DS3 (vA) - Correction

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidat·es sont invité·es à ***encadrer*** *dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*
Aucun document n'est autorisé. ***L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique*** *est* ***interdite****. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*
Si au cours de l'épreuve, un candidat ou une candidate repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

On suppose, et c'est valable pour toute l'épreuve, que les librairies suivantes sont importées sous leurs alias habituels :

- `import numpy as np`
- `import numpy.random as rd`
- `import matplotlib.pyplot as plt`

Exercice 1 (Source : Arnaud Jobin)

Partie I

On note $E = \mathbb{R}_2[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 2. Soit f l'application définie sur E qui associe à tout polynôme $P \in E$, le polynôme $f(P)$ défini par :

$$\big(f(P)\big)(X) \ = \ (1 - X - X^2)\ P'(X) + \frac{1}{2}(-1 - X + 3\,X^2 + 2\,X^3)\ P''(X)$$

Dans la suite, on note $\mathscr{B} = (P_0, P_1, P_2)$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.

Commentaire

Dans les exercices, la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ est parfois directement notée $(1, X, X^2)$. C'est une source fréquente d'erreurs et confusions. Il est donc **fortement recommandé** d'introduire la base canonique sous la forme (P_0, P_1, P_2) si ce n'est pas fait dans l'énoncé (et si la notation P_i n'est pas utilisée par ailleurs).

1. Montrer que f est un endomorphisme de E.

Démonstration.

- Démontrons que f est linéaire
  Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ et soit $(P, Q) \in (\mathbb{R}_2[X])^2$.

$$\begin{aligned}
& \Big(f(\lambda \cdot P + \mu \cdot Q)\Big)(X) \\
= \ & (1 - X - X^2)\ (\lambda \cdot P + \mu \cdot Q)'(X) + \frac{1}{2}(-1 - X + 3\,X^2 + 2\,X^3)\ (\lambda \cdot P + \mu \cdot Q)''(X) \\
= \ & (1 - X - X^2)\ (\lambda \cdot P' + \mu \cdot Q')(X) + \frac{1}{2}(-1 - X + 3\,X^2 + 2\,X^3)\ (\lambda \cdot P'' + \mu \cdot Q'')(X) \quad \textit{(par linéarité des applications dérivée première et seconde)} \\
= \ & \lambda \cdot (1 - X - X^2)\ P'(X) \ + \ \mu \cdot (1 - X - X^2)\ Q'(X) \\
& + \lambda \cdot \frac{1}{2}(-1 - X + 3\,X^2 + 2\,X^3)\ P''(X) \ + \ \mu \cdot \frac{1}{2}(-1 - X + 3\,X^2 + 2\,X^3)\ Q''(X) \\
= \ & \lambda \cdot \Big(\ (1 - X - X^2)\ P'(X) + \frac{1}{2}(-1 - X + 3\,X^2 + 2\,X^3)\ P''(X)\ \Big) \\
& + \mu \cdot \Big(\ (1 - X - X^2)\ Q'(X) + \frac{1}{2}(-1 - X + 3\,X^2 + 2\,X^3)\ Q''(X)\ \Big) \\
= \ & \lambda \cdot \Big(f(P)\Big)(X) + \mu \cdot \Big(f(Q)\Big)(X) \ = \ \Big(\lambda \cdot f(P) + \mu \cdot f(Q)\Big)(X)
\end{aligned}$$

  L'application f est donc linéaire.
- Démontrons que f est à valeurs dans $\mathbb{R}_2[X]$
  Soit $P \in \mathbb{R}_2[X]$.
  - Comme $\deg(P) \leqslant 2$, alors :
    × $\deg(P') \leqslant 1$ donc $\deg\big((1 - X - X^2)\ P'\big) \leqslant 3$.
    × $\deg\left(\dfrac{1}{2}(-1 - X + 3\,X^2 + 2\,X^3)\ Q''\right) \leqslant 3$.

    On en déduit : $\deg\left((1 - X - X^2)\ P'(X) + \dfrac{1}{2}(-1 - X + 3\,X^2 + 2\,X^3)\ P''(X)\right) \leqslant 3$.

Commentaire

- Rappelons tout d'abord les propriétés à connaître concernant le degré des polynômes.
  Si P et Q sont deux polynômes de $\mathbb{R}[X]$ alors :

$$\boxed{\deg\big(P \times Q\big) \;=\; \deg(P) + \deg(Q)} \qquad \boxed{\deg\big(P + Q\big) \;=\; \max\big(\deg(P), \deg(Q)\big)}$$

- L'argument de degré déroulé dans la démonstration ci-dessus permet généralement de conclure que $f(P)$ est un polynôme de $\mathbb{R}_2[X]$. Ce n'est malheureusement pas le cas ici et il faut donc faire une étude plus précise (*cf* ci-dessous).

– Comme $P \in \mathbb{R}_2[X]$, il existe $(a_0, a_1, a_2) \in \mathbb{R}^3$ tel que : $P = a_0 \cdot P_0 + a_1 \cdot P_1 + a_2 \cdot P_2$.
Notons $R = a_0 \cdot P_0 + a_1 \cdot P_1$. On a alors $P = R + a_2 \cdot P_2$ et par linéarité de f :

$$f(R + a_2 \cdot P_2) \;=\; f(R) + a_2 \cdot f(P_2)$$

En utilisant la méthodologie précédente, on démontre : $\deg\big(f(R)\big) \leqslant 2$.
Il reste alors à déterminer $\deg\big(f(P_2)\big)$. Or :

$$\begin{aligned}
\Big(f(P_2)\Big)(X) &= (1 - X - X^2)\ P_2'(X) + \frac{1}{2}\,(-1 - X + 3\,X^2 + 2\,X^3)\ P_2''(X) \\
&= 2X\ (1 - X - X^2) + \cancel{2}\ \frac{1}{\cancel{2}}\,(-1 - X + 3\,X^2 + 2\,X^3) \\
&= 2X - 2X^2 - \cancel{2X^3} - 1 - X + 3X^2 + \cancel{2X^3} \;=\; -1 + X + X^2
\end{aligned}$$

Ainsi, $\deg\big(f(P_2)\big) = 2$ et d'après ce qui précède : $f(P) \in \mathbb{R}_2[X]$.

$$\boxed{\text{L'application } f \text{ est bien un endomorphisme de } \mathbb{R}_2[X].}$$

□

2. Déterminer la matrice A représentative de f dans la base canonique de E.

Démonstration.

- $$\begin{aligned}
\Big(f(P_0)\Big)(X) &= (1 - X - X^2)\ P_0'(X) + \frac{1}{2}(-1 - X + 3\,X^2 + 2\,X^3)\ P_0''(X) \\
&= 0 \qquad \textit{(car } P_0'(X) = 0 \textit{ et } P_0''(X) = 0\textit{)}
\end{aligned}$$

  Ainsi : $f(P_0) = 0 \cdot P_0 + 0 \cdot P_1 + 0 \cdot P_2$. On en conclut : $\mathrm{Mat}_{(P_0,P_1,P_2)}\big(f(P_0)\big) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

- $$\begin{aligned}
\Big(f(P_1)\Big)(X) &= (1 - X - X^2)\ P_1'(X) + \frac{1}{2}(-1 - X + 3\,X^2 + 2\,X^3)\ P_1''(X) \\
&= 1 - X - X^2 \qquad \textit{(car } P_1'(X) = 1 \textit{ et } P_1''(X) = 0\textit{)}
\end{aligned}$$

  Ainsi : $f(P_1) = 1 \cdot P_0 - 1 \cdot P_1 - 1 \cdot P_2$. On en conclut : $\mathrm{Mat}_{(P_0,P_1,P_2)}\big(f(P_1)\big) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

- $$\begin{aligned}
\Big(f(P_2)\Big)(X) &= (1 - X - X^2)\ P_2'(X) + \frac{1}{2}(-1 - X + 3\,X^2 + 2\,X^3)\ P_2''(X) \\
&= -1 + X + X^2 \qquad \textit{(le calcul a déjà été effectué au-dessus)}
\end{aligned}$$

  Ainsi : $f(P_1) = -1 \cdot P_0 + 1 \cdot P_1 + 1 \cdot P_2$. On en conclut : $\mathrm{Mat}_{(P_0,P_1,P_2)}\big(f(P_2)\big) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$$\boxed{\text{Finalement : } A = \mathrm{Mat}_{(P_0,P_1,P_2)}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.}$$

□

3. Montrer : $f \circ f = 0_{\mathscr{L}(E)}$.

Démonstration.

- Tout d'abord :

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Or :

$$\begin{array}{rcll} A \times A = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})} & \Leftrightarrow & \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_1}(f) \times \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_1}(f) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_1}\big(0_{\mathscr{L}(E)}\big) & \textit{(par définition de } A\textit{)} \\ & \Leftrightarrow & \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_1}(f \circ f) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_1}\big(0_{\mathscr{L}(E)}\big) & \\ & \Leftrightarrow & f \circ f = 0_{\mathscr{L}(E)} & \textit{(car } \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_1}(\cdot) \textit{ est un isomorphisme)} \end{array}$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } f \circ f = 0_{\mathscr{L}(E)}.}$$

□

4. Démontrer que f n'est pas bijectif.

Démonstration.
La matrice $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_1}(f)$ est non inversible car elle possède une colonne constituée uniquement de 0.

$$\boxed{\text{On en déduit que l'application } f \text{ n'est pas bijective.}}$$

□

5. a) Déterminer des bases de $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ ainsi que les dimensions de ces espaces vectoriels.

Démonstration.
Soit $P \in \mathbb{R}_2[X]$.

- Il existe donc $(a_0, a_1, a_2) \in \mathbb{R}^3$ tel que : $P = a_0 \cdot P_0 + a_1 \cdot P_1 + a_2 \cdot P_2$.
  Notons alors $U = \mathrm{Mat}_{(P_0,P_1,P_2)}(P) = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$.
- On a alors :

$$\begin{array}{rcl} P \in \mathrm{Ker}(f) & \Longleftrightarrow & f(P) = 0_{\mathbb{R}_2[X]} \\ & \Longleftrightarrow & A\,U = 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \\ & \Longleftrightarrow & \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ & \Longleftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcrcl} & a_1 & - & a_2 & = 0 \\ - & a_1 & + & a_2 & = 0 \\ - & a_1 & + & a_2 & = 0 \end{array} \right. \\ & \underset{L_3 \leftarrow L_3 + L1}{\overset{L_2 \leftarrow L_2 + L1}{\Longleftrightarrow}} & \left\{ \begin{array}{rcl} a_1 - a_2 & = & 0 \\ 0 & = & 0 \\ 0 & = & 0 \end{array} \right. \\ & \Longleftrightarrow & \{\ a_1 = a_2 \end{array}$$

- On en déduit :

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ker}(f) &= \{P \in \mathbb{R}_2[X] \mid f(P) = 0_{\mathbb{R}_2[X]}\} \\
&= \{a_0 \cdot P_0 + a_1 \cdot P_1 + a_2 \cdot P_2 \in \mathbb{R}_2[X] \mid a_1 = a_2\} \\
&= \{a_0 \cdot P_0 + a_2 \cdot P_1 + a_2 \cdot P_2 \mid (a_0, a_2) \in \mathbb{R}^2\} \\
&= \{a_0 \cdot P_0 + a_2 \cdot (P_1 + P_2) \mid (a_0, a_2) \in \mathbb{R}^2\} \ = \ \mathrm{Vect}\left(P_0, P_1 + P_2\right)
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Vect}\left(P_0, P_1 + P_2\right)}$$

Commentaire

Il faut faire attention aux objets manipulés. On doit déterminer $E_0(f) = \mathrm{Ker}(f)$, noyau d'un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$. On doit donc obtenir un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_2[X]$. Si P et $U = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_1}(P)$ sont deux représentations différentes du même polynôme P, cela n'autorise pas pour autant à écrire l'égalité entre ces deux éléments :

$$\underbrace{a_0 \cdot P_0 + a_1 \cdot P_1 + a_2 \cdot P_2}_{\in \mathbb{R}_2[X]} \ \cancel{=} \ \underbrace{\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}}_{\in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \quad \text{et} \quad \underbrace{\mathrm{Vect}\left(P_0, P_1 + P_2\right)}_{E_0(f)} \ \cancel{=} \ \underbrace{\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)}_{E_0(A)}$$

- La famille $\mathcal{H}_1 = \big(P_0, P_1 + P_2\big)$ est :
  - × génératrice de $\mathrm{Ker}(f)$,
  - × libre car constituée uniquement de deux vecteurs non colinéaires.

