

---

## DS4 (vA) - Correction

---

*La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.*

*Les candidat-es sont invité-es à **encadrer** dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*

*Aucun document n'est autorisé. **L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.** Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*

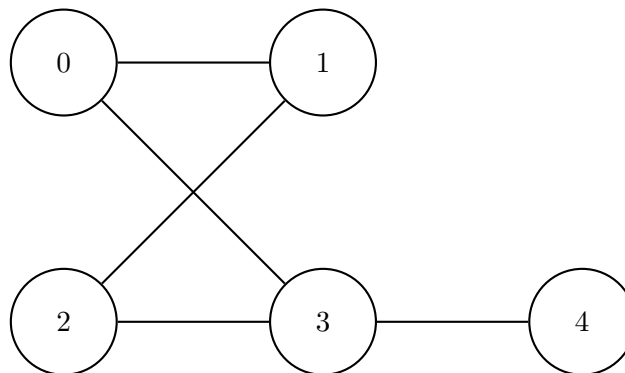
*Si au cours de l'épreuve, un candidat ou une candidate repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.*

On suppose, et c'est valable pour toute l'épreuve, que les librairies suivantes sont importées sous leurs alias habituels :

- `import numpy as np`
- `import numpy.linalg as al`
- `import numpy.random as rd`
- `import matplotlib.pyplot as plt`

### Exercice 1 (EDHEC 2023)

On considère le graphe  $G$  suivant et on note  $A$  la matrice d'adjacence de  $G$ .



1. Déterminer la matrice  $A$  en expliquant sa construction.

*Démonstration.* Le graphe n'est pas orienté. Ainsi, dans la matrice d'adjacence  $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq 5} \in \mathcal{M}_5(\mathbb{R})$  (car le graphe comporte 5 sommets), on met un 1 en position  $(i,j)$  s'il y a une arête entre les sommets  $i-1$  et  $j-1$  et un 0 sinon (on prend en compte le fait que les sommets sont numérotés à partir de 0). En particulier, la matrice  $A$  sera symétrique. Ainsi

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

□

2. a) Par lecture du graphe, donner (en listant leurs sommets) les chaînes de longueur 3 reliant les sommets 2 et 3. Combien y en a-t-il ?

*Démonstration.* On a  $2-1-0-3$ ,  $2-1-2-3$ ,  $2-3-0-3$ ,  $2-3-2-3$  et  $2-3-4-3$  soit

5 chemins de longueur 3 entre les sommets 2 et 3.

□

b) On considère la fonction **Python** suivante :

```
1 def f(M,k):
2     N=al.matrix_power(M,k)
3     return N
```

On suppose que l'on a saisi la matrice  $A$  et on considère les instructions :

```
1 B=f(A,---)
2 n=B[---]
3 print(n)
```

Compléter ces instructions pour qu'elles permettent l'affichage du nombre trouvé à la question 2.a).

*Démonstration.* D'après le cours, le nombre de chemins de longueur 3 reliant les sommets 2 et 3 est le coefficient en position (3, 4) (3<sup>e</sup> ligne, 4<sup>e</sup> colonne) de la matrice  $A^3$  (décalage d'indice parce que les sommets sont numérotés à partir de 0). Ainsi, on complète de la manière suivante :

```

1  B=f(A,3)
2  n=B[2,3]
3  print(n)
```

(**Python** numérote aussi à partir de 0) □

On note  $D$  la matrice diagonale, appelée matrice des degrés de  $G$ , dont l'élément diagonal situé à la ligne  $i$  et à la colonne  $i$  est le degré du sommet numéro  $i$  (ceci étant valable pour tout  $i \in \llbracket 1, 5 \rrbracket$ ).

On définit également la matrice  $L$ , appelée matrice laplacienne de  $G$ , en posant  $L = D - A$ .

On note  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5$  les valeurs propres non nécessairement distinctes de  $L$  et on suppose  $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \lambda_4 \leq \lambda_5$ .

3. a) Déterminer la matrice  $D$ .

*Démonstration.* Le degré d'un sommet est le nombre de voisins de ce sommet (c'est-à-dire le nombre d'arêtes qui partent de ce sommet). Par conséquent, on a

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

□

b) Vérifier que l'on a  $L = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ .

*Démonstration.*

$$L = D - A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

□

c) Pourquoi la matrice  $L$  est-elle diagonalisable ?

*Démonstration.* La matrice  $L$  est symétrique donc diagonalisable.

**Commentaire**

Il aurait été plus judicieux d'introduire les notations  $\lambda_1, \dots, \lambda_5$  après cette question, puisque c'est la diagonalisabilité de  $L$  qui justifie l'existence des valeurs propres.

□

4. On se propose dans cette question de montrer que les valeurs propres de  $L$  sont positives ou nulles et que  $\lambda_1 = 0$ .

$$\text{Soit } X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{pmatrix} \text{ et } U = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- a) On identifie une matrice de  $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$  à un réel. À quel ensemble appartient la quantité  ${}^tX LX$  ?

*Démonstration.* Comme  $X \in \mathcal{M}_{5,1}(\mathbb{R})$  et que  $L \in \mathcal{M}_5(\mathbb{R})$ , alors  $LX \in \mathcal{M}_{5,1}(\mathbb{R})$ . Ainsi,  ${}^tX LX$  est le produit d'une matrice ligne (à 5 colonnes) et d'une matrice colonne (à 5 lignes), c'est une matrice à une ligne et une colonne, identifiée à un réel comme rappelé en début de question.  $\square$

- b) Exprimer  ${}^tX LX$  en fonction de  $a, b, c, d$  et  $e$  puis montrer que l'on a :

$${}^tX LX = (a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - d)^2 + (d - a)^2 + (e - d)^2$$

*Démonstration.* Tout d'abord,

$$LX = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a - b - d \\ -a + 2b - c \\ -b + 2c - d \\ -a - c + 3d - e \\ -d + e \end{pmatrix}$$

