{q\mathbb{P}([X_{n-1} \leq 1]) + pq\mathbb{P}([X_{n-2} \leq 1])}
 \end{aligned}$$

(car, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $\ell \in \mathbb{N}$, X_n et $X_n^{(\ell)}$ suivent la même loi)

□

11. (a) En déduire qu'il existe $r_1 > r_2$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tels que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$v_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n$$

On explicitera r_1 et r_2 en fonction de q et $\Delta = q(1 + 3p)$ mais on n'explicitera pas λ et μ .

Démonstration. D'après la question précédente, la suite (v_n) est une suite récurrente linéaire d'ordre 2 :

$$\forall n \geq 2, v_n = qv_{n-1} + pqv_{n-2}$$

Ainsi, par décalage d'indice :

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+2} = qv_{n+1} + pqv_n$$

Notons $P(X) = X^2 - qX - pq$ le polynôme caractéristique associé à cette suite. Son discriminant est :

$$\begin{aligned}
 \Delta &= q^2 + 4pq \\
 &= q(q + 4p) \\
 &= q(1 - p + 4p) \\
 &= q(1 + 3p)
 \end{aligned}$$

(on retrouve la formule de l'énoncé)

On a $\Delta > 0$ donc le polynôme $P(X)$ admet deux racines distinctes :

$$r_1 = \frac{q + \sqrt{\Delta}}{2} \quad \text{et} \quad r_2 = \frac{q - \sqrt{\Delta}}{2}$$

D'après le cours, il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$v_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n$$

et on a bien $r_1 > r_2$ par choix.

□

- (b) Déterminer A et B en fonction de λ, μ, r_1 et r_2 tels que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$v_n = Ar_1^{n+2} + Br_2^{n+2}$$

Démonstration. On pose $A = \frac{\lambda}{r_1^2}$ et $B = \frac{\mu}{r_2^2}$ (on a bien $r_1 \neq 0$ et $r_2 \neq 0$ car $pq \neq 0$ donc 0 n'est pas racine de $P(X)$).

□

- (c) Montrer que $(r_1^2 - r_1^3)A + (r_2^2 - r_2^3)B = 0$.

Démonstration. On remarque que $v_0 = \mathbb{P}([X_0 \leq 1]) = 1$ et $v_1 = \mathbb{P}([X_1 \leq 1]) = 1$. On évalue alors l'égalité de la question précédente en $n = 0$ et en $n = 1$. On a alors

$$\begin{cases} r_1^2 A + r_2^2 B = 1 \\ r_1^3 A + r_2^3 B = 1 \end{cases}$$

donc, en faisant $L_1 - L_2$, on obtient $(r_1^2 - r_1^3)A + (r_2^2 - r_2^3)B = 0$.

□

(d) (*) Montrer que $r_1^2 - r_1^3 = r_2^2 - r_2^3 = p^2q$.

(Indication : on pourra utiliser la définition de r_i comme racine d'un certain polynôme puis exprimer r_i^2 et r_i^3 en fonction de r_i)

Démonstration. Soit $i \in \{1, 2\}$. Par définition de r_i , on a $P(r_i) = 0$ et donc

$$\boxed{r_i^2 = qr_i + pq}$$

D'où

$$\begin{aligned} r_i^3 &= qr_i^2 + pqr_i \\ &= q(qr_i + pq) + pqr_i \\ &= q^2r_i + pq^2 + pqr_i \\ &= pq^2 + qr_i(q + p) \\ &= \boxed{pq^2 + qr_i} \end{aligned}$$

et finalement

$$r_i^2 - r_i^3 = qr_i + pq - (pq^2 + qr_i) = pq - pq^2 = pq(1 - q) = \boxed{p^2q}$$

□

(e) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$v_n = \frac{1}{q\sqrt{\Delta}}(r_1^{n+2} - r_2^{n+2})$$

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}$. On sait que

$$v_n = Ar_1^{n+2} + Br_2^{n+2}$$

De plus, $(r_1^2 - r_1^3)A + (r_2^2 - r_2^3)B = 0$ et $r_1^2 - r_1^3 = r_2^2 - r_2^3 = p^2q$
donc $p^2qA + p^2qB = 0$

donc $A = -B$ (car $p^2q \neq 0$).