  On en déduit que $\mathcal{H}_1$ est une base de $\mathrm{Ker}(f)$.

$$\boxed{\dim\big(\mathrm{Ker}(f)\big) = \mathrm{Card}\left(\mathcal{H}_1\right) = 2}$$

- D'autre part :

$$\begin{aligned}
\mathrm{Im}(f) &= \mathrm{Vect}\left(f(P_0), f(P_1), f(P_2)\right) \\
&= \mathrm{Vect}\left(0_{\mathbb{R}_2[X]},\ P_0 - P_1 - P_2,\ -P_0 + P_1 + P_2\right) \\
&= \mathrm{Vect}\left(P_0 - P_1 - P_2\right)
\end{aligned}$$

  La famille $\mathcal{H}_2 = \big(P_0 - P_1 - P_2\big)$ est :
  - × génératrice de $\mathrm{Im}(f)$,
  - × libre car constituée uniquement d'un vecteur non nul.

  On en déduit que $\mathcal{H}_2$ est une base de $\mathrm{Im}(f)$.

$$\boxed{\dim\big(\mathrm{Im}(f)\big) = \mathrm{Card}\left(\mathcal{H}_2\right) = 1}$$

Commentaire

La dimension de $\mathrm{Im}(f)$ peut aussi être obtenue à l'aide du théorème du rang.
Plus précisément :

$$\underbrace{\dim(E)}_{=\,3} \ = \ \underbrace{\dim\big(\mathrm{Ker}(f)\big)}_{=\,2} \ + \ \dim\big(\mathrm{Im}(f)\big)$$

Ainsi, $\dim\big(\mathrm{Im}(f)\big) = 3 - 2 = 1$.

b) Démontrer que la famille $\mathcal{F} = \big(f(P_1), P_0\big)$ est une base de $\text{Ker}(f)$.

Démonstration.

- Remarquons tout d'abord :
  - $\times$ $f\big(f(P_1)\big) = (f \circ f)(P_1) = 0_{\mathbb{R}_2[X]}$ d'après la question ***2***.
  - $\times$ $f(P_0) = 0_{\mathbb{R}_2[X]}$ d'après la question ***3***.

$$\boxed{\text{Ainsi, } \big(f(P_1), P_0\big) \text{ est une famille d'éléments de } \text{Ker}(f).}$$

- De plus : $f(P_1) = P_0 - P_1 - P_2$.
  La famille $\mathcal{F} = \big(P_0, P_0 - P_1 - P_2\big)$ est :
  - $\times$ libre car constituée uniquement de deux vecteurs non colinéaires,
  - $\times$ telle que : $\text{Card}(\mathcal{F}) = 2 = \dim\big(\text{Ker}(f)\big)$.

$$\boxed{\text{On en déduit que } \mathcal{F} \text{ est une base de } \text{Ker}(f).}$$

□

6. a) Montrer que la famille $\mathcal{G} = \big(P_1, f(P_1), P_0\big)$ est une base de E.

Démonstration.

- Démontrons que la famille $\big(P_1, f(P_1), P_0\big)$ est libre.
  Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$. Supposons : $\lambda_1 \cdot P_1 + \lambda_2 \cdot f(P_1) + \lambda_3 \cdot P_0 = 0_{\mathbb{R}_2[X]}$. $(*)$

$$\begin{array}{rcrcl}
\text{Or :} \quad (*) & \Longleftrightarrow & \lambda_1 \cdot P_1(X) + \lambda_2 \cdot \big(f(P_1)\big)(X) + \lambda_3 \cdot P_0(X) & = & 0_{\mathbb{R}_2[X]} \\
& \Longleftrightarrow & \lambda_1 \cdot X + \lambda_2 \cdot (1 - X - X^2) + \lambda_3 \cdot 1 & = & 0_{\mathbb{R}_2[X]} \\
& \Longleftrightarrow & (\lambda_2 + \lambda_3) \cdot 1 + (\lambda_1 - \lambda_2) \cdot X - \lambda_2 \cdot X^2 & = & 0_{\mathbb{R}_2[X]}
\end{array}$$

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcl}
& & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0 \\
\lambda_1 & - & \lambda_2 & & & = & 0 \\
& - & \lambda_2 & & & = & 0
\end{array}\right.$$

$$\underset{}{\overset{L_1 \leftrightarrow L_2}{\Longleftrightarrow}} \left\{\begin{array}{rcrcrcl}
\lambda_1 & - & \lambda_2 & & & = & 0 \\
& & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0 \\
& - & \lambda_2 & & & = & 0
\end{array}\right.$$

$$\overset{L_3 \leftrightarrow L_3 + L_2}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{array}{rcrcrcl}
\lambda_1 & - & \lambda_2 & & & = & 0 \\
& & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0 \\
& & & & \lambda_3 & = & 0
\end{array}\right.$$

$$\Longleftrightarrow \left\{\ \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0\right.$$

(par remontées successives)

$$\boxed{\text{La famille } \big(P_1, f(P_1), P_0\big) \text{ est donc libre.}}$$

- La famille $\mathcal{G}$ est :
  - $\times$ libre.
  - $\times$ telle que : $\text{Card}\big(\mathcal{G}\big) = 3 = \dim\big(\mathbb{R}_2[X]\big)$.

$$\boxed{\text{On en déduit que } \mathcal{G} \text{ est une base de } \mathbb{R}_2[X].}$$

□

b) Déterminer la matrice de f dans la base $\big(P_1, f(P_1), P_0\big)$.

Démonstration.

- $f(P_1) = 0 \cdot P_1 + 1 \cdot f(P_1) + 0 \cdot P_0$. On en conclut : $\mathrm{Mat}_{(P_1,f(P_1),P_0)}\big(f(P_1)\big) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.
- $f\big(f(P_1)\big) = 0 \cdot P_1 + 0 \cdot f(P_1) + 0 \cdot P_0$. On en conclut : $\mathrm{Mat}_{(P_1,f(P_1),P_0)}\Big(f\big(f(P_1)\big)\Big) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.
- $f(P_0) = 0 \cdot P_1 + 0 \cdot f(P_1) + 0 \cdot P_0$. On en conclut : $\mathrm{Mat}_{(P_1,f(P_1),P_0)}\big(f(P_0)\big) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

$$\boxed{\text{Finalement : } \mathrm{Mat}_{(P_1,f(P_1),P_0)}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.}$$

□

Partie II

On note désormais E un espace vectoriel **quelconque** de dimension 3.
On considère dans la suite f un endomorphisme de E différent de l'endomorphisme nul de E.

7. Montrer : $f \circ f = 0_{\mathscr{L}(E)} \Leftrightarrow \mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(f)$.
Démonstration.
On procède par double implication.

($\Leftarrow$) Supposons $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(f)$.
Il s'agit de démontrer : $f \circ f = 0_{\mathscr{L}(E)}$ ce qui signifie : $\forall x \in E$, $(f \circ f)(x) = 0_E$.
Soit $x \in E$. Alors :

$$\begin{array}{rcl} (f \circ f)(x) & = & f(f(x)) \\ & = & 0_E \qquad \textit{(car } f(x) \in \mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(f)\textit{)} \end{array}$$

Ainsi : $f \circ f = 0_{\mathscr{L}(E)}$.

$$\boxed{\text{On a bien démontré : } \mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(f) \ \Rightarrow\ f \circ f = 0_{\mathscr{L}(E)}.}$$

Commentaire

Cette question est plus théorique que celles de la première Partie. Dans la deuxième partie, l'endomorphisme f n'est pas connu. On connaît simplement des propriétés sur f et on cherche à en démontrer de nouvelles. Ce type d'exercice d'algèbre théorique peut donc paraître un peu abrupte. Pourtant, on se rend compte, à la lecture de cette démonstration, que de tels exercices peuvent donner lieu à des questions très simples. L'idée est ici de vérifier que les définitions de base (comme celles du noyau et de l'image d'une application linéaire) sont bien connues. En déroulant ces définitions, on obtient le résultat.

- Supposons : $f \circ f = 0_{\mathscr{L}(E)}$.
  Il s'agit de démontrer : $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(f)$.
  Soit $y \in \mathrm{Im}(f)$.
  Il existe donc $x \in E$ tel que : $y = f(x)$. Alors :

$$\begin{array}{rcl} f(y) & = & f(f(x)) \\ & = & (f \circ f)(x) \ = \ 0_E \qquad \textit{(car } f \circ f = 0_{\mathscr{L}(E)}\textit{)} \end{array}$$

  Ainsi, $y \in \mathrm{Ker}(f)$.
  On en conclut : $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(f)$.

$$\boxed{\text{On a bien démontré : } f \circ f = 0_{\mathscr{L}(E)} \ \Rightarrow\ \mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(f).}$$ □

Commentaire

- Insistons sur la facilité de cette démonstration. Comme expliqué dans la remarque précédente, il s'agit essentiellement de mettre en place la structure de démonstration et de dérouler les définitions.
- Précisons la manière d'agir.

  1 `Soit` $y \in \mathrm{Im}(f)$.
  2 `Il existe donc` $x \in E$ `tel que :` $y = f(x)$. `Alors :`
  3 $f(y) = \dots$
  4 $\quad = \dots$
  5 $\quad = 0_E$
  6 `Ainsi,` $y \in \mathrm{Ker}(f)$.

  × Les lignes 1 et 6 correspondent à la mise en place de la structure de démonstration : il s'agit de démontrer une inclusion. On choisit donc un élément dans $\mathrm{Im}(f)$ et on démontre qu'il est dans $\mathrm{Ker}(f)$.

  × La ligne 2 correspond au déroulé de la définition de l'image d'une application.
  Dire : $y \in \mathrm{Im}(f)$ c'est exactement dire que y s'écrit sous la forme $f(x)$ pour un $x \in E$.

  × La ligne 3 correspond au déroulé de la définition du noyau d'une application linéaire. Dire : $y \in \mathrm{Ker}(f)$ c'est exactement dire : $f(y) = 0_E$. Cela permet d'écrire le début de la ligne 3 ainsi que le résultat en ligne 5.

  C'est seulement à ce moment que l'on rentre dans la phase de démonstration à proprement parler et que l'on s'intéresse aux hypothèses (ici, le fait que l'on ait : $f^2 = 0_{\mathscr{L}(E)}$).
- Le message est clair : sur les 6 lignes de rédaction, 4 proviennent de la présentation et seules 2 correspondent à la démonstration. Il n'est donc pas acceptable de ne pas savoir **commencer** ce type de questions, car cela démontre un défaut de connaissance du cours (définitions du chapitre et / ou structures de démonstration).

On suppose dans les questions ***8.*** et ***9.*** : $f \circ f = 0_{\mathscr{L}(E)}$.

8. a) Comparer les dimensions de $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$.

Démonstration.
Comme $f \circ f = 0_{\mathscr{L}(E)}$ alors, d'après la question précédente : $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(f)$.

$$\boxed{\text{On en conclut : } \dim\big(\mathrm{Im}(f)\big) \leqslant \dim\big(\mathrm{Ker}(f)\big).}$$ □

b) Déterminer alors précisément les dimensions de ces deux espaces vectoriels.

Démonstration.
Notons $m = \dim\big(\mathrm{Im}(f)\big)$.

- D'après le théorème du rang :

$$\begin{array}{ccccc} \dim(E) & = & \dim\big(\mathrm{Ker}(f)\big) & + & \dim\big(\mathrm{Im}(f)\big) \\ \shortparallel & & & & \shortparallel \\ 3 & & & & m \end{array}$$

  Ainsi, $\dim\big(\mathrm{Ker}(f)\big) = 3 - m$.

- D'après la question précédente : $\dim\big(\mathrm{Im}(f)\big) = m \leqslant 3 - m = \dim\big(\mathrm{Ker}(f)\big)$. Or :

$$m \leqslant 3 - m \quad \Leftrightarrow \quad 2m \leqslant 3 \quad \Leftrightarrow \quad m \leqslant \frac{3}{2}$$

Ainsi, seuls deux cas se présentent :

– si $m = 0$
Remarquons :
× $\dim\big(\mathrm{Ker}(f)\big) = 3 - m = 3 = \dim(E)$,
× $\mathrm{Ker}(f) \subset E$.
On en déduit : $\mathrm{Ker}(f) = E$. Autrement dit :

$$\forall x \in E,\ f(x) = 0_E$$

C'est impossible car on a supposé dans l'énoncé : $f \neq 0_{\mathscr{L}(E)}$.

– si $m = 1$ alors $\dim\big(\mathrm{Ker}(f)\big) = 3 - m = 2$.

$$\boxed{\text{Finalement, } \dim\big(\mathrm{Ker}(f)\big) = 2 \text{ et } \dim\big(\mathrm{Im}(f)\big) = 1.}$$

□

9. Soient $u \notin \mathrm{Ker}(f)$ et $v \in \mathrm{Ker}(f) \setminus \mathrm{Im}(f)$.

a) Montrer que la famille $\mathcal{F} = (f(u), v)$ est une base de $\mathrm{Ker}(f)$.