D'où

$$\begin{aligned} {}^tX LX &= (a \ b \ c \ d \ e) \begin{pmatrix} 2a - b - d \\ -a + 2b - c \\ -b + 2c - d \\ -a - c + 3d - e \\ -d + e \end{pmatrix} \\ &= 2a^2 - ba - da - ba + 2b^2 - cb - bc + 2c^2 - cd - ad - dc + 3d^2 - de - de + e^2 \\ &= 2a^2 + 2b^2 + 2c^2 + 3d^2 + e^2 - 2ab - 2bc - 2ad - 2cd - 2de \\ &= (a - b)^2 + (b - c)^2 + (a - d)^2 + (c - d)^2 + (d - e)^2 \end{aligned}$$

$\square$

- c) On suppose que  $X$  est un vecteur propre de  $L$  associé à une certaine valeur propre  $\lambda$ . Déterminer  $LX$  puis  ${}^tX LX$  en fonction de  $\lambda, a, b, c, d$  et  $e$ . En déduire que les valeurs propres de  $L$  sont positives ou nulles.

*Démonstration.* Tout d'abord,  $LX = \lambda X$ . On en déduit que

$${}^tX LX = \lambda {}^tX X = \lambda (a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2)$$

$X$  étant un vecteur propre, on a nécessairement  $X \neq 0_{\mathcal{M}_{5,1}(\mathbb{R})}$  et donc  $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 > 0$ . D'après la question précédente, on a donc

$$\lambda = \frac{(a - b)^2 + (b - c)^2 + (a - d)^2 + (c - d)^2 + (d - e)^2}{a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2} \geq 0$$

Les valeurs propres de  $L$  sont positives ou nulles.

□

d) Déterminer  $LU$  et en déduire que  $\lambda_1 = 0$ .

*Démonstration.*  $LU = 0_{\mathcal{M}_{5,1}(\mathbb{R})}$  et  $U \neq 0_{\mathcal{M}_{5,1}(\mathbb{R})}$  donc 0 est valeur propre de  $L$ . Puisque toutes les valeurs propres de  $L$  sont positives ou nulles d'après la question précédente et qu'on les a listées par ordre croissant, on a bien

$$\boxed{\lambda_1 = 0.}$$

□

5. a) À l'aide de la question 3.b), montrer l'équivalence :

$$LX = 0 \iff X \in \text{Vect}(U)$$

*Démonstration.*

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{l} 2a - b - d = 0 \\ -a + 2b - c = 0 \\ -b + 2c - d = 0 \\ -a - c + 3d - e = 0 \\ -d + e = 0 \end{array} \right. &\iff \left\{ \begin{array}{l} 2a - b - d = 0 \\ 3b - 2c - d = 0 \\ -b + 2c - d = 0 \\ -b - 2c + 5d - 2e = 0 \\ -d + e = 0 \end{array} \right. && \begin{array}{l} \\ L_2 \leftarrow 2L_2 + L_1 \\ \\ L_4 \leftarrow 2L_4 + L_1 \end{array} \\ &\iff \left\{ \begin{array}{l} 2a - b - d = 0 \\ 3b - 2c - d = 0 \\ 4c - 4d = 0 \\ -8c + 14d - 6e = 0 \\ -d + e = 0 \end{array} \right. && \begin{array}{l} \\ \\ L_3 \leftarrow 3L_3 + L_2 \\ L_4 \leftarrow 3L_4 + L_2 \end{array} \\ &\iff \left\{ \begin{array}{l} 2a - b - d = 0 \\ 3b - 2c - d = 0 \\ 4c - 4d = 0 \\ 6d - 6e = 0 \\ -d + e = 0 \end{array} \right. && \begin{array}{l} \\ \\ \\ L_4 \leftarrow L_4 + 2L_3 \end{array} \\ &\iff \left\{ \begin{array}{l} 2a - b - d = 0 \\ 3b - 2c - d = 0 \\ 4c - 4d = 0 \\ 6d - 6e = 0 \\ 0 = 0 \end{array} \right. && \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ L_5 \leftarrow 6L_5 + L_4 \end{array} \\ &\iff \left\{ \begin{array}{l} 2a - b = d \\ 3b - 2c = d \\ c = d \\ e = d \end{array} \right. \\ &\iff a = b = c = d = e && \text{(par remontées successives)} \\ &\iff X \in \text{Vect}(U) \end{aligned}$$

□

b) Conclure que  $\lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$  et  $\lambda_5$  sont des réels strictement positifs.

*Démonstration.* D'après la question précédente :

$$E_0(L) = \text{Vect}(U)$$

Ainsi, la famille  $\mathcal{F} = (U)$  :

- engendre  $E_0(L)$
- est libre car constituée d'un unique vecteur non nul

On en déduit que  $\mathcal{F}$  est une base de  $E_0(L)$  et il suit que  $\dim(E_0(L)) = 1$ . Ceci prouve que les valeurs propres  $\lambda_2, \dots, \lambda_5$  sont distinctes de  $\lambda_1 = 0$  et donc sont non nulles. Puisque toutes les valeurs propres sont positives, il vient alors que

$\lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ et $\lambda_5$ sont des réels strictement positifs.
---

□

## Exercice 2 (EDHEC 2020)

Soit  $n$  un entier naturel non nul et  $p$  un réel de  $]0, 1[$ . On pose  $q = 1 - p$ .

On dispose de deux urnes, l'urne  $U$  qui contient  $n$  boules numérotées de 1 à  $n$  et l'urne  $V$  qui contient des boules blanches en proportion  $p$ .

On pioche une boule au hasard dans  $U$  et on note  $X$  la variable aléatoire égale au numéro de la boule tirée.

Si  $X$  prend la valeur  $k$ , on pioche  $k$  boules dans  $V$ , une par une, avec remise à chaque fois de la boule tirée, et on appelle  $Y$  la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches obtenues.

