1 Une matrice possédant une unique valeur propre

Soit $M = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. On compile le code **Python** suivant :

```
M = np.array([[4,-3,1],[1,1,0],[0,1,1]])
print(al.matrix_power(M-2*np.eye(3),3))
```

   et on obtient l'affichage :

```
[[0.  0.  0.]
 [0.  0.  0.]
 [0.  0.  0.]]
```

   Traduire ce résultat en une égalité matricielle.
2. Déterminer $\mathrm{Sp}(M)$.
3. La matrice M est-elle diagonalisable ?

2 Deux matrices possédant deux valeurs propres distinctes

2.1 Le cas diagonalisable

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer une base et la dimension de $E_1(A)$.
2. Déterminer une base et la dimension de $E_{-1}(A)$.
3. En déduire $\mathrm{Sp}(A)$. La matrice A est-elle inversible ?
4. Démontrer l'existence :
   - d'une matrice $P \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ inversible, dont la 2^e^ ligne est $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
   - d'une matrice $D \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ diagonale

   telles que $A = PDP^{-1}$. On explicitera les matrices P et D.

2.2 Le cas non diagonalisable

Soit $B = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

1. (a) Calculer $(B-I)(B-2I)$ puis $(B-I)(B-2I)^2$ en minimisant le nombre de produits calculés.
   (b) En déduire que B est inversible et donner une expression de B^{-1} en fonction de B et I.
2. (a) Donner un polynôme annulateur de B et lister les valeurs propres possibles de B.
   (b) Déterminer $\mathrm{Sp}(B)$.
3. (a) Calculer la dimension des sous-espaces propres associés aux valeurs propres de B. On ne demande pas d'en déterminer une base.
   (b) La matrice B est-elle diagonalisable ?
4. On pose $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Montrer que P est inversible et calculer P^{-1}.

5. On pose $T = P^{-1}BP$. Calculer T.
6. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $B^n = PT^nP^{-1}$.
7. On pose $T = D + N$, où D est une matrice diagonale et où N est une matrice dont tous les coefficients diagonaux sont nuls. Expliciter D et N.
8. Soit $n \in \mathbb{N}$.
   (a) Exprimer T^n comme une combinaison linéaire de D^n et ND^{n-1} puis sous forme de tableau matriciel explicite en fonction de n.
   (b) En déduire B^n sous forme de tableau matriciel explicite en fonction de n.

3 Une matrice possédant trois valeurs propres distinctes

Soit $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$.

1. La matrice C est-elle inversible ? En déduire une valeur propre de C.
2. On compile le code **Python** suivant :

```
C = np.array([[1,1,1],[0,0,-1],[-2,-2,-1]])
a = al.matrix_rank(C-np.eye(3))
b = al.matrix_rank(C+np.eye(3))
print('a =',a)
print('b =',b)
```

   et on obtient l'affichage :

   a = 2
   b = 2

   En déduire deux autres valeurs propres de C.
3. Donner $\mathrm{Sp}(C)$. La matrice C est-elle diagonalisable ?
4. Expliciter une matrice $P \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ inversible et une matrice $D \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ diagonale dont les coefficients diagonaux sont dans l'ordre croissant telles que $C = PDP^{-1}$.