Démonstration.

- Remarquons tout d'abord :
× $f\big(f(u)\big) = (f \circ f)(u) = 0_E$ car $f \circ f = 0_{\mathscr{L}(E)}$.
× $f(v) = 0_E$ car $v \in \mathrm{Ker}(f)$.

$$\boxed{\text{Ainsi, } (f(u), v) \text{ est une famille d'éléments de } \mathrm{Ker}(f).}$$

- Démontrons que la famille $(f(u), v)$ est libre.
Soit $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$. On suppose : $\lambda_1 \cdot f(u) + \lambda_2 \cdot v = 0_E$. $(*)$
Deux cas se présentent alors :
× si $\lambda_2 \neq 0$ alors :

$$v = -\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \cdot f(u) = f\left(-\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \cdot u\right)$$

On en conclut $v \in \mathrm{Im}(f)$.
C'est impossible car on suppose dans l'énoncé : $v \notin \mathrm{Im}(f)$.

× si $\lambda_2 = 0$ alors l'égalité $(*)$ se réécrit enfin :

$$\lambda_2 \cdot f(u) = 0_E$$

Et comme $f(u) \neq 0_E$ alors $\lambda_2 = 0$. Ainsi, on a bien démontré :

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 0$$

- La famille $\mathcal{F} = \big(f(u), v\big)$ est :
× libre,
× telle que : $\mathrm{Card}(\mathcal{F}) = 2 = \dim\big(\mathrm{Ker}(f)\big)$.

$$\boxed{\text{On en déduit que } \big(f(u), v\big) \text{ est une base de } \mathrm{Ker}(f).}$$

□

b) Montrer que la famille $(u, f(u), v)$ est une base de E.

Démonstration.

- Démontrons que la famille $(u, f(u), v)$ est libre.
  Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$. On suppose : $\lambda_1 \cdot u + \lambda_2 \cdot f(u) + \lambda_3 \cdot v = 0_E$. $(*)$

On a alors	$f\big(\lambda_1 \cdot u + \lambda_2 \cdot f(u) + \lambda_3 \cdot v\big)$	$=$	$f\big(0_E\big)$	*(en appliquant f)*
donc	$\lambda_1 \cdot f(u) + \lambda_2 \cdot f\big(f(u)\big) + \lambda_3 \cdot f(v)$	$=$	0_E	*(par linéarité de f)*
et	$\lambda_1 \cdot f(u)$	$=$	0_E	*(car $f\big(f(u)\big) = 0_E$ et $f(v) = 0_E$)*
ainsi	λ_1	$=$	0	*(car $f(u) \neq 0_E$ puisque $u \notin \mathrm{Ker}(f)$)*

- L'égalité $(*)$ se réécrit alors :
$$\lambda_2 \cdot f(u) + \lambda_3 \cdot v = 0_E$$
  Or, la famille $\big(f(u), v\big)$ est libre car c'est une base de $\mathrm{Ker}(f)$. On en déduit : $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$.
  Finalement, on a démontré :
$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$$
$$\boxed{\text{La famille } \big(u, f(u), v\big) \text{ est donc libre.}}$$

- La famille $\mathcal{F} = \big(u, f(u), v\big)$ est :
  × libre,
  × telle que : $\mathrm{Card}(\mathcal{F}) = 3 = \dim(E)$.

$$\boxed{\text{On en déduit que } \big(u, f(u), v\big) \text{ est une base de } E.}$$

□

c) Déterminer la matrice de f dans la base $(u, f(u), v)$.

Démonstration.

- $f(u) = 0 \cdot u + 1 \cdot f(u) + 0 \cdot v$. On en conclut : $\mathrm{Mat}_{(u,f(u),v)}\big(f(u)\big) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

- $f\big(f(u)\big) = 0 \cdot u + 0 \cdot f(u) + 0 \cdot v$. On en conclut : $\mathrm{Mat}_{(u,f(u),v)}\Big(f\big(f(u)\big)\Big) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

- $f(v) = 0 \cdot u + 0 \cdot f(u) + 0 \cdot v$. On en conclut : $\mathrm{Mat}_{(u,f(u),v)}\big(f(v)\big) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

$$\boxed{\text{Finalement : } \mathrm{Mat}_{(u,f(u),v)}\big(f\big) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.}$$

□

Commentaire

La matrice obtenue dans cette question est la même que celle obtenue en ***6.b)***. C'est logique : la **Partie I** de cet exercice n'est qu'une illustration du résultat plus général démontré dans la **Partie II**. C'est une construction classique aux concours : avant d'aborder le résultat dans toute sa généralité, on laisse le candidat se familiariser en lui proposant de travailler sur un exemple simple.

Exercice 2 (ECRICOME 2007)

Soit a un réel strictement positif. On considère la fonction f_a définie pour tout réel t strictement positif par :

$$f_a(t) = \frac{1}{2}\left(t + \frac{a^2}{t}\right)$$

ainsi que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombre réels déterminée par son premier terme $u_0 > 0$ et par la relation dé récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f_a(u_n)$$

Partie 1 : Etude des variations de la fonction f_a.

1. Déterminer la limite de $f_a(t)$ lorsque t tend vers $+\infty$.

Démonstration.
On sait que $\lim\limits_{t\to+\infty} t = +\infty$ et $\lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{a^2}{t} = 0$.

$$\boxed{\text{On en déduit : } \lim_{t\to+\infty} f_a(t) = +\infty.}$$

□

2. Déterminer la limite de $f_a(t)$ lorsque t tend vers 0 par valeurs positives. Interpréter graphiquement cette limite.

Démonstration.
On sait que $\lim\limits_{t\to0} t = +\infty$ et $\lim\limits_{t\to0^+} \dfrac{a^2}{t} = +\infty$ (car $a^2 > 0$).

$$\boxed{\text{On en déduit : } \lim_{t\to0^+} f_a(t) = +\infty. \text{ Cela veut dire que le graphe de } f \text{ admet une asymptote verticale en } 0.}$$

□

3. Calculer, pour tout réel $t > 0$, $f_a'(t)$. Dresser le tableau de variations de f_a.

Démonstration.

- La fonction f_a est dérivable sur $]0,+\infty[$ comme somme de deux fonctions dérivables sur $]0,+\infty[$.
- Soit $t > 0$.

$$f_a'(t) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{a^2}{t^2}\right) = \frac{1}{2}\frac{t^2 - a^2}{t^2} = \frac{1}{2}\frac{(t-a)(t+a)}{t^2}$$

On obtient alors le tableau de variations suivant :

x	0			a		$+\infty$
Signe de $f'(t)$	‖	$-$		0	$+$	
Variations de f	‖	$+\infty$	↘	a	↗	$+\infty$

En effet, $f_a(a) = \dfrac{1}{2}\left(a + \dfrac{a^2}{a}\right) = \dfrac{1}{2}2a = a$. □

4. En déduire que :

$$\forall t > 0,\ f_a(t) \geqslant a$$

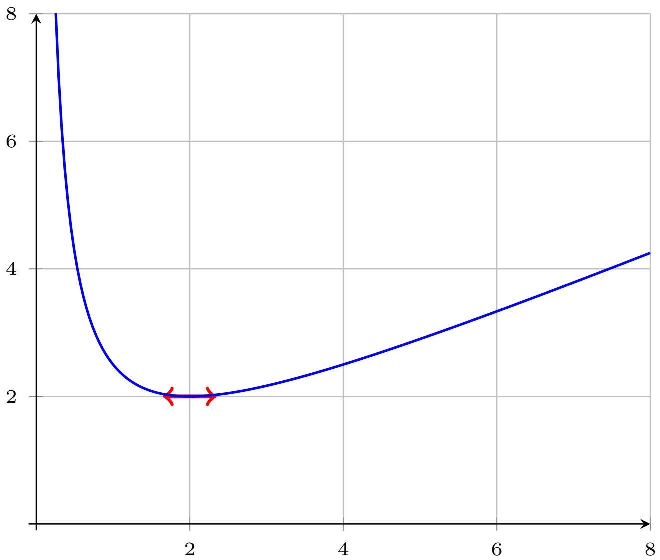
Démonstration.
D'après le tableau de variations de la question précédente, la fonction f_a admet un minimum global atteint en a et $f(a) = a$.

$$\boxed{\text{On en déduit que, pour tout } t > 0,\ f_a(t) \geqslant a.}$$

$\square$

5. Tracer la courbe représentative de f_a.

Démonstration.
On représente dans ce corrigé le graphe de f_2. Dans une copie, il suffit de placer a sur l'axe des abscisses et l'axe des ordonnées, de tracer la tangente horizontale au point a et de tracer un graphe de même allure que celui-ci.



$\square$

6. Écrire une fonction **Python** `f(a, t)` qui prend en entrée deux réels a et t strictement positifs et qui renvoie le nombre $f_a(t)$.

Démonstration.
On propose la fonction suivante :

```
def f(a, t):
    return (t + a**2/t) / 2
```

$\square$

Partie 2 : Etude de la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

7. Que dire de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans le cas particulier où $u_0 = a$?

Démonstration.

$$\boxed{\text{On remarque que } f(a) = a \text{ donc, dans ce cas particulier, la suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est constante égale à } a.}$$

□

8. Dans toute la suite, on revient au cas général $u_0 > 0$.
Démontrer que :

$$\forall t \geqslant a,\ 0 \leqslant f_a'(t) < \frac{1}{2}$$

Démonstration.
Soit $t \geqslant a$. D'après la question ***3*** :

$$f_a'(t) = \frac{1}{2}\frac{(t-a)(t+a)}{t^2} = \frac{1}{2}\frac{t^2-a^2}{t^2}$$

Tout d'abord : $t - a \geqslant 0$, $t + a \geqslant 0$ et $t^2 > 0$ donc $f_a'(t) \geqslant 0$.
De plus, $t^2 - a^2 < t^2$ et donc $\dfrac{t^2-a^2}{t^2} < 1$, d'où $f_a'(t) < \dfrac{1}{2}$.

$$\boxed{\text{On a bien : } \forall t \geqslant a,\ 0 \leqslant f_a'(t) < \frac{1}{2}.}$$

□

9. Montrer que, pour tout entier naturel non nul n :

$$u_n \geqslant a$$

Démonstration.
Démontrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{P}(n)$
où $\mathcal{P}(n)$: « $u_n \geqslant a$ ».

- **Initialisation**
  On sait que $u_0 > 0$ et d'après la question ***4***, on peut en déduire que $u_1 = f_a(u_0) \geqslant a$.
  D'où $\mathcal{P}(1)$.
- **Hérédité** : soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons $\mathcal{P}(n)$ et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$.
  Par hypothèse de récurrence : $u_n \geqslant a > 0$.
  D'après la question ***4***, on en déduit que $u_{n+1} = f_a(u_n) \geqslant a$.
  D'où $\mathcal{P}(n+1)$.

$$\boxed{\text{Ainsi, par principe de récurrence : } \forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n \geqslant a.}$$

□

10. Prouver alors que, pour tout entier naturel non nul n :

$$0 \leqslant u_{n+1} - a \leqslant \frac{1}{2}(u_n - a)$$

puis que :

$$|u_n - a| \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} |u_1 - a|$$

Démonstration.
On sait que f_a est dérivable sur $]0, +\infty[$ et, d'après la question ***8***, pour tout $t \geqslant a$, $|f_a'(t)| \leqslant \dfrac{1}{2}$.
Ainsi, d'après l'inégalité des accroissements finis :

$$\forall (x, y) \in [a, +\infty[,\ |f_a(x) - f_a(y)| \leqslant \frac{1}{2} |x - y|$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a $u_n \in [a, +\infty[$ (d'après la question ***9***) et $a \in [a, +\infty[$ donc :

$$|f_a(u_n) - f_a(a)| \leqslant \frac{1}{2} |u_n - a|$$

Or, $f_a(a) = a$, $f_a(u_n) = u_{n+1}$. D'où :

$$|u_{n+1} - a| \leqslant \frac{1}{2} |u_n - a| \qquad (*)$$

De plus, d'après la question ***9*** : $u_n \geqslant a$ donc $|u_n - a| = u_n - a$ et $u_{n+1} \geqslant a$ donc $|u_{n+1} - a| = u_{n+1} - a$.

$$\boxed{\text{D'où : } 0 \leqslant u_{n+1} - a \leqslant \frac{1}{2}(u_n - a).}$$

Démontrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{P}(n)$
où $\mathcal{P}(n)$: « $|u_n - a| \leqslant \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1} |u_1 - a|$ ».