1. Dans le cas où  $n = 1$ , reconnaître la loi de  $Y$ .

*Démonstration.*

- Dans le cas où  $n = 1$ , l'urne  $U$  contient une unique boule numérotée 1. Ainsi, l'événement  $[X = 1]$  est toujours réalisé (autrement dit :  $[X = 1] = \Omega$ ).
- Comme l'événement  $[X = 1]$  est réalisé, on pioche 1 boule dans l'urne  $V$ . Cette expérience est une épreuve de Bernoulli de paramètre de succès  $p$  (probabilité de piocher une boule blanche).
- La v.a.r.  $Y$  prend la valeur 1 en cas de succès et la valeur 0 en cas d'échec.

On en déduit :  $Y \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$ .

### Commentaire

En toute rigueur, on a ici démontré que la **loi conditionnelle de  $Y$  sachant  $[X = 1]$**  est la loi  $\mathcal{B}(p)$ . Cependant, comme  $[X = 1] = \Omega$ , cela revient bien à dire que la loi de  $Y$  est la loi  $\mathcal{B}(p)$ . En effet :

- comme  $n = 1$ , on peut obtenir 0 ou 1 boule blanche en piochant dans l'urne  $V$ .  
Ainsi :  $Y(\Omega) \subset \{0, 1\}$ .
- De plus :

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}([Y = 1]) &= \mathbb{P}([Y = 1] \cap [X = 1]) && (\text{car } [X = 1] = \Omega) \\
 &= \mathbb{P}([X = 1]) \mathbb{P}_{[X=1]}([Y = 1]) \\
 &= \mathbb{P}(\Omega) \times p && (\text{car la loi conditionnelle de } Y \text{ sachant } [X = 1] \text{ est } \mathcal{B}(p)) \\
 &= 1 \times p = p
 \end{aligned}$$

On retrouve bien :  $Y \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$ . □

*On revient au cas général*

2. Reconnaître la loi de  $X$  et donner son espérance et sa variance.

*Démonstration.*

- La première partie de l'expérience consiste en un choix effectué de manière équiprobable parmi  $n$  issues numérotées de 1 à  $n$ .
- La v.a.r.  $X$  correspond au numéro obtenu lors de cette expérience.

On en déduit :  $X \hookrightarrow \mathcal{U}([1, n])$ .

Ainsi :  $\mathbb{E}(X) = \frac{n+1}{2}$  et  $\mathbb{V}(X) = \frac{n^2-1}{12}$  □

3. Soit  $k$  un élément de  $\llbracket 1, n \rrbracket$ . Reconnaitre la loi de  $Y$ , conditionnellement à l'événement  $[X = k]$ , et en déduire, en distinguant les cas  $0 \leq i \leq k$  et  $k < i$ , la probabilité  $\mathbb{P}_{[X=k]}([Y = i])$ .

*Démonstration.*

- Si l'événement  $[X = k]$  est réalisé, c'est qu'on a pioché la boule numérotée  $k$  dans l'urne  $U$ . On effectue alors  $k$  tirages dans l'urne  $V$ . Cette deuxième partie de l'expérience consiste en la succession de  $k$  épreuves de Bernoulli indépendantes et de même paramètre de succès  $p$  (probabilité d'obtenir une boule blanche dans l'urne  $V$ ).
- La v.a.r.  $Y$  correspond au nombre de succès de cette expérience.

On en déduit que la loi conditionnelle de  $Y$  sachant  $[X = k]$  est la loi  $\mathcal{B}(k, p)$ .

$$\text{Ainsi : } \forall i \in \mathbb{N}, \mathbb{P}_{[X=k]}([Y = i]) = \begin{cases} \binom{k}{i} p^i (1-p)^{k-i} & \text{si } 0 \leq i \leq k \\ 0 & \text{si } i > k \end{cases} \quad \square$$

4. On rappelle les commandes **Python** suivantes qui permettent de simuler des variables usuelles discrètes :

- `rd.randint(a, b+1)` simule une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur  $\llbracket a, b \rrbracket$ ,
- `rd.binomial(n, p)` simule une variable aléatoire suivant la loi binomiale de paramètres  $n, p$ ,
- `rd.geometric(p)` simule une variable aléatoire suivant la loi géométrique de paramètre  $p$ ,
- `rd.poisson(a)` simule une variable aléatoire suivant la loi de Poisson de paramètre  $a$ .

Compléter le script **Python** suivant afin qu'il permette de simuler les variables  $X$  et  $Y$ .

```

1 n = int(input('entrez la valeur de n :'))
2 p = float(input('entrez la valeur de p : '))
3 X = -----
4 Y = -----

```

*Démonstration.*

• **Début du programme**

Les valeurs de `n` et de `p` sont choisies par l'utilisateur à l'aide de la fonction `input`.

```

1 n = int(input('entrez la valeur de n :'))
2 p = float(input('entrez la valeur de p : '))

```

• **Simulation de  $X$**

D'après la question 2., la v.a.r.  $X$  suit la loi  $\mathcal{U}(\llbracket 1, n \rrbracket)$ . On stocke alors dans la variable `X` une simulation de la v.a.r.  $X$  à l'aide de l'appel suivant :

```

3 X = rd.randint(1, n+1)

```

Notons qu'on simule ainsi un tirage dans l'urne  $U$ . Le numéro de la boule piochée est donc stockée dans la variable `X`.