On en déduit que

$$v_n = A(r_1^{n+2} - r_2^{n+2})$$

Or, $v_0 = 1 = A(r_1^2 - r_2^2)$, donc

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{r_1^2 - r_2^2} \\ &= \frac{1}{(r_1 - r_2)(r_1 + r_2)} \\ &= \frac{1}{q\sqrt{\Delta}} \end{aligned} \quad (\text{cf question 11a})$$

D'où

$$\boxed{v_n = \frac{1}{q\sqrt{\Delta}}(r_1^{n+2} - r_2^{n+2})}$$

□

12. (a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = \frac{1}{q\sqrt{\Delta}}(r_1^{n+2} - r_2^{n+2}) - q^n$$

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}$. Comme X_n est à valeurs entières, on a

$$[X_n \leq 1] = [X_n = 0] \cup [X_n = 1]$$

et par incompatibilité, on obtient

$$\begin{aligned} v_n &= \mathbb{P}([X_n = 0]) + u_n \\ &= q^n + u_n \end{aligned} \quad (\text{cf question 6})$$

Ainsi, d'après la question précédente :

$$u_n = \frac{1}{q\sqrt{\Delta}}(r_1^{n+2} - r_2^{n+2}) - q^n$$

□

(b) Montrer que $|r_2| \leq |r_1|$ puis que $|r_1| < 1$.

Démonstration. On a

$$r_1 = \frac{q + \sqrt{\Delta}}{2} \quad \text{et} \quad r_2 = \frac{q - \sqrt{\Delta}}{2}$$

Donc

$$\begin{aligned} |r_2| &= \left| \frac{q - \sqrt{\Delta}}{2} \right| \\ &\leq \frac{|q| + |\sqrt{\Delta}|}{2} && (\text{par inégalité triangulaire}) \\ &= \frac{q + \sqrt{\Delta}}{2} && (\text{car } q \geq 0 \text{ et } \sqrt{\Delta} \geq 0) \\ &= r_1 \\ &= |r_1| \end{aligned}$$

De plus,

$$\begin{aligned} |r_1| < 1 &\Leftrightarrow r_1 < 1 \\ &\Leftrightarrow \frac{q + \sqrt{\Delta}}{2} < 1 \\ &\Leftrightarrow q + \sqrt{\Delta} < 2 \\ &\Leftrightarrow \sqrt{\Delta} < 2 - q \\ &\Leftrightarrow \Delta < (2 - q)^2 && (\text{car } \sqrt{\Delta} \geq 0 \text{ et } 2 - q \geq 0) \\ &\Leftrightarrow (1 - p)(1 + 3p) < (1 + p)^2 \\ &\Leftrightarrow 1 - p + 3p - 3p^2 < 1 + 2p + p^2 \\ &\Leftrightarrow 0 < 4p^2 \end{aligned}$$

La dernière inégalité étant vraie, on a $|r_1| < 1$.

□

(c) Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$. Interpréter en une phrase.

Démonstration. D'après la question précédente : $\lim_{n \rightarrow +\infty} r_1^n = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} r_2^n = 0$ car $|r_1| < 1$ et $|r_2| < 1$.

De plus, $q \in]0, 1[$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0$.

Par somme : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

Interprétation : au fur et à mesure que le nombre de lancers devient grand, il devient de plus en plus improbable qu'il n'y ait pas deux Pile consécutifs au cours de l'expérience. □

Partie E : Généralisation au calcul de $\mathbb{P}([X_n \leq j])$ puis de $\mathbb{P}([X_n = j])$

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $j \in \mathbb{N}$, $v_n^{(j)} = \mathbb{P}([X_n \leq j])$ et $u_n^{(j)} = \mathbb{P}([X_n = j])$.