- **Initialisation**
  $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{1-1} = 1$ donc on a bien $|u_1 - a| \leqslant \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1} |u_1 - a|$.
  D'où $\mathcal{P}(1)$.
- **Hérédité** : soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons $\mathcal{P}(n)$ et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$.

$$\begin{aligned} |u_{n+1} - a| &\leqslant \frac{1}{2} |u_n - a| && \textit{(d'après } (*)\textit{)} \\ &\leqslant \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} |u_1 - a| && \textit{(par hypothèse de récurrence, car } \tfrac{1}{2} \geqslant 0\textit{)} \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^{(n+1)-1} |u_1 - a| \end{aligned}$$

  D'où $\mathcal{P}(n+1)$.

$$\boxed{\text{Ainsi, par principe de récurrence : } \forall n \in \mathbb{N}^*,\ |u_n - a| \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} |u_1 - a|.}$$

□

11. En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et préciser sa limite.

Démonstration.
La suite $\left(\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est géométrique de raison $\dfrac{1}{2} \in]-1,1[$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1} = 0$.
Par théorème d'encadrement :

$$\lim_{n\to+\infty} |u_n - a| = 0$$

$$\boxed{\text{On en déduit que } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge vers } a.}$$

□

12. En utilisant ce qui précède, écrire un programme **Python** permettant d'afficher les 100 premiers termes d'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de premier terme $u_0 = 1$ et convergeant vers $\sqrt{2}$.

Démonstration.
D'après ce qui précède, il suffit de choisir $a = \sqrt{2}$ et la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie dans cet exercice avec comme condition initiale $u_0 = 1$.
On propose alors le programme suivant :

```python
N = 100
a = np.sqrt(2)
U = np.ones(N)
for k in range(N-1):
    U[k+1] = f(a, U[k])
plt.plot(U, 'x')
```

Commentaire

On aurait pu écrire également :

```python
N = 100
a = np.sqrt(2)
U = np.zeros(N)
U[0] = 1
for k in range(N-1):
    U[k+1] = f(a, U[k])
plt.plot(U, 'x')
```

Le choix de la commande `np.ones` permet d'initialiser correctement la suite au moment de la création du tableau `U` qui contiendra les 100 premiers termes de la suite. On économise ainsi une ligne de code mais il s'agit d'une astuce contextuelle.

□

Exercice 3 (EDHEC 2009)

Dans cet exercice, p désigne un réel de $]0,1[$ et on note $q = 1-p$.
On considère deux variables aléatoires X et Y définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, indépendantes et suivant toutes deux la même loi géométrique de paramètre p.

1. On pose $Z = \min(X, Y)$ et on admet que Z est une variable aléatoire, elle aussi définie sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.
On rappelle que, pour tout entier naturel k, on a l'égalité : $[Z > k] = [X > k] \cap [Y > k]$.

a) Pour tout entier naturel k, calculer $\mathbb{P}([Z > k])$.

Démonstration.
Soit $k \in \mathbb{N}$.

- D'après l'énoncé :
$$[Z > k] = [X > k] \cap [Y > k]$$
On obtient :
$$\begin{array}{rcll} \mathbb{P}([Z > k]) & = & \mathbb{P}([X > k] \cap [Y > k]) & \\ & = & \mathbb{P}([X > k]) \times \mathbb{P}([Y > k]) & \textit{(car les v.a.r. } X \textit{ et } Y \textit{ sont indépendantes)} \\ & = & \Big(\mathbb{P}\big(\,[X > k]\,\big)\Big)^2 & \textit{(car les v.a.r. } X \textit{ et } Y \textit{ ont même loi)} \\ & = & \Big(1 - \mathbb{P}\big(\,[X \leqslant k]\,\big)\Big)^2 & \end{array}$$
- Or, comme X est à valeurs entières :
$$[X \leqslant k] = \bigcup_{i=1}^{k} \, [X = i]$$
La famille $([X = i])_{i \in [\![1,k]\!]}$ est constituée d'événements 2 à 2 incompatibles. On obtient donc :
$$\begin{array}{rcll} \mathbb{P}([X \leqslant k]) & = & \mathbb{P}\left(\displaystyle\bigcup_{i=1}^{k} \, [X = i]\right) & \\ & = & \displaystyle\sum_{i=1}^{k} \mathbb{P}([X = i]) & \\ & = & \displaystyle\sum_{i=1}^{k} p\ (1-p)^{i-1} & \textit{(car } X \hookrightarrow \mathcal{G}\,(p)\textit{)} \\ & = & p \displaystyle\sum_{i=1}^{k} (1-p)^{i-1} & \\ & = & p \displaystyle\sum_{i=0}^{k-1} (1-p)^{i} & \\ & = & p \ \dfrac{1-(1-p)^k}{1-(1-p)} & \\ & = & 1-(1-p)^k & \end{array}$$
- En remplaçant dans $\mathbb{P}([Z > k])$, on obtient :
$$\mathbb{P}([Z > k]) = \Big(\cancel{1} - \big(\cancel{1} - (1-p)^k\big)\Big)^2 = \Big((1-p)^k\Big)^2 \ = \ (1-p)^{2k}$$
$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}([Z > k]) = q^{2k}}$$

Commentaire

- Au cours de la démonstration, on a obtenu le résultat classique :

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}([X > k]) \ = \ (1-p)^k}$$

Cette propriété est importante car elle caractérise la loi géométrique :

$$\boxed{\begin{array}{l} \times \ \text{La v.a.r. } X \text{ est à valeurs entières} \\ \times \ \forall k \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}([X > k]) = (1-p)^k = q^k \end{array} \quad \Leftrightarrow \quad X \hookrightarrow \mathcal{G}(1-q)}$$

- Ce résultat peut aussi s'obtenir en décomposant l'événement $[X > k]$.
On rédige comme suit. Tout d'abord, comme X est à valeurs entières :

$$[X > k] = \bigcup_{i=k+1}^{+\infty} [X = i]$$

La famille $([X = i])_{i \geqslant k+1}$ est consitituée d'événements incompatibles. On obtient donc :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}([X > k]) &= \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=k+1}^{+\infty} [X = i]\right) \\ &= \sum_{i=k+1}^{+\infty} \mathbb{P}([X = i]) \\ &= \sum_{i=k+1}^{+\infty} p\ (1-p)^{i-1} \qquad \textit{(car } X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)\textit{)} \\ &= p \sum_{i=k+1}^{+\infty} (1-p)^{i-1} \\ &= p \sum_{i=k}^{+\infty} (1-p)^{i} \qquad \textit{(par décalage d'indice)} \\ &= p \times p^k\ \frac{1}{1-(1-p)} \ = \ \cancel{p}\frac{(1-p)^k}{\cancel{p}} \end{aligned}$$

Les manipulations sur les sommes infinies sont ici licites car ces sommes représentent des probabilités d'événements. Les séries associéees sont donc convergentes.

- Cette démonstration se réalise très facilement dans le cadre de l'expérience consistant à effectuer indéfiniment un lancer de pièce qui amène Pile avec probabilité $p \in \,]0,1[$.
On considère alor que la v.a.r. X donne le rang du premier Pile. Dans ce cas, on a bien : $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$.
L'événement $[X > k]$ est réalisé si et seulement si le premier Pile arrive à un rang strictement supérieur à k. C'est le cas si et seulement si les k premiers lancers ont amené Face.
Finalement, avec les notations habituelles, on obtient :

$$[X > k] \ = \ F_1 \ \cap \ \ldots \ \cap \ F_k$$

On en déduit :
$$\begin{aligned} \mathbb{P}\big([X > k]\big) &= \mathbb{P}\big(F_1 \ \cap \ \ldots \ \cap \ F_k\big) \\ &= \mathbb{P}(F_1) \times \ \ldots \ \times \ \mathbb{P}(F_k) \qquad \textit{(par indépendance des lancers)} \\ &= (1-p) \times \ \ldots \ \times (1-p) \ = \ (1-p)^k \end{aligned}$$

Il est fortement conseillé de connaître cette démonstration qui permet de retrouver le résultat rapidement en cas d'oubli. $\square$

b) Établir que, pour tout entier naturel k supérieur ou égal à 1, on a :

$$\mathbb{P}([Z = k]) = \mathbb{P}([Z > k-1]) - \mathbb{P}([Z > k])$$

Démonstration.
Soit $k \geqslant 1$.

- Tout d'abord :

$$\begin{array}{rcll} [Z > k-1] & = & [Z \geqslant k] & \textit{(car } Z \textit{ est à valeurs entières)} \\ & = & [Z > k] \ \cup \ [Y = k] & \end{array}$$

- On a alors :

$$\begin{array}{rcll} \mathbb{P}\big([Z > k-1]\big) & = & \mathbb{P}\big([Z > k] \cup [Z = k]\big) & \\ & = & \mathbb{P}\big([Z > k]\big) + \mathbb{P}\big([Z = k]\big) & \textit{(car les événements } [Z > k] \textit{ et } [Z = k] \textit{ sont incompatibles)} \end{array}$$

$$\boxed{\forall k \geqslant 1,\ \mathbb{P}([Z = k]) \ = \ \mathbb{P}([Z > k-1]) - \mathbb{P}([Z > k])}$$

Commentaire

L'égalité entre événements suivante :

$$[Z > k-1] = [Z > k] \cup [Z = k]$$

est valable pour toute variable à valeurs entières. Elle est extrêmement classique et utile dans les sujets. On s'efforcera donc de la retenir.

□

c) En déduire que Z suit la loi géométrique de paramètre $(1 - q^2)$.

Démonstration.

- Tout d'abord : $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et $Y(\Omega) = \mathbb{N}^*$ car les v.a.r. X et Y suivent une loi géométrique.
  Comme $Z = \min(X, Y)$, on a alors : $Z(\Omega) \subset \mathbb{N}^*$.

$$\boxed{Z(\Omega) \subset \mathbb{N}^*}$$

- Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{array}{rcll} \mathbb{P}([Z = k]) & = & \mathbb{P}([Z > k-1]) - \mathbb{P}([Z > k]) & \textit{(d'après la question } \textbf{\textit{1.b)}}\textit{)} \\ & = & q^{2(k-1)} - q^{2k} & \textit{(d'après la question } \textbf{\textit{1.a)}}\textit{)} \\ & = & q^{2k-2} - q^{2k} & \\ & = & q^{2k-2}\left(1 - q^2\right) & \\ & = & \left(q^2\right)^{k-1}\,(1 - q^2) & \end{array}$$

$$\boxed{\text{On en conclut que } Z \text{ suit la loi géométrique de paramètre } (1 - q^2).}$$

Commentaire

- Ce résultat ne doit pas être une surprise.
  En effet, d'après les questions précédentes, on a :
  × La v.a.r. Z est à valeurs entières
  × $\forall k \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}([Z > k]) = (1-p)^{2k} = \left(q^2\right)^k$
  On en déduit alors, par la caractérisation de la loi géométrique : $Z \hookrightarrow \mathcal{G}\left(1-q^2\right)$.
- Il ne s'agit pas de dire qu'on pouvait utiliser directement ici cet énoncé. Le but des questions qui précèdent est justement de démontrer comment on passe de :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}\big(\,[Z > k]\,\big) = \left(q^2\right)^k$$

  à la propriété :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}\big(\,[Z = k]\,\big) = \left(q^2\right)^{k-1}\,(1-q^2)$$

□

2. On définit la variable aléatoire T de la façon suivante :
Pour tout ω de Ω tel que $X(\omega)$ est un entier naturel pair, on pose $T(\omega) = \dfrac{X(\omega)}{2}$,
et, pour tout ω de Ω tel que $X(\omega)$ est un entier naturel impair, on pose $T(\omega) = \dfrac{1+X(\omega)}{2}$.
On admet que T est une variable aléatoire, elle aussi définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

a) Montrer que T prend des valeurs entières non nulles.

Démonstration.
Soit $\omega \in \Omega$. Alors $X(\omega) \in X(\Omega) = \mathbb{N}^*$.
Deux cas se présentent alors :
- si $X(\omega)$ est un entier pair : alors il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $X(\omega) = 2k$.
  On note au passage que $k \neq 0$ car $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$, donc $0 \notin X(\Omega)$.
  Alors $T(\omega) = \dfrac{X(\omega)}{2} = \dfrac{2k}{2} = k$, donc $T(\omega)$ est un entier naturel non nul.
- si $X(\omega)$ est un entier impair : alors il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $X(\omega) = 2k+1$.
  Alors $T(\omega) = \dfrac{X(\omega)+1}{2} = \dfrac{2k+2}{2} = k+1$, donc $T(\omega)$ est un entier naturel non nul.

$$\boxed{T \text{ prend des valeurs entiers non nulles : } T(\Omega) \subset \mathbb{N}^*.}$$

□

b) Réciproquement, justifier que tout entier naturel k non nul est élément de $T(\Omega)$ et en déduire que $T(\Omega) = \mathbb{N}^*$.