• **Simulation de  $Y$**

En ligne 3, le numéro  $k$  de la boule piochée dans l'urne  $U$  est stockée dans la variable  $X$ . Une fois ce nombre connu, la loi conditionnelle de  $Y$  sachant  $[X = k]$  est la loi  $\mathcal{B}(k, p)$  (d'après la question précédente). On stocke alors dans la variable  $Y$  une simulation de la v.a.r.  $Y$  à l'aide de l'appel suivant :

```
4 Y = rd.binomial(X, p)
```

□

5. a) Justifier que l'ensemble  $Y(\Omega)$  des valeurs prises par  $Y$  est égal à  $\llbracket 0, n \rrbracket$ , puis démontrer :

$$\mathbb{P}( [Y = 0] ) = \frac{q(1 - q^n)}{n(1 - q)}$$

*Démonstration.*

- Démontrons :  $Y(\Omega) = \llbracket 0, n \rrbracket$ . Pour cela, on procède par double inclusion.
  - (⊂) On effectue au maximum  $n$  tirages dans l'urne  $V$ . Le nombre de boules blanches obtenues peut donc varier au plus entre 0 et  $n$ . Donc :  $Y(\Omega) \subset \llbracket 0, n \rrbracket$ .
  - (⊃) Montrons maintenant que la v.a.r.  $Y$  peut prendre chaque valeur entière entre 0 et  $n$ .  
Si on obtient la boule numérotée  $n$  dans l'urne  $U$ , on effectue alors  $n$  tirages dans l'urne  $V$ .
    - × Si on n'obtient aucune boule blanche, alors l'événement  $[Y = 0]$  est réalisé.
    - × Si on obtient 1 boule blanche, alors l'événement  $[Y = 1]$  est réalisé.
    - × ...
    - × Si on obtient  $n$  boules blanches, alors l'événement  $[Y = n]$  est réalisé.

Enfinement :  $Y(\Omega) = \llbracket 0, n \rrbracket$ .

**Commentaire**

- On donne dans cette démonstration des exemples de tirages qui réalisent les événements  $[Y = i]$ . Il était bien sûr possible d'en choisir d'autres.  
Par exemple, pour l'événement  $[Y = 0]$ , si on obtient la boule numérotée 2 dans l'urne  $U$ , alors on effectue un 2-tirage dans l'urne  $V$ .  
Si ce 2-tirage ne comporte pas de boule blanche, alors l'événement  $[Y = 0]$  est réalisé.
- On peut un peu moins détailler la démonstration de cette question en rédigeant différemment :  
Si on obtient la boule numérotée  $n$  dans l'urne  $U$ , alors on effectue un  $n$ -tirage dans l'urne  $V$ , les tirages dans cette urne peuvent fournir de 0 à  $n$  boules blanches. Donc, pour tout  $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$ , l'événement  $[X = i]$  peut être réalisé.
- Comme l'énoncé demande de **justifier** :  $Y(\Omega) = \llbracket 0, n \rrbracket$ , on peut penser qu'une réponse brève était attendue.
- Remarquons que pour la suite de l'exercice, notamment la détermination de la loi de  $Y$ , l'inclusion «  $Y(\Omega) \subset \llbracket 0, n \rrbracket$  » suffit.

- La famille  $([X = k])_{k \in \llbracket 1, n \rrbracket}$  forme un système complet d'événements.  
Ainsi, par formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}([Y = 0]) &= \sum_{k=1}^n \mathbb{P}([X = k] \cap [Y = 0]) \\
 &= \sum_{k=1}^n \mathbb{P}([X = k]) \mathbb{P}_{[X=k]}([Y = 0]) \quad (\text{car : } \forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \\
 &\quad \mathbb{P}([X = k]) \neq 0) \\
 &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} \times \binom{k}{0} p^0 (1-p)^{k-0} \quad (\text{d'après 2. et 3.}) \\
 &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (1-p)^k \\
 &= \frac{1}{n} \times (1-p)^1 \frac{1 - (1-p)^n}{1 - (1-p)} \quad (\text{car : } 1-p \neq 1) \\
 &= \frac{(1-p) (1 - (1-p)^n)}{n p}
 \end{aligned}$$

Comme  $q = 1 - p$ , on obtient :  $\mathbb{P}([Y = 0]) = \frac{q (1 - q^n)}{n (1 - q)}$ .

□

- b)** Écrire, pour tout  $i$  de  $\llbracket 1, n \rrbracket$ , la probabilité  $\mathbb{P}([Y = i])$  sous forme d'une somme de  $n - i + 1$  termes que l'on ne cherchera pas à simplifier.

*Démonstration.*

Soit  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ .

La famille  $([X = k])_{k \in \llbracket 1, n \rrbracket}$  forme un système complet d'événements.

Ainsi, par formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}([Y = i]) &= \sum_{k=1}^n \mathbb{P}([X = k] \cap [Y = i]) \\
 &= \sum_{k=1}^n \mathbb{P}([X = k]) \mathbb{P}_{[X=k]}([Y = i]) \quad (\text{car : } \forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \mathbb{P}([X = k]) \neq 0) \\
 &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} \mathbb{P}_{[X=k]}([Y = i]) \quad (\text{car } X \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 1, n \rrbracket)) \\
 &= \frac{1}{n} \left( \sum_{k=1}^{i-1} \mathbb{P}_{[X=k]}([Y = i]) + \sum_{k=i}^n \mathbb{P}_{[X=k]}([Y = i]) \right) \\
 &= \frac{1}{n} \sum_{k=i}^n \binom{k}{i} p^i (1-p)^{k-i} \quad (\text{d'après 3.})
 \end{aligned}$$

$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \mathbb{P}([Y = i]) = \frac{1}{n} p^i \sum_{k=i}^n \binom{k}{i} (1-p)^{k-i}$

□

6. a) Soit  $i$  et  $k$  deux entiers naturels tels que  $1 \leq i \leq k \leq n$ . Démontrer :  $i \binom{k}{i} = k \binom{k-1}{i-1}$ .

*Démonstration.*

- Tout d'abord :

$$i \binom{k}{i} = i \frac{k!}{i! (k-i)!} = \frac{k!}{(i-1)! (k-i)!}$$

- De plus :

$$k \binom{k-1}{i-1} = k \frac{(k-1)!}{(i-1)! ((k-1) - (i-1))!} = \frac{k!}{(i-1)! (k-i)!}$$

$$i \binom{k}{i} = k \binom{k-1}{i-1}$$

### Commentaire

Cette relation sur les coefficients binomiaux peut aussi se démontrer par dénombrement.

