DS4 (vA)

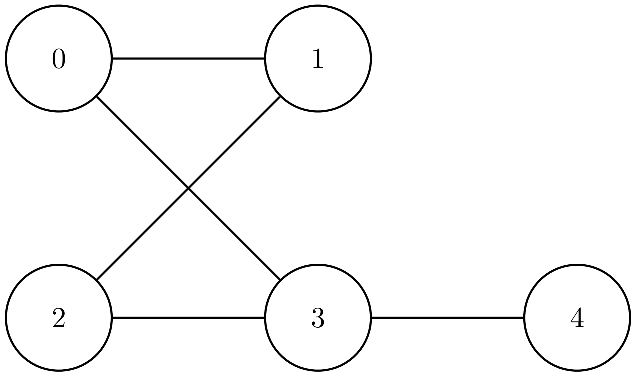
La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidat·es sont invité·es à ***encadrer*** *dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*
Aucun document n'est autorisé. ***L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique*** *est* ***interdite****. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*
Si au cours de l'épreuve, un candidat ou une candidate repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

On suppose, et c'est valable pour toute l'épreuve, que les librairies suivantes sont importées sous leurs alias habituels :

- `import numpy as np`
- `import numpy.linalg as al`
- `import numpy.random as rd`
- `import matplotlib.pyplot as plt`

Exercice 1

On considère le graphe G suivant et on note A la matrice d'adjacence de G.



1. Déterminer la matrice A en expliquant sa construction.

2. ***a)*** Par lecture du graphe, donner (en listant leurs sommets) les chaînes de longueur 3 reliant les sommets 2 et 3. Combien y en a-t-il ?

b) On considère la fonction **Python** suivante :

```
def f(M,k):
    N=al.matrix_power(M,k)
    return N
```

On suppose que l'on a saisi la matrice A et on considère les instructions :

```
B=f(A,---)
n=B[---]
print(n)
```

Compléter ces instructions pour qu'elles permettent l'affichage du nombre trouvé à la question ***2.a)***.

On note D la matrice diagonale, appelée matrice des degrés de G, dont l'élément diagonal situé à la ligne i et à la colonne i est le degré du sommet numéro i (ceci étant valable pour tout $i \in [\![1,5]\!]$).
On définit également la matrice L, appelée matrice laplacienne de G, en posant $L = D - A$.
On note $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5$ les valeurs propres non nécessairement distinctes de L et on suppose $\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \lambda_3 \leqslant \lambda_4 \leqslant \lambda_5$.

3. ***a)*** Déterminer la matrice D.

b) Vérifier que l'on a $L = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

c) Pourquoi la matrice L est-elle diagonalisable ?

4. On se propose dans cette question de montrer que les valeurs propres de L sont positives ou nulles et que $\lambda_1 = 0$.

Soit $X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{pmatrix}$ et $U = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

a) On identifie une matrice de $\mathscr{M}_1(\mathbb{R})$ à un réel. À quel ensemble appartient la quantité ${}^tXLX$?

b) Exprimer ${}^tXLX$ en fonction de a, b, c, d et e puis montrer que l'on a :

$$ {}^tXLX = (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-d)^2 + (d-a)^2 + (e-d)^2 $$

c) On suppose que X est un vecteur propre de L associé à une certaine valeur propre λ. Déterminer LX puis ${}^tXLX$ en fonction de λ, a, b, c, d et e. En déduire que les valeurs propres de L sont positives ou nulles.

d) Déterminer LU et en déduire que $\lambda_1 = 0$.

5. a) À l'aide de la question ***3.b)***, montrer l'équivalence :

$$ LX = 0 \iff X \in \text{Vect}\,(U) $$

b) Conclure que λ_2, λ_3, λ_4 et λ_5 sont des réels strictement positifs.

Exercice 2

Soit n un entier naturel non nul et p un réel de $]0,1[$. On pose $q = 1-p$.
On dispose de deux urnes, l'urne U qui contient n boules numérotées de 1 à n et l'urne V qui contient des boules blanches en proportion p.
On pioche une boule au hasard dans U et on note X la variable aléatoire égale au numéro de la boule tirée.
Si X prend la valeur k, on pioche k boules dans V, une par une, avec remise à chaque fois de la boule tirée, et on appelle Y la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches obtenues.

1. Dans le cas où $n = 1$, reconnaître la loi de Y.

On revient au cas général

2. Reconnaître la loi de X et donner son espérance et sa variance.

3. Soit k un élément de $[\![1,n]\!]$. Reconnaître la loi de Y, conditionnellement à l'événement $[X=k]$, et en déduire, en distinguant les cas $0 \leqslant i \leqslant k$ et $k < i$, la probabilité $\mathbb{P}_{[X=k]}(\,[Y=i]\,)$.

4. On rappelle les commandes **Python** suivantes qui permettent de simuler des variables usuelles discrètes :

- `rd.randint(a, b+1)` simule une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[\![a,b]\!]$,
- `rd.binomial(n, p)` simule une variable aléatoire suivant la loi binomiale de paramètres n, p,
- `rd.geometric(p)` simule une variable aléatoire suivant la loi géométrique de paramètre p,
- `rd.poisson(a)` simule une variable aléatoire suivant la loi de Poisson de paramètre a.