13. (*) Soit $n \geq 1$ et soit $j \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$. En s'inspirant de la question 10, démontrer que

$$\mathbb{P}([X_n \leq j]) = \sum_{i=0}^j qp^i \mathbb{P}([X_{n-i-1} \leq j])$$

Démonstration. Soit $n \geq 1$ et soit $j \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$. On applique la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $([U = i])_{i \in \mathbb{N}}$:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}([X_n \leq j]) &= \sum_{i=0}^{+\infty} \mathbb{P}([X_n \leq j] \cap [U = i]) \\ &= \sum_{i=0}^j \mathbb{P}([X_n \leq j] \cap [U = i]) \quad (\text{car } [X_n \leq j] \cap [U = i] = \emptyset \text{ pour } i > j) \end{aligned}$$

Soit $i \in \llbracket 0, j \rrbracket$. Montrons que

$$[X_n \leq j] \cap [U = i] = [X_{n-(i+1)}^{(i+1)} \leq j] \cap [U = i]$$

par double inclusion.

- Si l'événement $[X_n \leq j]$ est réalisé, alors toutes les séquences de **Pile** consécutifs sont de longueur inférieure ou égale à j parmi les lancers numéros $1, 2, \dots, n$. Ceci implique que toutes les séquences de **Pile** consécutifs parmi les lancers numéros $i+2, i+3, \dots, n$ sont également de longueur inférieure ou égale à j .

Donc $[X_n \leq j] \subset [X_{n-(i+1)}^{(i+1)} \leq j]$ et finalement $[X_n \leq j] \cap [U = i] \subset [X_{n-(i+1)}^{(i+1)} \leq j] \cap [U = i]$.

- Si l'événement $[X_{n-(i+1)}^{(i+1)} \leq j] \cap [U = i]$ est réalisé, alors
 - On obtient une première séquence de **Pile** de longueur i , aux lancers numéros $1, \dots, i$.
 - On obtient **Face** au lancer numéro $i+1$
 - Toutes les séquences de **Pile** consécutifs sont de longueur inférieure ou égale à j parmi les lancers numéros $i+2, i+3, \dots, n$. Notons M la longueur maximale d'une séquence de **Pile** consécutifs parmi ces lancers.

Puisque **Face** est obtenu au lancer numéro $i+1$, la longueur maximale d'une séquence de **Pile** consécutifs parmi les n premiers lancers est $\max(i, M)$. Or $i \leq j$ et $M \leq j$. Donc $\max(i, M) \leq j$ et $[X_n \leq j]$ est réalisé. De plus, $[U = i]$ est réalisé donc $[X_n \leq j] \cap [U = i]$ est réalisé.

Reprenons le calcul précédent :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}([X_n \leq j]) &= \sum_{i=0}^j \mathbb{P}([X_n \leq j] \cap [U = i]) \\ &= \sum_{i=0}^j \mathbb{P}([X_{n-(i+1)}^{(i+1)} \leq j] \cap [U = i]) \\ &= \sum_{i=0}^j \mathbb{P}([X_{n-(i+1)}^{(i+1)} \leq j]) \mathbb{P}([U = i]) \quad (\text{par indépendance des lancers}) \end{aligned}$$

En effet, l'événement $[U = i]$ ne dépend que des lancers numéros $1, \dots, i+1$ tandis que l'événement $[X_{n-(i+1)}^{(i+1)} \leq j]$ ne dépend que des lancers numéros $i+2, i+3, \dots, n$. D'où :

$$\mathbb{P}([X_n \leq j]) = \sum_{i=0}^j qp^i \mathbb{P}([X_{n-i-1} \leq j])$$

car $X_{n-(i+1)}^{(i+1)}$ et X_{n-i-1} suivent la même loi et $\mathbb{P}([U = i]) = qp^i$ (cf question 2). □