Pour ce faire, on considère un ensemble  $E$  à  $k$  éléments.

(on peut penser à une pièce qui contient  $k$  individus)

On souhaite alors construire une partie  $P$  à  $i$  éléments de cet ensemble contenant 1 élément distingué (on peut penser à choisir dans la pièce un groupe de  $i$  individus dans lequel figure 1 représentant de ces individus).

Pour ce faire, on peut procéder de deux manières :

1) On choisit d'abord la partie à  $i$  éléments de  $E$  :  $\binom{k}{i}$  possibilités.

On distingue ensuite 1 élément de cet ensemble  $P$  :  $\binom{i}{1}$  possibilités.

(on choisit d'abord les  $i$  individus et on élit ensuite 1 représentants de ces individus)

Ainsi, il y a  $\binom{k}{i} \binom{i}{1} = \binom{k}{i} i$  manières de construire  $P$ .

2) On choisit d'abord, dans  $E$ , l'élément à distinguer :  $\binom{k}{1}$  possibilités.

On choisit ensuite  $i-1$  éléments dans  $E$ , pour former  $P$ , en y ajoutant l'élément précédent :

$\binom{k-1}{i-1}$  possibilités.

(on choisit d'abord 1 représentant puis on leur adjoint un groupe de  $i-1$  individus)

Ainsi, il y a  $\binom{k}{1} \binom{k-1}{i-1} = k \binom{k-1}{i-1}$  manières de construire  $P$ .

On retrouve ainsi le résultat souhaité. □

b) Établir ensuite que  $Y$  possède une espérance et que celle-ci est donnée par :

$$\mathbb{E}(Y) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left( k \sum_{i=1}^k \binom{k-1}{i-1} p^i q^{k-i} \right)$$

*Démonstration.*

- Tout d'abord, la v.a.r.  $Y$  admet une espérance car c'est une v.a.r. finie.

• De plus :

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}(Y) &= \sum_{i=0}^n i \mathbb{P}([Y = i]) \\
 &= \sum_{i=1}^n i \mathbb{P}([Y = i]) && (\text{car : } 0 \times \mathbb{P}([Y = 0]) = 0) \\
 &= \sum_{i=1}^n i \left( \frac{1}{n} p^i \sum_{k=i}^n \binom{k}{i} (1-p)^{k-i} \right) && (\text{d'après 5.b}) \\
 &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left( \sum_{k=i}^n i \binom{k}{i} p^i (1-p)^{k-i} \right) \\
 &= \frac{1}{n} \sum_{1 \leq i \leq k \leq n} i \binom{k}{i} p^i (1-p)^{k-i} \\
 &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left( \sum_{i=1}^k i \binom{k}{i} p^i (1-p)^{k-i} \right) \\
 &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left( \sum_{i=1}^k k \binom{k-1}{i-1} p^i (1-p)^{k-i} \right) && (\text{d'après la question précédente})
 \end{aligned}$$

On en déduit :  $\mathbb{E}(Y) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left( k \sum_{i=1}^k \binom{k-1}{i-1} p^i q^{k-i} \right).$

□

c) En déduire :  $\mathbb{E}(Y) = \frac{(n+1)p}{2}.$

*Démonstration.*

On reprend les calculs précédents.

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}(Y) &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left( k \sum_{i=1}^k \binom{k-1}{i-1} p^i q^{k-i} \right) \\
 &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left( k \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k-1}{i} p^{i+1} q^{k-(i+1)} \right) && (\text{par décalage d'indice}) \\
 &= \frac{p}{n} \sum_{k=1}^n \left( k \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k-1}{i} p^i q^{(k-1)-i} \right) \\
 &= \frac{p}{n} \sum_{k=1}^n k (p+q)^{k-1} && (\text{par formule du binôme de Newton}) \\
 &= \frac{p}{n} \sum_{k=1}^n k && (\text{car : } p+q=1) \\
 &= \frac{p}{n} \times \frac{n(n+1)}{2}
 \end{aligned}$$

Finalement :  $\mathbb{E}(Y) = \frac{(n+1)p}{2}.$

□

7. a) Établir :

$$\forall n \geq 1, \quad \mathbb{E}(Y(Y-1)) = \frac{1}{n} \sum_{k=2}^n \left( k(k-1) \sum_{i=2}^k \binom{k-2}{i-2} p^i q^{k-i} \right)$$

*Démonstration.*

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ .

- La v.a.r.  $Y(Y-1)$  admet une espérance car c'est une v.a.r. finie (car  $Y$  est une v.a.r. finie).
- De plus, par théorème de transfert :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Y(Y-1)) &= \sum_{i=0}^n i(i-1) \mathbb{P}([Y=i]) \\ &= \sum_{i=2}^n i(i-1) \mathbb{P}([Y=i]) && \text{(car : } 0 \times (-1) \times \mathbb{P}([Y=0]) = 0 \\ &&& \text{et } 1 \times 0 \times \mathbb{P}([Y=1]) = 0) \\ &= \sum_{i=2}^n i(i-1) \left( \frac{1}{n} p^i \sum_{k=i}^n \binom{k}{i} (1-p)^{k-i} \right) && \text{(d'après 5.b)} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=2}^n \left( \sum_{k=i}^n i(i-1) \binom{k}{i} p^i (1-p)^{k-i} \right) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{2 \leq i \leq k \leq n} i(i-1) \binom{k}{i} p^i (1-p)^{k-i} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=2}^n \left( \sum_{i=2}^k i(i-1) \binom{k}{i} p^i (1-p)^{k-i} \right) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=2}^n \left( \sum_{i=2}^k k(i-1) \binom{k-1}{i-1} p^i (1-p)^{k-i} \right) && \text{(d'après la question 6.a)} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=2}^n \left( \sum_{i=2}^k k(k-1) \binom{k-2}{i-2} p^i (1-p)^{k-i} \right) && \text{(d'après la question 6.a)} \\ &&& \text{appliquée à } i-1 \text{ et } k-1 \end{aligned}$$