Démonstration.
Soit $k \in \mathbb{N}^*$.
- Comme $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$, et que $2k \in \mathbb{N}^*$, alors il existe $\omega \in \Omega$ tel que : $X(\omega) = 2k$.
  Dans ce cas :

$$T(\omega) = \frac{X(\omega)}{2} = \frac{2k}{2} = k$$

Et ainsi, $k = T(\omega) \in T(\Omega)$.

$$\boxed{\text{Tout entier naturel non nul est élément de } T(\Omega) \text{ ainsi : } \mathbb{N}^* \subset T(\Omega).}$$

- Or, d'après la question ***2.a)***, $T(\Omega) \subset \mathbb{N}^*$.

$$\boxed{\text{On en conclut : } T(\Omega) = \mathbb{N}^*.}$$

□

c) Exprimer l'événement $[T = k]$ en fonction de certains événements $[X = i]$ puis montrer que T suit la même loi que Z.

Démonstration.
Soit $k \in \mathbb{N}^*$.
L'événement $[T = k]$ est réalisé :

× si l'événement $[X = 2k]$ est réalisé.
En effet, pour tout $\omega \in [X = 2k]$ (c'est-à-dire ω tel que $X(\omega) = 2k$), $X(\omega)$ est pair, et alors :

$$T(\omega) = \frac{X(\omega)}{2} = \frac{2k}{2} = k$$

× ou si l'événement $[X = 2k - 1]$ est réalisé.
En effet, pour tout $\omega \in [X = 2k - 1]$ (c'est-à-dire ω tel que $X(\omega) = 2k - 1$), $X(\omega)$ est impair, et alors :

$$T(\omega) = \frac{X(\omega) + 1}{2} = \frac{2k - \cancel{1} + \cancel{1}}{2} = k$$

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^*, \ [T = k] = [X = 2k] \cup [X = 2k - 1]}$$

- On rappelle : $T(\Omega) = \mathbb{N}^* = \mathbb{Z}(\Omega)$.
- Soit $k \in \mathbb{N}^*$.
  Les événements $[X = 2k]$ et $[X = 2k - 1]$ sont incompatibles. On en déduit :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{P}([T = k]) & = & \mathbb{P}([X = 2k] \cup [X = 2k - 1]) \\ & = & \mathbb{P}([X = 2k]) + \mathbb{P}([X = 2k - 1]) \\ & = & q^{2k-1}\ p + q^{2k-2}\ p \qquad \qquad \textit{(car } X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)\textit{)} \\ & = & q^{2k-2}\ (qp + p) \ = \ q^{2k-2}\ (q(1-q) + (1-q)) \\ & = & (q^2)^{k-1}\ (1 - q^2) \\ & = & \mathbb{P}([Z = k]) \end{array}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, } T \text{ suit bien la même loi que } Z.}$$

□

3. On rappelle que la fonction `rd.random()` renvoie de façon uniforme un réel aléatoire élément de $[0, 1[$.
Par ailleurs, la commande `x % 2` permet de tester si `x` est pair. Plus précisément :

× `x` est pair si et seulement si `x % 2` vaut 0,

× `x` est impair si et seulement si `x % 2` vaut 1.

Compléter le programme **Python** suivant pour que, d'une part, il simule les lancers d'une pièce donnant « pile » avec la probabilité p et calcule la valeur prise par la variable aléatoire X égale au rang du premier « pile » obtenu lors de ces lancers (X suit bien la loi géométrique de paramètre p) et pour que, d'autre part, il calcule et affiche la valeur prise par T, la variable aléatoire T ayant été définie dans la deuxième question.

```
p = float(input("Entrez la valeur de p :"))
x = 1
lancer = rd.random()
while lancer <= 1-p:
    x =   x+1
    lancer = rd.random()
if x % 2 == 0:
      t = x/2
else:
      t = (1+x)/2
print(t)
```

Démonstration.

- Le fonctionnement du programme est le suivant :
  - × on simule les résultats successifs d'épreuves de Bernoulli indépendantes de même paramètre p.
  - × on s'arrête dès le premier succès obtenu.
  - × on utilise une variable `x` afin de compter le nombre d'épreuves effectuées jusqu'à l'obtention du premier succès. On obtient ainsi le rang d'apparition du premier succès.
    Plus formellement, cette variable de sortie `x` est la simulation de la v.a.r. X (qui est telle que $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$).
- **Début du programme**
  La variable `x` est initialisée à 1. Cela fait référence à la $1^{\text{ère}}$ épreuve de Bernoulli qui n'a pas encore eu lieu. La variable `x` compte ainsi avec avance le nombre d'épreuves de Bernoulli qui ont lieu au cours du programme.

```
x = 1
```

- **Structure itérative**
  - × Il s'agit alors d'itérer tant que le succès n'est pas obtenu. On choisit donc une boucle `while`.

```
while lancer <= 1-p:
    x =   x+1
    lancer = rd.random()
```

La variable `lancer` est mise à jour à chaque tour de boucle de sorte à recevoir le résultat de l'instruction `rd.random()`. Rappelons que l'instruction `rd.random()` renvoie un réel choisi aléatoirement dans $[0, 1]$. Plus formellement, il s'agit de simuler une v.a.r. U telle que $U \hookrightarrow \mathcal{U}([0, 1])$. L'instruction `rd.random() <= 1-p` permet de simuler une épreuve de Bernoulli de paramètre `1-p` (et dans ce contexte cela simule un échec).

$$\boxed{\text{La variable } \texttt{x} \text{ permet de simuler la v.a.r. } X.}$$

Commentaire

- Afin de permettre une bonne compréhension des mécanismes en jeu, on a détaillé la réponse à cette question. Cependant, compléter correctement le programme **Python** démontre la bonne compréhension de la simulation demandée et permet certainement d'obtenir tous les points alloués à cette question.
- Profitons-en pour rappeler que lors de l'écriture d'un programme, on se soumet généralement à quelques règles de bonne conduite :

(1) utilisation de commentaires indiquant le but de chaque fonction,

(2) réflexion autour du découpage en sous-fonctions pouvant être réutilisées,

(3) utilisation de nom explicites pour les fonctions et le variables,

(4) indentation du code (utilisation correcte d'espaces et sauts de lignes).

Le but de ces règles est de produire un code lisible, intelligible et facilement modifiable à l'avenir. Évidemment, on ne s'attend pas, dans un sujet de concours, à ce que soit commentée la fonction dont il est demandé d'expliciter le calcul. Par contre, on s'attend à ce que les autres règles de bonne conduite soient respectées. Ne pas le faire correspond à ce que l'on nomme de l'**obfuscation** (pas forcément volontaire) de code. Sous ce terme, on désigne les méthodes permettant de rendre un code difficile à déchiffrer. Le but de telles techniques est de protéger son code. Typiquement, une entreprise ayant investi afin de développer un algorithme pourra procéder à une obfuscation de code afin que ses concurrents industriels ne puissent comprendre la manière dont procède cet algorithme.

- **Structure conditionnelle**

On souhaite que `t` simule la v.a.r. T. Donc :

× si `x` est pair, alors `t` doit recevoir `x/2`.

× si `x` est impair, alors `t` doit recevoir `(1+x)/2`

Il fallait donc modifier les lignes comme suit.

```
7   if x % 2 == 0:
8       t = x/2
9   else:
10      t = (1+x)/2
```

Commentaire

- On a traduit ici en **Python** une question qui était posée à l'époque en Turbo-Pascal, langage qui ne dispose pas d'une fonction de type `rd.geometric`.
- En réalité, on aurait pu remplacer les lignes 2 à 6 du programme par :

```
x = rd.geometric(p)
```

ce qui semble plus en accord avec les attentes du programme actuel. □

Exercice 4 (EML 2013)

Soit n un entier supérieur ou égal à 2.
On considère une urne $\mathcal{U}$ contenant n boules numérotées de 1 à n et indiscernables au toucher.
On effectue une suite de tirages d'une boule avec remise de la boule dans l'urne $\mathcal{U}$.

Partie I

Soit k un entier supérieur ou égal à 1. Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on note X_i la variable aléatoire égale au nombre d'obtentions de la boule numéro i au cours des k premiers tirages.

1. Soit $i \in [\![1, n]\!]$. Donner la loi de X_i. Rappeler l'espérance et la variance de X_i.

Démonstration.

- L'expérience consiste en la succession de k épreuves de Bernoulli indépendantes et de même paramètre de succès $\frac{1}{n}$ (probabilité d'obtenir la boule numérotée i dans l'urne $\mathcal{U}$ de manière équiprobable parmi les n boules disponibles).
- La variable X_i correspond au nombre de succès obtenus lors de cette expérience.

$$\boxed{\text{Ainsi : } X_i \hookrightarrow \mathcal{B}\left(k, \frac{1}{n}\right).}$$

$$\boxed{\text{De plus : } \mathbb{E}(X_i) = k \times \frac{1}{n} = \frac{k}{n} \quad \text{et} \quad \mathbb{V}(X_i) = k \times \frac{1}{n}\left(1 - \frac{1}{n}\right) = \frac{k}{n}\left(1 - \frac{1}{n}\right).}$$

□

2. Les variables aléatoires $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sont-elles indépendantes ?

Démonstration.
Soit $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$ tel que $i \neq j$.

- On commence par remarquer :
$$[X_i = k] \cap [X_j = k] = \varnothing$$
En effet, en k tirages, on ne peut pas obtenir à la fois k fois la boule numéro i et k fois la boule numéro j. On obtient donc :
$$\mathbb{P}([X_i = k] \cap [X_j = k]) = \mathbb{P}(\varnothing) = 0$$
- D'autre part, d'après la question ***1.***, on sait que :
$$\mathbb{P}([X_i = k]) = \mathbb{P}([X_j = k]) = \binom{k}{k} \left(\frac{1}{n}\right)^k \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{k-k} = 1 \times \frac{1}{n^k} \times 1 = \frac{1}{n^k}$$
Donc :
$$\mathbb{P}([X_i = k])\, \mathbb{P}([X_j = k]) = \frac{1}{n^k} \times \frac{1}{n^k} = \frac{1}{n^{2k}} \neq 0$$

On obtient finalement :
$$\mathbb{P}([X_i = k] \cap [X_j = k]) \ \neq \ \mathbb{P}([X_i = k])\, \mathbb{P}([X_j = k])$$

$$\boxed{\text{Les variables aléatoires } X_1,\ X_2,\ \ldots,\ X_n \text{ ne sont pas indépendantes.}}$$

Commentaire

- On cherche ici à démontrer que les v.a.r. $X_1, \ldots, X_n$ ne sont pas mutuellement indépendantes. Si elles l'étaient, alors toute paire de variables X_i, X_j (avec $i \neq j$) serait indépendante :

$$\begin{array}{c} X_1, \ldots, X_n \text{ mutuellement} \\ \text{indépendantes} \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c} X_1, \ldots, X_n \text{ indépendantes} \\ \text{deux à deux} \end{array}$$

- Ainsi, en démontrant que les v.a.r. $X_1, \ldots, X_n$ ne sont pas deux à deux indépendantes, on démontre qu'elles ne sont pas mutuellement indépendantes. On utilise en fait la contraposée de l'implication précédente :

$$\begin{array}{c} X_1, \ldots, X_n \texttt{ NON} \\ \text{indépendantes deux à deux} \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c} X_1, \ldots, X_n \texttt{ NON} \\ \text{mutuellement indépendantes} \end{array}$$

□

3. Écrire une fonction **Python** `simulX(n, k)` prenant en entrée un entier n supérieur ou égal à 2 (le nombre de boules dans l'urne) ainsi qu'un entier k supérieur ou égal à 1 (le nombre de tirages effectués), simulant l'expérience aléatoire lors des k premiers tirages et renvoyant un tableau `numpy` (ou une liste) contenant les réalisations des variables aléatoires $X_1, \ldots, X_n$.

Démonstration.
On propose la fonction suivante :

```python
def simulX(n, k):
    T = np.zeros(n) # Au départ, les boules ont été obtenues 0 fois
    for j in range(k): # On fait k tirages
        boule = rd.randint(1,n+1) # On tire au hasard une boule de l'urne
        T[boule-1] += 1 # On vient d'obtenir la boule numéro « boule »
    return T # T contient les nombres d'obtentions de chacune des boules
```

Commentaire

Attention au décalage de numérotation en **Python** ! Les boules sont numérotées de 1 à n, mais les indices du tableau `T` varient de 0 à $n-1$. C'est pour cette raison que l'on écrit `T[boule-1] += 1` et non pas `T[boule] += 1`.

□

4. Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ tel que $i \neq j$.

a) Déterminer la loi de la variable $X_i + X_j$. Rappeler la variance de $X_i + X_j$.

Démonstration.