14. (a) (*) En déduire que, pour tout $j \geq 0$ et pour tout $n \geq 0$,

$$v_{n+j+1}^{(j)} = \sum_{i=0}^j qp^{j-i} v_{n+i}^{(j)}$$

Démonstration. Soit $j \geq 0$ et $n \geq 0$. On pose $m = n + j + 1$. On a alors $m \geq j + 1$ et d'après la question précédente :

$$v_m^{(j)} = \sum_{i=0}^j qp^i v_{m-i-1}^{(j)}$$

d'où

$$\begin{aligned} v_{n+j+1}^{(j)} &= \sum_{i=0}^j qp^i v_{n+j-i}^{(j)} \\ &= \sum_{k=0}^j qp^{j-k} v_{n+k}^{(j)} && \text{(en posant } k = j - i) \\ &= \boxed{\sum_{i=0}^j qp^{j-i} v_{n+i}^{(j)}} \end{aligned}$$

□

- (b) Soit $j \in \mathbb{N}$. Préciser les valeurs des $j + 1$ premiers termes de la suite $(v_n^{(j)})_{n \in \mathbb{N}}$.

Démonstration. Soit $j \in \mathbb{N}$. Soit $n \in \llbracket 0, j \rrbracket$. L'événement $[X_n \leq j]$ est certain donc

$$\boxed{v_n^{(j)} = 1}$$

□

Ainsi, on a montré que la suite $(v_n^{(j)})_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite récurrente linéaire d'ordre $j + 1$.

15. Soit $j \in \mathbb{N}$. Montrer que la suite $(v_n^{(j)})_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.

Démonstration. Soit $j \in \mathbb{N}$. Soit $n \in \mathbb{N}$. Si l'événement $[X_{n+1} \leq j]$ est réalisé, alors toute séquence de Pile consécutifs au cours des $n + 1$ premiers lancers est de longueur inférieure ou égale à j . C'est donc également le cas si l'on se restreint aux n premiers lancers et donc $[X_n \leq j]$ est réalisé.

D'où $[X_{n+1} \leq j] \subset [X_n \leq j]$ et par croissance de \mathbb{P} , on obtient $\mathbb{P}([X_{n+1} \leq j]) \leq \mathbb{P}([X_n \leq j])$, i.e.

$$v_{n+1}^{(j)} \leq v_n^{(j)}$$

donc $\boxed{\text{la suite } (v_n^{(j)})_{n \in \mathbb{N}} \text{ est décroissante}}$.

□

16. (a) Montrer que, pour tout $j \in \mathbb{N}$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n^{(j)} = 0$.

Démonstration. Soit $j \in \mathbb{N}$. La suite $(v_n^{(j)})_{n \in \mathbb{N}}$ est

- décroissante
- minorée par 0 (chaque terme est la probabilité d'un événement)

D'après le théorème de convergence monotone, la suite $(v_n^{(j)})_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers un réel ℓ qui vérifie : $\ell \geq 0$. Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$v_{n+j+1}^{(j)} = \sum_{i=0}^j qp^{j-i} v_{n+i}^{(j)}$$

et toutes les suites extraites tendent également vers ℓ . Comme il s'agit d'une somme finie, on peut passer à la limite :

$$\ell = \sum_{i=0}^j qp^{j-i} \ell = \ell q \sum_{i=0}^j p^{j-i} = \ell q \frac{1 - p^{j+1}}{1 - p} = \ell(1 - p^{j+1}) = \ell - \ell p^{j+1}$$

donc $\ell p^{j+1} = 0$ et donc $\boxed{\ell = 0}$ car $p \neq 0$.

□

- (b) En déduire que, pour tout $j \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} [X_n \leq j]\right) = 0$ puis que $\mathbb{P}\left(\bigcup_{j=0}^{+\infty} \bigcap_{n=0}^{+\infty} [X_n \leq j]\right) = 0$. Interpréter.