On en déduit :  $\forall n \geq 1, \quad \mathbb{E}(Y(Y-1)) = \frac{1}{n} \sum_{k=2}^n \left( k(k-1) \sum_{i=2}^k \binom{k-2}{i-2} p^i q^{k-i} \right).$

□

b) Montrer que l'on a :

$$\forall n \geq 2, \quad \mathbb{E}(Y(Y-1)) = \frac{(n^2-1)p^2}{3}$$

*Démonstration.*

Soit  $n \in \llbracket 2, +\infty \llbracket$ . On reprend les calculs précédents.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Y(Y-1)) &= \frac{1}{n} \sum_{k=2}^n \left( k(k-1) \sum_{i=2}^k \binom{k-2}{i-2} p^i q^{k-i} \right) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=2}^n \left( k(k-1) \sum_{i=0}^{k-2} \binom{k-2}{i} p^{i+2} q^{k-(i+2)} \right) && \text{(par décalage d'indice)} \\ &= \frac{p^2}{n} \sum_{k=2}^n \left( k(k-1) \sum_{i=0}^{k-2} \binom{k-2}{i} p^i q^{(k-2)-i} \right) \end{aligned}$$

Par formule du binôme de Newton, on obtient :

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}(Y) &= \frac{p^2}{n} \sum_{k=2}^n k(k-1)(p+q)^{k-1} \\
 &= \frac{p^2}{n} \sum_{k=2}^n k(k-1) && (\text{car : } p+q=1) \\
 &= \frac{p^2}{n} \sum_{k=1}^{n-1} (k+1)k && (\text{par décalage d'indice}) \\
 &= \frac{p^2}{n} \left( \sum_{k=1}^{n-1} k^2 + \sum_{k=1}^{n-1} k \right) \\
 &= \frac{p^2}{n} \left( \frac{(n-1) \cancel{n} (2(n-1)+1)}{6} + \frac{(n-1) \cancel{n}}{2} \right) \\
 &= p^2 (n-1) \frac{(2n-1)+3}{6} \\
 &= p^2 (n-1) \frac{2n+2}{6} \\
 &= p^2 (n-1) \frac{n+1}{3}
 \end{aligned}$$

Finalement :  $\mathbb{E}(Y(Y-1)) = \frac{(n^2-1)p^2}{3}$ .

□

c) Vérifier que cette expression reste valable pour  $n = 1$ .

*Démonstration.*

- D'une part, pour  $n = 1$ , on obtient :

$$\frac{(1^2-1)p^2}{3} = 0$$

- D'autre part, d'après la question, lorsque  $n = 1$ , alors :  $Y \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$ .
  - × On en déduit que la v.a.r.  $Y(Y-1)$  admet une espérance, car c'est une v.a.r. finie.
  - × De plus, par théorème de transfert :

$$\mathbb{E}(Y(Y-1)) = 0 \times (0-1) \times \mathbb{P}([Y=0]) + 1 \times 0 \times \mathbb{P}([Y=1]) = 0$$

L'expression de la question précédente reste donc valable pour  $n = 1$ .

**Commentaire**

On pouvait aussi remarquer que, dans le cas  $n = 1$ , la v.a.r.  $Y(Y - 1)$  est constante égale à 0. Démontrons le.

Soit  $\omega \in \Omega$ .

Comme  $n = 1$ , alors :  $Y(\Omega) \subset \{0, 1\}$ . Deux cas se présentent alors :

- si  $Y(\omega) = 0$ , alors :

$$(Y(Y - 1))(\omega) = Y(\omega)(Y(\omega) - 1) = 0 \times (-1) = 0$$

- si  $Y(\omega) = 1$ , alors :

$$(Y(Y - 1))(\omega) = Y(\omega)(Y(\omega) - 1) = 1 \times 0 = 0$$

Finalement :  $\forall \omega \in \Omega$ ,  $(Y(Y - 1))(\omega) = 0$ . Ainsi la v.a.r.  $Y(Y - 1)$  est constante égale à 0.  $\square$

d) Exprimer, sans chercher à la calculer, la variance de  $Y$  en fonction de  $\mathbb{E}(Y(Y - 1))$  et  $\mathbb{E}(Y)$ .

*Démonstration.*

- La v.a.r.  $Y$  admet une variance car c'est une v.a.r. finie.
- De plus, par formule de Koenig-Huygens :

$$\mathbb{V}(Y) = \mathbb{E}(Y^2) - (\mathbb{E}(Y))^2$$

Or :

$$Y^2 = Y(Y - 1) + Y$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} \mathbb{V}(Y) &= \mathbb{E}(Y(Y - 1) + Y) - (\mathbb{E}(Y))^2 \\ &= \mathbb{E}(Y(Y - 1)) + \mathbb{E}(Y) - (\mathbb{E}(Y))^2 \quad (\text{par linéarité de l'espérance}) \end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{V}(Y) = \mathbb{E}(Y(Y - 1)) + \mathbb{E}(Y) - (\mathbb{E}(Y))^2}$$

**Commentaire**

Rappelons qu'il n'y a pas forcément dans les sujets une croissance linéaire de la difficulté. Au contraire, chaque nouvelle partie commence généralement par une question plus simple de mise en route. On peut même trouver des questions simples en bout de sujet comme ici. Il est donc important de commencer son épreuve par une brève lecture de sujet pour les repérer.  $\square$

### Exercice 3 (EDHEC 2024)

Dans tout l'exercice, la lettre  $n$  désigne un entier naturel.

On pose  $u_n = \int_0^1 \frac{x^n}{4-x^2} dx$  et on a en particulier  $u_0 = \int_0^1 \frac{1}{4-x^2} dx$ .