- L'expérience consiste en la succession de k épreuves de Bernoulli indépendantes et de même paramètre de succès $\frac{2}{n}$ (probabilité d'obtenir la boule numérotée i ou la boule numérotée j dans l'urne $\mathcal{U}$ de manière équiprobable parmi les n boules disponibles).
- La variable $X_i + X_j$ correspond au nombre de succès obtenus lors de cette expérience.

$$\boxed{\text{Ainsi : } X_i + X_j \hookrightarrow \mathcal{B}\left(k, \frac{2}{n}\right)}$$

$$\boxed{\text{De plus : } \mathbb{V}(X_i + X_j) = k \times \frac{2}{n}\left(1 - \frac{2}{n}\right) = \frac{2k}{n}\left(1 - \frac{2}{n}\right).}$$

□

b) En déduire la covariance du couple (X_i, X_j).

Démonstration.
D'après la formule de la variance d'une somme de variables aléatoires, on obtient :

$$\mathbb{V}(X_i + X_j) = \mathbb{V}(X_i) + 2\ \text{Cov}(X_i, X_j) + \mathbb{V}(X_j)$$

Donc :

$$\begin{array}{rcl} \text{Cov}(X_i, X_j) & = & \dfrac{1}{2}\left(\mathbb{V}(X_i + X_j) - \mathbb{V}(X_i) - \mathbb{V}(X_j)\right) \\ & = & \dfrac{1}{\cancel{2}}\left(\dfrac{\cancel{2}\,k}{n}\left(1 - \dfrac{2}{n}\right) - \cancel{2}\,\dfrac{k}{n}\left(1 - \dfrac{1}{n}\right)\right) \quad \textit{(d'après } \textbf{\textit{1.}} \textit{ et } \textbf{\textit{3.a)}}\textit{)} \\ & = & \dfrac{k}{n}\left(\cancel{1} - \dfrac{2}{n} - \left(\cancel{1} - \dfrac{1}{n}\right)\right) \\ & = & \dfrac{k}{n} \times \left(-\dfrac{1}{n}\right) \ = \ -\dfrac{k}{n^2} \end{array}$$

$$\boxed{\text{Cov}(X_i, X_j) = -\frac{k}{n^2}}$$

□

Pour tout entier k supérieur ou égal à 1, on note Z_k la variable aléatoire égale au nombre de numéros distincts obtenus au cours des k premiers tirages et on note $\mathbb{E}(Z_k)$ l'espérance de Z_k.

Partie II

5. Déterminer la loi de la variable Z_1 et la loi de la variable Z_2.
En déduire $\mathbb{E}(Z_1)$ et $\mathbb{E}(Z_2)$.

Démonstration.

- Si $k = 1$, alors on effectue un unique tirage. On ne peut donc obtenir qu'un seul numéro (celui de la boule choisie à cet unique tirage). Ainsi :

$$\left\{ \begin{array}{l} Z_1(\Omega) = \{1\} \\ \mathbb{P}([Z_1 = 1]) = 1 \end{array} \right.$$

$$\boxed{\text{La v.a.r. } Z_1 \text{ suit la loi certaine égale à 1 et : } \mathbb{E}(Z_1) = 1.}$$

- Déterminons maintenant la loi de la variable Z_2.
  - × Tout d'abord : $Z_2(\Omega) = \{1, 2\}$.
    En effet, en $k = 2$ tirages, on peut :
    - soit obtenir deux fois la même boule, on observe alors 1 seul numéro.
    - soit obtenir deux boules différentes, on observe alors 2 numéros distincts.
  - × On déduit du premier item du point précédent :

$$[Z_2 = 1] = \bigcup_{i=1}^{n} [X_i = 2]$$

Les événements $[X_1 = 2]$, ..., $[X_n = 2]$ sont incompatibles. Ainsi :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}([Z_2 = 1]) &= \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}([X_i = 2]) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \binom{2}{2} \left(\frac{1}{n}\right)^2 \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{2-2} \quad \textit{(d'après \textbf{1.})} \\ &= \cancel{n} \frac{1}{n^{\cancel{2}}} = \frac{1}{n} \end{aligned}$$

× La famille $([Z_2 = 1], [Z_2 = 2])$ est un système complet d'événements. D'où :

$$\mathbb{P}([Z_2 = 2]) = 1 - \mathbb{P}([Z_2 = 1]) = 1 - \frac{1}{n}$$

$$\boxed{\begin{cases} Z_2(\Omega) = \{1, 2\} \\ \mathbb{P}([Z_2 = 1]) = \dfrac{1}{n} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}([Z_2 = 2]) = 1 - \dfrac{1}{n} \end{cases}}$$

× La v.a.r. Z_2 admet une espérance, car c'est une v.a.r. finie. De plus :

$$\mathbb{E}(Z_2) = 1 \times \mathbb{P}([Z_2 = 1]) + 2 \times \mathbb{P}([Z_2 = 2]) = \frac{1}{n} + 2\left(1 - \frac{1}{n}\right) = 2 - \frac{1}{n}$$

$$\boxed{\mathbb{E}(Z_2) = 2 - \frac{1}{n}}$$

□

6. Soit k un entier supérieur ou égal à 1.

a) Déterminer $\mathbb{P}([Z_k = 1])$ et déterminer $\mathbb{P}([Z_k = k])$.

Démonstration.

- L'événement $[Z_k = 1]$ est réalisé si et seulement si on a obtenu un seul numéro lors de k tirages. Autrement dit lorsqu'on a tiré la même boule lors des k tirages. Ainsi :

$$[Z_k = 1] = \bigcup_{i=1}^{n} [X_i = k]$$

Comme les événements $[X_1 = k]$, ..., $[X_n = k]$ sont incompatibles, on obtient :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}([Z_k = 1]) &= \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}([X_i = k]) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \binom{k}{k} \left(\frac{1}{n}\right)^k \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{k-k} \quad \textit{(d'après \textbf{1.})} \\ &= n \frac{1}{n^k} = \frac{1}{n^{k-1}} \end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{P}([Z_k = 1]) = \frac{1}{n^{k-1}}}$$

- Deux cas se présentent pour le calcul de $\mathbb{P}([Z_k = k])$:
  - si $k > n$, alors : $[Z_k = k] = \varnothing$.
    En effet, on ne peut obtenir strictement plus de n boules différentes lors de k tirages successifs dans une urne contenant n boules.

$$\boxed{\text{Si } k > n \text{ alors : } \mathbb{P}([Z_k = k]) = \mathbb{P}(\varnothing) = 0.}$$

- si $k \leqslant n$.

  L'univers Ω est muni de la probabilité uniforme $\mathbb{P}$. On procède alors par dénombrement.

  L'univers Ω est l'ensemble des k-uplets d'éléments de $[\![1, n]\!]$. D'où : $\text{Card}(\Omega) = n^k$.

  Un k-tirage qui réalise l'événement $[Z_k = k]$ est un k-tirage lors duquel on a obtenu k boules distinctes. Un tel k-tirage est entièrement déterminé par :

  × le numéro de la première boule : n possibilités,

  × le numéro de la deuxième boule : $n - 1$ possibilités,

  × $\cdots$

  × le numéro de la $k^{\text{ème}}$ boule : $n - (k - 1)$ possibilités.

  Il y a donc en tout : $n \times (n-1) \times \cdots \times (n - (k-1)) = \dfrac{n!}{(n-k)!}$ tels k-tirages.

$$\boxed{\text{On en conclut : } \mathbb{P}([Z_k = k]) = \frac{\text{Card}([Z_k = k])}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{\frac{n!}{(n-k)!}}{n^k} = \frac{n!}{(n-k)!} \, \frac{1}{n^k}.}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } \mathbb{P}([Z_k = k]) = \begin{cases} 0 & \text{si } k > n \\ \dfrac{n!}{(n-k)!} \, \dfrac{1}{n^k} & \text{si } k \leqslant n \end{cases}.}$$

Commentaire

- La première étape de la question consiste à écrire $[Z_k = 1]$ comme une réunion d'événements plus simples. On ne raisonne sur les probabilités qu'après avoir effectué cette étape primordiale de décomposition de l'événement.
- On pouvait également mettre en place un dénombrement pour répondre à la première question. Détaillons cette rédaction.

  Un k-tirage qui réalise $[Z_k = 1]$ est un k-tirage lors duquel la même boule a toujours été tirée. Un tel k-tirage est entièrement déterminé par :

  × le numéro de la boule qui est toujours tirée : n possibilités.

  Ainsi, il y a n tels k-tirages.

  On en conclut que : $\mathbb{P}([Z_k = 1]) = \dfrac{\text{Card}([Z_k = k])}{\text{Card}(\Omega)} = \dfrac{n}{n^k} = \dfrac{1}{n^{k-1}}$.
- On peut aussi faire la deuxième démonstration à l'aide des termes du chapitre dénombrement. L'événement $[Z_k = k]$ est réalisé par tous les k-tirages lors desquels on a obtenu k numéros distincts. Un tel k-tirage est un k-uplet d'éléments distincts de $[\![1, n]\!]$.

  Autrement dit, un tel k-tirage est un k-arrangement de $[\![1, n]\!]$.

  Ainsi : $\text{Card}([Z_k = k]) = A_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!}$.

□

b) Montrer, pour tout $\ell \in [\![1, n]\!]$: $\mathbb{P}([Z_{k+1} = \ell]) = \dfrac{\ell}{n} \, \mathbb{P}([Z_k = \ell]) + \dfrac{n - \ell + 1}{n} \, \mathbb{P}([Z_k = \ell - 1])$.

Démonstration.

- On remarque que $Z_k(\Omega) \subset [\![1, n]\!]$.

  En effet, en k tirages, on peut obtenir :

  × au minimum 1 seule boule distincte (on obtient la même boule aux k tirages),

× au maximum n boules distinctes (on a obtenu toutes les boules de l'urne).
Ce cas ne peut se produire que lorsque $k \geqslant n$.

- La famille $\Big([Z_k = i] \Big)_{i \in [\![1,n]\!]}$ est un système complet d'événements.
Ainsi, d'après la formule des probabilités totales, pour tout $\ell \in [\![1,n]\!]$:

$$\mathbb{P}([Z_{k+1} = \ell]) \ = \ \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}([Z_k = i] \cap [Z_{k+1} = \ell])$$

- Soit $\ell \in [\![1,n]\!]$ et soit $i \in [\![1,n]\!]$. Étudions l'événement $[Z_k = i] \cap [Z_{k+1} = \ell]$.
Cet événement est réalisé si et seulement si les événements $[Z_k = i]$ et $[Z_{k+1} = \ell]$ sont tous les deux réalisés. L'événement $[Z_k = i]$ est réalisé si et seulement si on a obtenu i numéros distincts lors des i tirages. Lorsqu'on procède à 1 tirage supplémentaire, deux cas se présentent :

× soit on tire un numéro de boule déjà obtenu lors des k premiers tirages.
Dans ce cas, au cours de ces $k+1$ premiers tirages, on a obtenu i numéros distincts.
L'événement $[Z_{k+1} = i]$ est alors réalisé.

× soit on tire un numéro non obtenu lors des k premiers tirages.
Dans ce cas, au cours de ces $k+1$ premiers tirages, on a obtenu $i+1$ numéros distincts.
L'événement $[Z_{k+1} = i+1]$ est alors réalisé.

Ainsi, l'événement $[Z_k = i] \cap [Z_{k+1} = \ell]$ n'est réalisé que si $i = \ell$ ou $i + 1 = \ell$.

$$\boxed{\text{Pour tout } i \neq \ell \text{ et } i \neq \ell - 1 : [Z_k = i] \cap [Z_{k+1} = \ell] = \varnothing.}$$

- Ainsi, pour tout $\ell \in [\![2,n]\!]$ (on écarte le cas $\ell = 2$ pour assurer que $\ell - 1 \geqslant 1$) :

$$\begin{array}{rcll}
\mathbb{P}([Z_{k+1} = \ell]) & = & \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}([Z_k = i] \cap [Z_{k+1} = \ell]) & \\
& = & \displaystyle\sum_{i=\ell-1}^{\ell} \mathbb{P}([Z_k = i] \cap [Z_{k+1} = \ell]) & \\
& = & \displaystyle\sum_{i=\ell-1}^{\ell} \mathbb{P}([Z_k = i])\ \mathbb{P}_{[Z_k=i]}([Z_{k+1} = \ell]) & \textit{(avec } \mathbb{P}([Z_k = \ell-1]) \neq 0 \\
& & & \textit{et } \mathbb{P}([Z_k = \ell]) \neq 0\textit{)} \\
& = & \mathbb{P}([Z_k = \ell - 1])\ \mathbb{P}_{[Z_k=\ell-1]}([Z_{k+1} = \ell]) + \mathbb{P}([Z_k = \ell])\ \mathbb{P}_{[Z_k=\ell]}([Z_{k+1} = \ell]) &
\end{array}$$

Il reste alors à déterminer chacune de ces deux probabilités conditionnelles.