Démonstration. • Soit $j \in \mathbb{N}$. La suite d'événements $([X_n \leq j])_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante (vu en question 15) donc d'après le théorème de la limite monotone :

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} [X_n \leq j]\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}([X_n \leq j]) = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n^{(j)} = 0$$

- Notons, pour tout $j \in \mathbb{N}$, $E_j = \bigcap_{n=0}^{+\infty} [X_n \leq j]$. La suite d'événements $(E_j)_{j \in \mathbb{N}}$ est croissante (si toutes les séquences de Pile consécutifs sont de longueur inférieure ou égale à j alors elles sont toutes de longueur inférieure ou égale à $j+1$). Ainsi, d'après le théorème de la limite monotone :

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{j=0}^{+\infty} \bigcap_{n=0}^{+\infty} [X_n \leq j]\right) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{j=0}^{+\infty} E_j\right) = \lim_{j \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(E_j) = \lim_{j \rightarrow +\infty} 0 = 0$$

En passant au complémentaire, on obtient

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{j=0}^{+\infty} \bigcup_{n=0}^{+\infty} [X_n > j]\right) = 1$$

Ainsi, lorsque l'on lance une infinité de fois une pièce de monnaie, il est quasi-certain de voir apparaître des séquences de Pile consécutifs de longueur arbitrairement grandes. \square

17. (a) Exprimer, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $j \in \mathbb{N}$, $u_n^{(j)}$ en fonction de $v_n^{(j)}$ et $v_n^{(j-1)}$.

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}$ et soit $j \in \mathbb{N}$. Puisque X_n est à valeurs entières, on a

$$[X_n \leq j] = [X_n = j] \cup [X_n \leq j-1]$$

D'où, par incompatibilité :

$$\mathbb{P}([X_n \leq j]) = \mathbb{P}([X_n = j]) + \mathbb{P}([X_n \leq j-1])$$

ce qui se traduit par

$$\boxed{u_n^{(j)} = v_n^{(j)} - v_n^{(j-1)}}$$

\square

- (b) Montrer que, pour tout $j \in \mathbb{N}$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n^{(j)} = 0$.

Démonstration. Soit $j \in \mathbb{N}$ et soit $n \in \mathbb{N}$. On a $[X_n = j] \subset [X_n \leq j]$ donc $\mathbb{P}([X_n = j]) \leq \mathbb{P}([X_n \leq j])$. D'où

$$0 \leq \mathbb{P}([X_n = j]) \leq \mathbb{P}([X_n \leq j])$$

i.e.

$$0 \leq u_n^{(j)} \leq v_n^{(j)}$$

Or, $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n^{(j)} = 0$ (cf question 16a) donc par théorème d'encadrement : $\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n^{(j)} = 0}$.

\square

- (c) La suite de variables aléatoires $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge-t-elle en loi vers une variable aléatoire X telle que $X(\Omega) = \mathbb{N}$?

Démonstration. On a vu que, pour tout $j \in \mathbb{N}$,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}([X_n = j]) = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n^{(j)} = 0$$

Si la suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge en loi vers une variable aléatoire X telle que $X(\Omega) = \mathbb{N}$, alors :

- $X(\Omega) = \mathbb{N}$
- pour tout $j \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}([X = j]) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}([X_n = j]) = 0$

Donc $\sum_{j=0}^{+\infty} \mathbb{P}([X = j]) = 0 \neq 1$. C'est absurde. Donc la suite de variables aléatoires $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne converge pas en loi vers une telle variable aléatoire. \square

Partie F : Simulation informatique

18. On importe la bibliothèque `numpy.random` as `rd`. On rappelle que la commande `rd.binomial(n,p,d)` renvoie un vecteur contenant d simulations indépendantes de la loi binomiale de paramètres n et p . Compléter le programme **Python** suivant pour qu'il simule la variable aléatoire X_n (on codera les Pile par des 1 et les Face par des 0).

```

1  def SimulX(n,p):
2      L = rd.binomial(1,p,n) #vecteur contenant les résultats des n lancers
3      m = 0 #contiendra la longueur maximale de toutes les séquences de Pile
4      l = 0 #contiendra la longueur de la séquence en cours
5      for k in range(n):
6          if L[k]==1:
7              l = l + 1
8          else:
9              if l > m:
10                 m = l
11                 l = 0
12         if l > m:
13             m = l
14     return m

```

On supposera pour la suite des simulations que $p = \frac{1}{2}$.