1. a) Déterminer les réels  $a$  et  $b$  tels que :

$$\forall x \in [0, 1], \frac{1}{4-x^2} = \frac{a}{2-x} + \frac{b}{2+x}$$

*Démonstration.*

Soit  $x \in [0, 1]$ .

$$\begin{aligned} \frac{a}{2-x} + \frac{b}{2+x} &= \frac{a(2+x) + b(2-x)}{(2-x)(2+x)} \\ &= \frac{(a-b)x + 2a + 2b}{4-x^2} \end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned} \forall x \in [0, 1], \frac{1}{4-x^2} = \frac{a}{2-x} + \frac{b}{2+x} &\iff \forall x \in [0, 1], (a-b)x + 2a + 2b = 1 \\ &\iff \begin{cases} a - b = 0 \\ 2a + 2b = 1 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} a - b = 0 \\ 4b = 1 \end{cases} \quad L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ &\iff \begin{cases} a = \frac{1}{4} \\ b = \frac{1}{4} \end{cases} \end{aligned}$$

Il existe un unique couple de réels  $(a, b)$  qui vérifie : pour tout  $\forall x \in [0, 1]$ ,  $\frac{1}{4-x^2} = \frac{a}{2-x} + \frac{b}{2+x}$ .  
Il s'agit du couple  $(a, b) = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$ .

#### Commentaire

La formulation de l'énoncé laisse penser qu'il faut démontrer l'unicité d'un tel couple. Si l'énoncé avait été « Déterminer **des** réels  $a$  et  $b$  tels que ... », alors on aurait pu se contenter de l'existence et donc d'exhiber la solution  $(a, b) = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$  sans avoir à expliquer les calculs faits pour trouver cette solution.

□

b) En déduire que  $u_0 = \frac{1}{4} \ln(3)$ .

*Démonstration.*

Remarquons pour commencer que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , la fonction  $x \mapsto \frac{x^n}{4-x^2}$  est continue sur



$[0, 1]$  et donc  $u_n$  est bien défini.

$$\begin{aligned}
 u_0 &= \int_0^1 \frac{1}{4-x^2} dx \\
 &= \int_0^1 \left( \frac{1}{4(2-x)} + \frac{1}{4(2+x)} \right) dx && \text{(d'après la question précédente)} \\
 &= \frac{1}{4} \int_0^1 \frac{1}{2-x} dx + \frac{1}{4} \int_0^1 \frac{1}{2+x} dx && \text{(par linéarité)} \\
 &= -\frac{1}{4} [\ln(|2-x|)]_0^1 + \frac{1}{4} [\ln(|2+x|)]_0^1 \\
 &= -\frac{1}{4} [\ln(2-x)]_0^1 + \frac{1}{4} [\ln(2+x)]_0^1 && \text{(car pour tout } x \in [0, 1], 2-x \geq 0 \\
 & && \text{et } 2+x \geq 0) \\
 &= -\frac{1}{4}(\ln(1) - \ln(2)) + \frac{1}{4}(\ln(3) - \ln(2)) \\
 &= \frac{\ln(3)}{4}
 \end{aligned}$$

On a bien :  $u_0 = \frac{1}{4} \ln(3)$ .

□

2. Calculer  $u_1$ .

*Démonstration.*

Par définition :

$$\begin{aligned}
 u_1 &= \int_0^1 \frac{x}{4-x^2} dx \\
 &= -\frac{1}{2} \int_0^1 \frac{-2x}{4-x^2} dx \\
 &= -\frac{1}{2} [\ln(|4-x^2|)]_0^1 \\
 &= -\frac{1}{2} [\ln(4-x^2)]_0^1 && \text{(car pour tout } x \in [0, 1], 4-x^2 \geq 0) \\
 &= -\frac{1}{2}(\ln(3) - \ln(4)) \\
 &= -\frac{1}{2} \ln\left(\frac{3}{4}\right)
 \end{aligned}$$

On a donc :  $u_1 = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{4}{3}\right) = \ln\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$ .

□

3. a) Pour tout entier naturel  $n$ , exprimer  $4u_n - u_{n+2}$  explicitement en fonction de  $n$ .

*Démonstration.*

Soit  $n \in \mathbb{N}$ .

$$\begin{aligned}
 4u_n - u_{n+2} &= 4 \int_0^1 \frac{x^n}{4-x^2} dx - \int_0^1 \frac{x^{n+2}}{4-x^2} dx \\
 &= \int_0^1 \frac{4x^n - x^{n+2}}{4-x^2} dx && \text{(par linéarité)} \\
 &= \int_0^1 \frac{x^n(4-x^2)}{4-x^2} dx \\
 &= \int_0^1 x^n dx \\
 &= \left[ \frac{x^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 \\
 &= \frac{1}{n+1}
 \end{aligned}$$

On a donc : pour tout entier naturel  $n$ ,  $4u_n - u_{n+2} = \frac{1}{n+1}$ .

□

b) Compléter la fonction **Python** ci-dessous afin qu'elle renvoie la valeur de  $u_n$  à l'appel de `suite(n)`.

```

1 def suite(n):
2     if (-1)**n==1:
3         u=np.log(3)/4
4         for k in range(2,n+1,2):
5             u=4*u-...
6     else:
7         u=np.log(2/np.sqrt(3))
8         for k in range(3,n+1,2):
9             u=4*u-...
10    return u

```

*Démonstration.*

La relation de récurrence obtenue à la question précédente ne relie pas deux termes successifs de la suite ( $u_n$ ) mais les termes de rang  $n$  et  $n+2$ . Pour calculer les termes de cette suite par récurrence, il faut donc traiter à part les termes pairs et les termes impairs.

La commande **Python** `if (-1)**n==1:` permet de tester si  $n$  est pair.