× Si l'événement $[Z_k = \ell - 1]$ est réalisé, c'est qu'on a obtenu $\ell - 1$ boules distinctes au cours des k premiers tirages. Alors, l'événement $[Z_{k+1} = \ell]$ est réalisé si et seulement si on a pioché au $(k+1)^{\text{ème}}$ tirage un numéro distinct des $\ell - 1$ numéros déjà obtenus lors les k tirages précédents. Il y a $n - (\ell - 1)$ tels numéros.

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Chacune des } n \text{ boules ayant la même probabilité d'être tirée, on obtient :} \\ \mathbb{P}_{[Z_k=\ell-1]}([Z_{k+1} = \ell]) = \dfrac{n - \ell + 1}{n}\end{array}}$$

× Si l'événement $[Z_k = \ell]$ est réalisé, c'est qu'on a obtenu ℓ boules distinctes au cours des k premiers tirages. Alors l'événement $[Z_{k+1} = \ell]$ est réalisé si et seulement si on a pioché au $(k+1)^{\text{ème}}$ tirage l'une des ℓ numéros déjà obtenus lors des k tirages précédents. Il y a ℓ tels numéros.

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Chacune des } n \text{ boules ayant la même probabilité d'être tirée, on obtient :} \\ \mathbb{P}_{[Z_k=\ell]}([Z_{k+1} = \ell]) = \dfrac{\ell}{n}\end{array}}$$

- En combinant ces deux résultats, on obtient la fomule souhaitée.

$$\boxed{\text{Pour tout } \ell \in [\![2, n]\!],\ \mathbb{P}([Z_{k+1} = \ell]) = \frac{\ell}{n}\ \mathbb{P}([Z_k = \ell]) + \frac{n-\ell+1}{n}\ \mathbb{P}([Z_k = \ell-1])}$$

- Il reste alors à vérifier que la formule reste vraie si $\ell = 1$.
  - D'une part, d'après la question ***5.a)*** :

$$\mathbb{P}([Z_{k+1} = 1]) \ = \ \frac{1}{n^k} \ = \ \frac{1}{n}\ \frac{1}{n^{k-1}} \ = \ \frac{1}{n}\ \mathbb{P}([Z_k = 1])$$

  - Enfin, comme $[Z_k = 0] = \varnothing$, on a : $\mathbb{P}([Z_k = 0]) = 0$. D'où :

$$\frac{1}{n}\ \mathbb{P}([Z_k = 1]) + \frac{n-1+1}{n}\ \mathbb{P}([Z_k = 0]) \ = \ \frac{1}{n}\ \mathbb{P}([Z_k = 1])$$

$$\boxed{\text{Ainsi, la formule est aussi vérifiée pour } \ell = 1.}$$

□

c) En déduire : $\mathbb{E}(Z_{k+1}) = \dfrac{n-1}{n}\ \mathbb{E}(Z_k) + 1$.

Démonstration.

- D'après la question ***5.b)***, $Z_k(\Omega) \subset [\![1, n]\!]$, et $Z_{k+1}(\Omega) \subset [\![1, n]\!]$.
  Ainsi, Z_k et Z_{k+1} sont des v.a.r. finies. Elles admettent donc une espérance.
- Par définition de l'espérance, on a :

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E}(Z_{k+1}) \\
= \ & \sum_{\ell=1}^{n} \ell\ \mathbb{P}([Z_{k+1} = \ell]) \\
= \ & \sum_{\ell=1}^{n} \ell \left(\frac{\ell}{n}\ \mathbb{P}([Z_k = \ell]) + \frac{n-\ell+1}{n}\ \mathbb{P}([Z_k = \ell-1]) \right) && \textit{(d'après } \textbf{\textit{5.b)}}\textit{)} \\
= \ & \sum_{\ell=1}^{n} \frac{\ell^2}{n}\ \mathbb{P}([Z_k = \ell]) + \sum_{\ell=1}^{n} \frac{\ell(n-\ell+1)}{n}\ \mathbb{P}([Z_k = \ell-1]) \\
= \ & \sum_{\ell=1}^{n} \frac{\ell^2}{n}\ \mathbb{P}([Z_k = \ell]) + \sum_{\ell=0}^{n-1} \frac{(\ell+1)(n-(\ell+\cancel{1})+\cancel{1})}{n}\ \mathbb{P}([Z_k = \ell]) && \textit{(par décalage d'indice)} \\
= \ & \sum_{\ell=1}^{n} \frac{\ell^2}{n}\ \mathbb{P}([Z_k = \ell]) + \sum_{\ell=0}^{n-1} \frac{(\ell+1)(n-\ell)}{n}\ \mathbb{P}([Z_k = \ell]) \\
= \ & \sum_{\ell=1}^{n} \frac{\ell^2}{n}\ \mathbb{P}([Z_k = \ell]) + \sum_{\ell=1}^{n-1} \frac{n\ell - \ell^2 + n - \ell}{n}\ \mathbb{P}([Z_k = \ell]) && \textit{(car } [Z_k = 0] = \varnothing\textit{)} \\
= \ & \left(\sum_{\ell=1}^{n-1} \frac{\ell^2}{n}\ \mathbb{P}([Z_k = \ell]) + \frac{n^2}{n}\ \mathbb{P}([Z_k = n]) \right) + \sum_{\ell=1}^{n-1} \frac{(n-1)\ell - \ell^2 + n}{n}\ \mathbb{P}([Z_k = \ell]) \\
= \ & \frac{n^2}{n}\ \mathbb{P}([Z_k = n]) + \sum_{\ell=1}^{n-1} \frac{\cancel{\ell^2} + (n-1)\ \ell - \cancel{\ell^2} + n}{n}\ \mathbb{P}([Z_k = \ell]) \\
= \ & n\ \mathbb{P}([Z_k = n]) + \frac{n-1}{n} \sum_{\ell=1}^{n-1} \ell\ \mathbb{P}([Z_k = \ell]) + \sum_{\ell=1}^{n-1} \mathbb{P}([Z_k = \ell]) \\
= \ & \left((n-1)\ \mathbb{P}([Z_k = n]) + \frac{n-1}{n} \sum_{\ell=1}^{n-1} \ell\ \mathbb{P}([Z_k = \ell]) \right) + \left(\mathbb{P}([Z_k = n]) + \sum_{\ell=1}^{n-1} \mathbb{P}([Z_k = \ell]) \right) \\
= \ & \frac{n-1}{n} \sum_{\ell=1}^{n} \ell\ \mathbb{P}([Z_k = \ell]) + \sum_{\ell=1}^{n} \mathbb{P}([Z_k = \ell]) \ = \ \frac{n-1}{n}\ \mathbb{E}(Z_k) + 1
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On en déduit que : } \mathbb{E}(Z_{k+1}) = \dfrac{n-1}{n}\, \mathbb{E}(Z_k) + 1}$$

□

7. ***a)*** Montrer que la suite $(v_k)_{k \geqslant 1}$ de terme général $v_k = \mathbb{E}(Z_k) - n$ est une suite géométrique.

Démonstration.
Soit $k \geqslant 1$. D'après la question ***5.c)***, on obtient :

$$v_{k+1} = \mathbb{E}(Z_{k+1}) - n = \frac{n-1}{n}\, \mathbb{E}(Z_k) + 1 - n = \frac{n-1}{n}\, \mathbb{E}(Z_k) - (n-1) = \frac{n-1}{n}\, (\mathbb{E}(Z_k) - n) = \frac{n-1}{n}\, v_k$$

$$\boxed{\text{La suite } (v_k)_{k \geqslant 1} \text{ est géométrique de raison } \dfrac{n-1}{n}.}$$

Commentaire

Cette question est l'occasion de faire un point sur la notion de variable muette.
Dans une expression mathématique, on dit qu'une variable est **muette** (on parle aussi de variable **liée**) si elle est portée par un quantificateur ou un symbole mathématique qui permet d'introduire la variable et son ensmble d'appartenance.

- Ainsi, dans l'expression « $(v_k)_{k \geqslant 1}$ », la variable k est muette (k parcourt $\mathbb{N}^*$). On peut la renommer sans que cela change l'objet considéré :

$$(v_i)_{i \geqslant 1} \qquad (v_\ell)_{\ell \geqslant 1} \qquad (v_m)_{m \geqslant 1}$$

- Par contre, dans l'expression $\dfrac{n-1}{n}$, la variable n n'est sous la portée d'aucun quantificateur ou symbole mathématique. L'objet $\dfrac{n-1}{n}$ dépend donc de ce n particulier. On dit que la variable n est **libre**.

Les deux objets ci-dessus (la suite $(v_k)_{k \geqslant 1}$ et sa raison, le réel $\dfrac{n-1}{n}$) :

- ne dépendent pas de la variable k (muette),
- dépendent de la variable n (libre).

□

b) En déduire, pour tout entier k supérieur ou égal à 1 : $\mathbb{E}(Z_k) = n \left(1 - \left(\dfrac{n-1}{n}\right)^k\right)$.

Démonstration.
Soit $k \geqslant 1$.

- D'après la question ***6.a)***, la suite (v_k) est géométrique de raison $\dfrac{n-1}{n}$, donc :

$$v_k = \left(\frac{n-1}{n}\right)^{k-1} v_1$$

Or $v_1 = \mathbb{E}(Z_1) - n = 1 - n = -(n-1)$ d'après la question ***4.*** D'où :

$$v_k = -(n-1) \left(\frac{n-1}{n}\right)^{k-1} = -(n-1) \frac{(n-1)^{k-1}}{n^{k-1}} = -\frac{(n-1)^k}{n^{k-1}} = -n\, \frac{(n-1)^k}{n^k} = -n \left(\frac{n-1}{n}\right)^k$$

- Par définition, $v_k = \mathbb{E}(Z_k) - n$, donc :

$$\mathbb{E}(Z_k) = v_k + n = -n \left(\frac{n-1}{n}\right)^k + n = n \left(1 - \left(\frac{n-1}{n}\right)^k\right)$$

$$\boxed{\forall k \geqslant 1,\, \mathbb{E}(Z_k) = n\left(1 - \left(\frac{n-1}{n}\right)^k\right)}$$ □

Partie III

On suppose maintenant que $n = 4$; ainsi l'urne $\mathcal{U}$ contient 4 boules numérotées de 1 à 4.
Soit k un entier supérieur ou égal à 4. On se propose de déterminer la loi de Z_k.

8. Rappeler la valeur de $\mathbb{P}([Z_k = 1])$. Déterminer $\mathbb{P}([Z_k \geqslant 5])$.

Démonstration.

$$\boxed{\text{D'après la question } \textbf{\textit{5.a)}},\ \mathbb{P}([Z_k = 1]) = \frac{1}{4^{k-1}}.}$$

Par ailleurs, l'urne $\mathcal{U}$ ne contenant que 4 boules, on peut obtenir au maximum 4 numéros différentes en k tirages. Ainsi : $[Z_k \geqslant 5] = \varnothing$.

$$\boxed{\text{On en conclut que : } \mathbb{P}([Z_k \geqslant 5]) = \mathbb{P}(\varnothing) = 0}$$ □

9. Montrer : $\mathbb{P}([Z_k = 2]) = 6\, \dfrac{2^k - 2}{4^k}$.

Démonstration.

- L'univers de cette expérience est l'ensemble des k-uplets de $[\![1, 4]\!]$.
  Donc, en particulier, $\text{Card}(\Omega) = 4^k$.
- Un k-tirage qui réalise l'événement $[Z_k = 2]$ est entièrement déterminé par :
  - × le choix des 2 numéros distincts parmi les 4 de l'urne : $\dbinom{4}{2}$ possibilités,
  - × les positions possibles pour les boules portant le 1er numéro (sur les 2) :
    - s'il n'y a qu'une unique boule portant le 1er numéro sur les k tirages : $\dbinom{k}{1}$ possibilités,
    - s'il y a 2 boules portant le 1er numéro sur les k tirages : $\dbinom{k}{2}$ possibilités,
    - $\cdots$
    - s'il y a ℓ boules portant le 1er numéro sur les k tirages : $\dbinom{k}{\ell}$ possibilités,
    - $\cdots$
    - s'il y a $(k-1)$ boules portant le 1er numéro sur les k tirages : $\dbinom{k}{k-1}$ possibilités.