20. Compléter le programme suivant pour qu'il prenne en argument un entier naturel n et renvoie la matrice

$$V_n = \begin{pmatrix} v_0^{(0)} & v_1^{(0)} & v_2^{(0)} & \dots & v_n^{(0)} \\ v_0^{(1)} & v_1^{(1)} & v_2^{(1)} & \dots & v_n^{(1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_0^{(n)} & v_1^{(n)} & v_2^{(n)} & \dots & v_n^{(n)} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$$

```

1  def CalculV(n):
2      V = np.zeros([n+1,n+1]) #crée la matrice V_n, initialement remplie de zéros
3      for j in range(n+1):
4          for i in range(j+1):
5              V[j,i] = 1
6          for i in range(j+1,n+1):
7              for k in range(j+1):
8                  V[j,i] = V[j,i] + V[j,i-k-1]/(2**(k+1))
9     return V

```

21. Compléter le programme suivant pour qu'il prenne en argument un entier naturel n et renvoie la matrice

$$U_n = \begin{pmatrix} u_0^{(0)} & u_1^{(0)} & u_2^{(0)} & \dots & u_n^{(0)} \\ u_0^{(1)} & u_1^{(1)} & u_2^{(1)} & \dots & u_n^{(1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_0^{(n)} & u_1^{(n)} & u_2^{(n)} & \dots & u_n^{(n)} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$$

```

1  def calculU(n):
2      V = CalculV(n)
3      U = np.zeros([n+1,n+1])
4      for i in range(n+1):
5          U[0,i] = V[0,i]
6      for j in range(1,n+1):
7          for i in range(n+1):
8              U[j,i] = V[j,i]-V[j-1,i]
9     return U

```

22. Pour la curiosité, on affiche l'histogramme en fréquence des lois de X_5 , X_{10} , X_{20} et X_{40} , ainsi que le tracé des suites $(u_n^{(j)})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n^{(j)})_{n \in \mathbb{N}}$ pour quelques valeurs de j .