Compléter le script **Python** suivant afin qu'il permette de simuler les variables X et Y.

```
n = int(input('entrez la valeur de n :'))
p = float(input('entrez la valeur de p : '))
X = ------
Y = ------
```

5. a) Justifier que l'ensemble $Y(\Omega)$ des valeurs prises par Y est égale à $[\![0,n]\!]$, puis démontrer :

$$ \mathbb{P}(\,[Y=0]\,) \;=\; \frac{q\,(1-q^n)}{n\,(1-q)} $$

b) Écrire, pour tout i de $[\![1,n]\!]$, la probabilité $\mathbb{P}(\,[Y=i]\,)$ sous forme d'une somme de $n-i+1$ termes que l'on ne cherchera pas à simplifier.

6. ***a)*** Soit i et k deux entiers naturels tels que $1 \leqslant i \leqslant k \leqslant n$. Démontrer : $i\,\binom{k}{i} = k\,\binom{k-1}{i-1}$.

b) Établir ensuite que Y possède une espérance et que celle-ci est donnée par :

$$\mathbb{E}(Y) \;=\; \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(k\sum_{i=1}^{k}\binom{k-1}{i-1}\,p^i\,q^{k-i}\right)$$

c) En déduire : $\mathbb{E}(Y) = \dfrac{(n+1)\,p}{2}$.

7. ***a)*** Établir :

$$\forall n \geqslant 1, \quad \mathbb{E}\big(Y\,(Y-1)\big) \;=\; \frac{1}{n}\sum_{k=2}^{n}\left(k\,(k-1)\sum_{i=2}^{k}\binom{k-2}{i-2}\,p^i\,q^{k-i}\right)$$

b) Montrer que l'on a :

$$\forall n \geqslant 2, \quad \mathbb{E}\big(Y\,(Y-1)\big) \;=\; \frac{(n^2-1)\,p^2}{3}$$

c) Vérifier que cette expression reste valable pour $n=1$.

d) Exprimer, sans chercher à la calculer, la variance de Y en fonction de $\mathbb{E}\big(Y\,(Y-1)\big)$ et $\mathbb{E}(Y)$.

Exercice 3

Dans tout l'exercice, la lettre n désigne un entier naturel.
On pose $u_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{4-x^2}\,dx$ et on a en particulier $u_0 = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{4-x^2}\,dx$.

1. ***a)*** Déterminer les réels a et b tels que :

$$\forall x \in [0,1], \;\; \frac{1}{4-x^2} = \frac{a}{2-x} + \frac{b}{2+x}$$

b) En déduire que $u_0 = \dfrac{1}{4}\ln(3)$.

2. Calculer u_1.

3. ***a)*** Pour tout entier naturel n, exprimer $4u_n - u_{n+2}$ explicitement en fonction de n.

b) Compléter la fonction **Python** ci-dessous afin qu'elle renvoie la valeur de u_n à l'appel de `suite(n)`.

```
def suite(n):
    if (-1)**n==1:
        u=np.log(3)/4
        for k in range(2,n+1,2):
            u=4*u-...
    else:
        u=np.log(2/np.sqrt(3))
        for k in range(3,n+1,2):
            u=4*u-...
    return u
```

4. ***a)*** Utiliser la définition de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour établir l'encadrement suivant :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \frac{1}{4(n+1)} \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{3(n+1)}$$

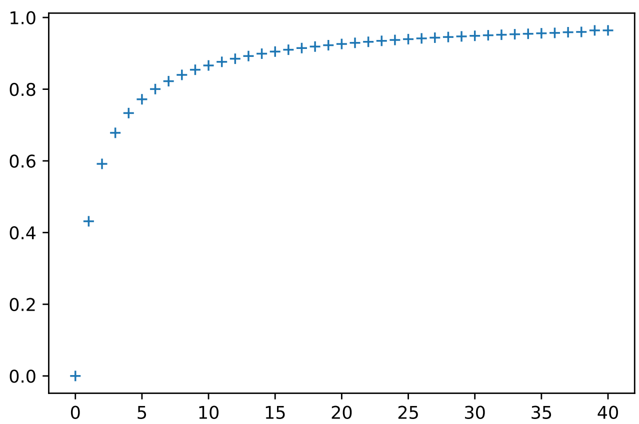
b) En déduire la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ainsi que la valeur de $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

c) La série de terme général u_n est-elle convergente ou divergente ? Pour quelle raison ?

5. ***a)*** On considère le script suivant qui utilise la fonction déclarée plus haut :

```
x=np.arange(0,41)
u=[] # liste vide
for n in range(41):
    u.append(3*n*suite(n))
plt.plot(x,u,'+')
plt.show()
```

Ce script renvoie le graphique suivant :



Laquelle des quatre conjectures suivantes peut-on émettre quant au comportement de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ au voisinage de $+\infty$?

❶ $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} 3n$. ❷ $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$. ❸ $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{3n}$. ❹ $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$.

b) Établir, grâce à une intégration par parties, l'égalité suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \frac{1}{3(n+1)} - \frac{2}{n+1}\int_0^1 \frac{x^{n+2}}{(4-x^2)^2}\,dx$$

c) Montrer par encadrement que :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \frac{x^{n+2}}{(4-x^2)^2}\,dx = 0$$

d) Vérifier la conjecture établie à la question ***5.a)***.

Exercice 4

Soit A la matrice de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ donnée par : $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $A^2 - 7A$.

2. En déduire que les seuls réels susceptibles d'être valeurs propres de A sont les réels 3 et 4.

3. Trouver alors toutes les valeurs propres de A, et pour chacune d'entre elles, donner une base du sous-espace propre associé.

4. La matrice A est-elle inversible ?

5. La matrice A est-elle diagonalisable ?