  On obtient donc :

$$\begin{aligned}
\text{Card}([Z_k = 2]) &= \binom{4}{2} \sum_{\ell=1}^{k-1} \binom{k}{\ell} \\
&= \binom{4}{2} \left(\left(\sum_{\ell=0}^{k} \binom{k}{\ell} \right) - \binom{k}{k} - \binom{0}{k} \right) \\
&= \binom{4}{2} \left(\left(\sum_{\ell=0}^{k} \binom{k}{\ell} 1^\ell\, 1^{k-\ell} \right) - 2 \right)
\end{aligned}$$

  Or, d'après la formule du binôme de Newton, on a :

$$\sum_{\ell=0}^{k} \binom{k}{\ell} 1^\ell\, 1^{k-\ell} = 2^k$$

On obtient alors :
$$\text{Card}([Z_k = 2]) = \binom{4}{2} (2^k - 2) = 6\,(2^k - 2)$$

$$\boxed{\text{On en déduit : } \mathbb{P}([Z_k = 2]) = \frac{\text{Card}([Z_k = 2])}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{6\,(2^k - 2)}{4^k}}$$

Commentaire

- On pouvait alléger cette présentation : une fois les deux numéros choisis ($\binom{4}{2}$ possibilités), on peut affirmer qu'à chaque tirage, on a le choix entre l'une de ces deux boules. Ce qui conduit à penser qu'il y a $\binom{4}{2}\ 2^k$ k-tirages convenables.
- Attention : si l'on procède ainsi, on peut ne tirer que la boule portant le 1^{er} numéro (resp. l'autre numéro). Il y a donc 2 k tirages à exclure. On retrouve bien les $\binom{4}{2}$ $(2^k - 2)$ k-tirages convenables.

□

10. On note, pour tout i de $[\![1, 4]\!]$, A_i l'événement :
« la boule numéro i n'a pas été obtenue au cours des k premiers tirages ».

a) Montrer : $\mathbb{P}([Z_k \leqslant 3]) = 4\,\mathbb{P}(A_1) - 6\,\mathbb{P}(A_1 \cap A_2) + 4\,\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$.

Démonstration.
L'événement $[Z_k \leqslant 3]$ est réalisé si et seulement si au moins l'une des 4 boules n'a pas été obtenue au cours des k premiers tirages. Donc :
$$[Z_k \leqslant 3] = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4$$

- D'après la formule du crible :
$$\begin{array}{rl} & \mathbb{P}([Z_k \leqslant 3]) \\ = & \mathbb{P}(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4) \\ = & \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) + \mathbb{P}(A_3) + \mathbb{P}(A_4) \\ - & \mathbb{P}(A_1 \cap A_2) - \mathbb{P}(A_1 \cap A_3) - \mathbb{P}(A_1 \cap A_4) - \mathbb{P}(A_2 \cap A_3) - \mathbb{P}(A_2 \cap A_4) - \mathbb{P}(A_3 \cap A_4) \\ + & \mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3) + \mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_4) + \mathbb{P}(A_1 \cap A_3 \cap A_4) + \mathbb{P}(A_2 \cap A_3 \cap A_4) \\ - & \mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4) \end{array}$$

- Les boules jouant un rôle similaire, la probabilité de ne pas en tirer une au cours de k tirages est la même, quelle que soit la boule considérée. Ainsi :
$$\mathbb{P}(A_1) = \mathbb{P}(A_2) = \mathbb{P}(A_3) = \mathbb{P}(A_4)$$
De même, la probabilité de ne pas en tirer deux au cours de k tirages est la même, quelle que soit les deux boules considérées. Ainsi :
$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2) = \mathbb{P}(A_1 \cap A_3) = \mathbb{P}(A_1 \cap A_4) = \mathbb{P}(A_2 \cap A_3) = \mathbb{P}(A_2 \cap A_4) = \mathbb{P}(A_3 \cap A_4)$$
Et, par le même raisonnement :
$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_4) = \mathbb{P}(A_1 \cap A_3 \cap A_4) = \mathbb{P}(A_2 \cap A_3 \cap A_4)$$

- On en déduit que :
$$\mathbb{P}([Z_k \leqslant 3]) \ = \ 4\ \mathbb{P}(A_1) - 6\ \mathbb{P}(A_1 \cap A_2) + 4\ \mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3) - \mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4)$$

- Enfin, on remarque que : $A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 = \varnothing$.
  En effet, il n'est pas possible, lors des k tirages, de ne tirer aucune des boules de l'urne. Ainsi :

$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4) = 0$$

$$\boxed{\text{On en déduit : } \mathbb{P}([Z_k \leqslant 3]) = 4\,\mathbb{P}(A_1) - 6\,\mathbb{P}(A_1 \cap A_2) + 4\,\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3)}$$ □

Commentaire

Dans le programme, il est précisé que la formule du crible ne doit être connu que jusqu'à l'ordre 3. Il faudrait donc, si on suit le programme à la lettre, adopter la rédaction suivante.

- D'après la formule du crible appliquée à A_1 et $A_2 \cup A_3 \cup A_4$, on a :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{P}([Z_k \leqslant 3]) & = & \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2 \cup A_3 \cup A_4) - \mathbb{P}(A_1 \ \cap \ (A_2 \cup A_3 \cup A_4)) \\ & = & \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2 \cup A_3 \cup A_4) - \mathbb{P}((A_1 \cap A_2) \ \cup \ (A_1 \cap A_3) \ \cup \ (A_1 \cap A_4)) \end{array}$$

- D'après la formule du crible appliquée à A_2, A_3 et A_4, on obtient :

$$\begin{array}{rcll} \mathbb{P}(A_2 \cup A_3 \cup A_4) & = & \mathbb{P}(A_2) + \mathbb{P}(A_3) + \mathbb{P}(A_4) & \\ & & -\ \mathbb{P}(A_2 \cap A_3) - \mathbb{P}(A_2 \cap A_4) - \mathbb{P}(A_3 \cap A_4) & \\ & & +\ \mathbb{P}(A_2 \cap A_3 \cap A_4) & \\ & = & 3\,\mathbb{P}(A_1) - 3\,\mathbb{P}(A_1 \cap A_2) + \mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3) & \textit{(car les boules sont indiscernables)} \end{array}$$

- D'après la formule du crible appliquée à $A_1 \cap A_2$, $A_1 \cap A_3$ et $A_1 \cap A_4$, on obtient :

$$\begin{array}{rll} & \mathbb{P}((A_1 \cap A_2) \ \cup \ (A_1 \cap A_3) \ \cup \ (A_1 \cap A_4)) & \\ = & \mathbb{P}(A_1 \cap A_2) + \mathbb{P}(A_1 \cap A_3) + \mathbb{P}(A_1 \cap A_4) & \\ & -\ \mathbb{P}((A_1 \cap A_2) \ \cap \ (A_1 \cap A_3)) - \mathbb{P}((A_1 \cap A_2) \ \cap \ (A_1 \cap A_4)) & \\ & -\ \mathbb{P}((A_1 \cap A_3) \ \cap \ (A_1 \cap A_4)) & \\ & +\ \mathbb{P}((A_1 \cap A_2) \ \cap \ (A_1 \cap A_3) \ \cap \ (A_1 \cap A_4)) & \\ = & \mathbb{P}(A_1 \cap A_2) + \mathbb{P}(A_1 \cap A_3) + \mathbb{P}(A_1 \cap A_4) & \\ & -\ \mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3) - \mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_4) & \\ & -\ \mathbb{P}(A_1 \cap A_3 \cap A_4) & \\ & +\ \mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4) & \\ = & 3\,\mathbb{P}(A_1 \cap A_2) - 3\,\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3) + \mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4) & \textit{(car les boules sont indiscernables)} \\ = & 3\,\mathbb{P}(A_1 \cap A_2) - 3\,\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3) & \textit{(car } \bigcap\limits_{i=1}^{4} A_i = \varnothing \textit{)} \end{array}$$

- Finalement $\begin{array}{rcl} \mathbb{P}([Z_k \leqslant 3]) & = & \mathbb{P}(A_1) \\ & & +\ (3\,\mathbb{P}(A_1) - 3\,\mathbb{P}(A_1 \cap A_2) + \mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3)) \\ & & -\ (3\,\mathbb{P}(A_1 \cap A_2) - 3\,\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3)) \\ & = & 4\,\mathbb{P}(A_1) - 6\,\mathbb{P}(A_1 \cap A_2) + 4\,\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3) \end{array}$

b) Calculer $\mathbb{P}(A_1)$, $\mathbb{P}(A_1 \cap A_2)$ et $\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$.

Démonstration.

- On remarque : $A_1 = [X_1 = 0]$.
  D'après la question ***1.*** : $\mathbb{P}(A_1) = \mathbb{P}([X_1 = 0]) = \binom{k}{0} \left(\frac{1}{4}\right)^0 \left(1 - \frac{1}{4}\right)^{k-0} = \left(\frac{3}{4}\right)^k$.
  $$\boxed{\mathbb{P}(A_1) = \left(\frac{3}{4}\right)^k}$$
- On remarque que :
  $$A_1 \cap A_2 = [X_1 = 0] \cap [X_2 = 0] = [X_1 + X_2 = 0]$$
  D'après la question ***3.a)*** :
  $$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2) = \mathbb{P}([X_1 + X_2 = 0]) = \binom{k}{0} \left(\frac{2}{4}\right)^0 \left(1 - \frac{2}{4}\right)^{k-0} = \left(\frac{1}{2}\right)^k$$
  $$\boxed{\mathbb{P}(A_1 \cap A_2) = \left(\frac{1}{2}\right)^k}$$
- On remarque que :
  $$A_1 \cap A_2 \cap A_3 = [X_4 = k]$$
  En effet, ne piocher aucune des boules 1 à 3 au cours des k tirages, revient exactement à ne piocher que la boule numéro 4 au cours de ces k tirages.
  D'après la question ***1.*** :
  $$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \mathbb{P}([X_4 = k]) = \binom{k}{k} \left(\frac{1}{4}\right)^k \left(1 - \frac{1}{4}\right)^{k-k} = \left(\frac{1}{4}\right)^k$$
  $$\boxed{\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \left(\frac{1}{4}\right)^k}$$

□

c) En déduire : $\mathbb{P}([Z_k \leqslant 3])$, puis $\mathbb{P}([Z_k = 3])$ et $\mathbb{P}([Z_k = 4])$.

Démonstration.

- On calcule :
  $$\begin{aligned} \mathbb{P}([Z_k \leqslant 3]) &= 4\,\mathbb{P}(A_1) - 6\,\mathbb{P}(A_1 \cap A_2) + 4\,\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3) && \textit{(d'après \textbf{9.a)})} \\ &= 4 \left(\frac{3}{4}\right)^k - 6 \left(\frac{1}{2}\right)^k + 4 \left(\frac{1}{4}\right)^k && \textit{(d'après \textbf{9.b)}} \\ &= \frac{4 \times 3^k - 6 \times 2^k + 4}{4^k} \end{aligned}$$
  $$\boxed{\mathbb{P}([Z_k \leqslant 3]) = \frac{4 \times 3^k - 6 \times 2^k + 4}{4^k}}$$

- On sait que :
$$[Z_k \leqslant 3] = [Z_k = 1] \cup [Z_k = 2] \cup [Z_k = 3]$$
Les événements $[Z_k = 1]$, $[Z_k = 2]$ et $[Z_k = 3]$ sont 2 à 2 incompatibles. Donc :
$$\mathbb{P}([Z_k \leqslant 3]) = \mathbb{P}([Z_k = 1]) + \mathbb{P}([Z_k = 2]) + \mathbb{P}([Z_k = 3])$$
On obtient donc :
$$\begin{array}{rcl} \mathbb{P}([Z_k = 3]) & = & \mathbb{P}([Z_k \leqslant 3]) - \mathbb{P}([Z_k = 1]) - \mathbb{P}([Z_k = 2]) \\ & = & \dfrac{4 \times 3^k - 6 \times 2^k + 4}{4^k} - \dfrac{1}{4^{k-1}} - \dfrac{6\,(2^k - 2)}{4^k} \quad \textit{(d'après \textbf{7.} et \textbf{8.})} \\ & = & \dfrac{4 \times 3^k - 6 \times 2^k + \cancel{4} - \cancel{4} - 6 \times 2^k + 12}{4^k} \\ & = & \dfrac{4 \times 3^k - 12 \times 2^k + 12}{4^k} \end{array}$$

- On remarque que :
$$[Z_k = 4] = \overline{[Z_k \leqslant 3]}$$
On obtient donc :
$$\mathbb{P}([Z_k = 4]) = 1 - \mathbb{P}([Z_k \leqslant 3]) = 1 - \frac{4 \times 3^k - 6 \times 2^k + 4}{4^k} = \frac{4^k - 4 \times 3^k + 6 \times 2^k - 4}{4^k}$$

$$\boxed{\mathbb{P}([Z_k = 3]) = \frac{4 \times 3^k - 12 \times 2^k + 12}{4^k} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}([Z_k = 4]) = \frac{4^k - 4 \times 3^k + 6 \times 2^k - 4}{4^k}} \quad \square$$