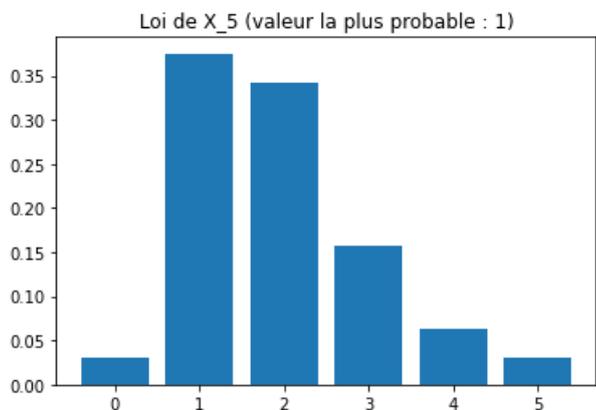


FIGURE 1 – Loi de X_5

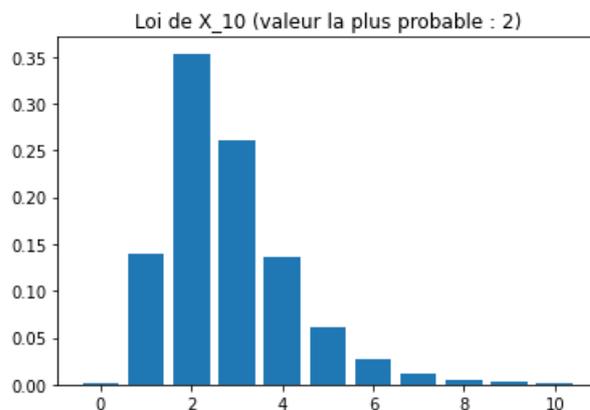


FIGURE 2 – Loi de X_{10}

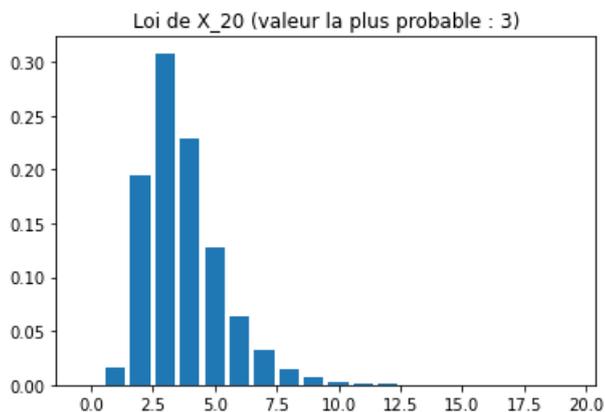


FIGURE 3 – Loi de X_{20}

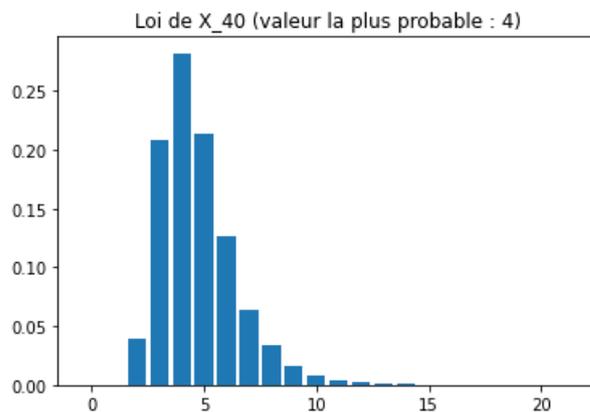


FIGURE 4 – Loi de X_{40}

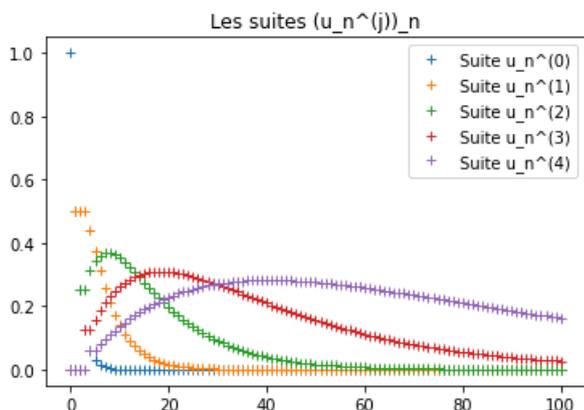


FIGURE 5 – Tracé de quelques suites $(u_n^{(j)})_{n \in \mathbb{N}}$

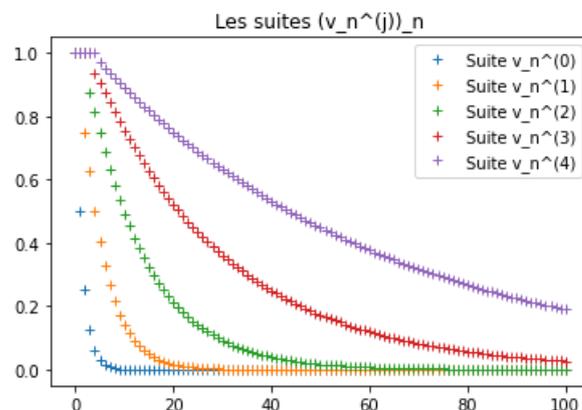


FIGURE 6 – Tracé de quelques suites $(v_n^{(j)})_{n \in \mathbb{N}}$