On peut alors compléter la fonction **Python** de la manière suivante :

```

1 def suite(n):
2     if (-1)**n==1:
3         u=np.log(3)/4
4         for k in range(2,n+1,2):
5             u=4*u - 1/(k-1)
6     else:
7         u=np.log(2/np.sqrt(3))
8         for k in range(3,n+1,2):
9             u=4*u - 1/(k-1)
10    return u

```

**Commentaire**

On remarque que le code proposé permet de vérifier le calcul effectué à la question 2 (voir ligne 7).

□

4. a) Utiliser la définition de la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  pour établir l'encadrement suivant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \frac{1}{4(n+1)} \leq u_n \leq \frac{1}{3(n+1)}$$

*Démonstration.*

Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Soit  $x \in [0, 1]$ .

La fonction  $x \mapsto x^2$  est croissante sur  $[0, 1]$  donc la fonction  $x \mapsto 4 - x^2$  est décroissante sur  $[0, 1]$ . On en déduit que :

$$3 \leq 4 - x^2 \leq 4$$

et donc

$$\frac{1}{4} \leq \frac{1}{4 - x^2} \leq \frac{1}{3}$$

car  $x \mapsto \frac{1}{x}$  est décroissante sur  $]0, +\infty[$ .

On peut alors multiplier par  $x^n \geq 0$  :

$$\frac{x^n}{4} \leq \frac{x^n}{4 - x^2} \leq \frac{x^n}{3}$$

Par croissance de l'intégrale, les bornes étant rangées dans l'ordre croissant :

$$\int_0^1 \frac{x^n}{4} dx \leq \int_0^1 \frac{x^n}{4 - x^2} dx \leq \int_0^1 \frac{x^n}{3} dx$$

Or,  $\int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1}$ .

On peut alors conclure que :  $\forall n \in \mathbb{N}, \frac{1}{4(n+1)} \leq u_n \leq \frac{1}{3(n+1)}$ .

□

b) En déduire la convergence de la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ainsi que la valeur de  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ .

*Démonstration.*

- D'une part : pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\frac{1}{4(n+1)} \leq u_n \leq \frac{1}{3(n+1)}$$

- D'autre part :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{4(n+1)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{3(n+1)} = 0$$

Par théorème d'encadrement, on peut conclure que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers 0.

□

c) La série de terme général  $u_n$  est-elle convergente ou divergente ? Pour quelle raison ?

*Démonstration.*

Montrons tout d'abord que la série  $\sum \frac{1}{4(n+1)}$  diverge.

- $\frac{1}{n+1} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n}$
- pour tout  $n \geq 1$ ,  $\frac{1}{n+1} \geq 0$  et  $\frac{1}{n} \geq 0$
- la série  $\sum \frac{1}{n}$  diverge par critère de Riemann

On en déduit, par critère d'équivalence pour les séries à termes positifs, que la série  $\sum \frac{1}{n+1}$  diverge et donc que la série  $\sum \frac{1}{4(n+1)}$  diverge (la multiplication par une constante non nulle ne change pas la nature d'une série).

Montrons maintenant que la série  $\sum u_n$  diverge.

- pour tout  $n \geq 0$ ,  $0 \leq \frac{1}{4(n+1)} \leq u_n$
- la série  $\sum \frac{1}{4(n+1)}$  diverge par ce qui précède

On en déduit, par critère de comparaison pour les séries à termes positifs, que la série  $\sum u_n$  diverge également.

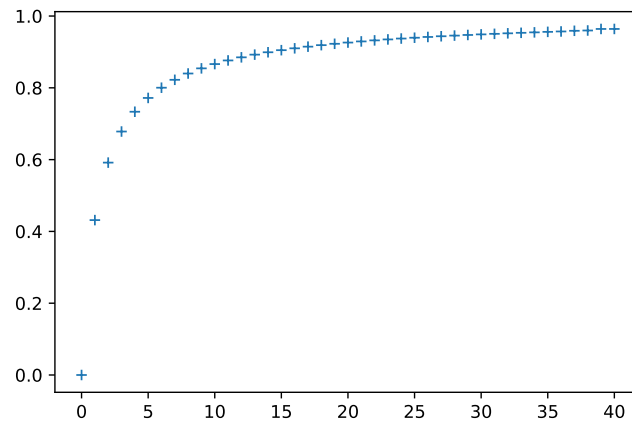
La série de terme général  $u_n$  est divergente.

□

5. a) On considère le script suivant qui utilise la fonction déclarée plus haut :

```
1 x=np.arange(0,41)
2 u=[] # liste vide
3 for n in range(41):
4     u.append(3*n*suite(n))
5 plt.plot(x,u,'+')
6 plt.show()
```

Ce script renvoie le graphique suivant :



Laquelle des quatre conjectures suivantes peut-on émettre quant au comportement de la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  au voisinage de  $+\infty$  ?

- ❶  $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} 3n.$       ❷  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1.$       ❸  $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{3n}.$       ❹  $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n}.$

*Démonstration.*

Ce script **Python** permet de tracer les 40 premiers termes de la suite  $(3nu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

On peut, d'après le graphique, conjecturer que :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} 3nu_n = 1.$

On peut donc émettre comme conjecture :  $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{3n}.$

□

b) Établir, grâce à une intégration par parties, l'égalité suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{1}{3(n+1)} - \frac{2}{n+1} \int_0^1 \frac{x^{n+2}}{(4-x^2)^2} dx$$

*Démonstration.*

Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Procédons par intégration par parties en posant :

$$\left\{ \begin{array}{ll} v'(x) = x^n & v(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1} \\ w(x) = \frac{1}{4-x^2} & w'(x) = \frac{2x}{(4-x^2)^2} \end{array} \right.$$

Cette intégration par parties est valide car  $v$  et  $w$  sont de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $[0, 1]$ .

$$\begin{aligned} u_n &= \int_0^1 \frac{x^n}{4-x^2} dx \\ &= \left[ \frac{x^{n+1}}{n+1} \frac{1}{4-x^2} \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{n+1} \frac{2x}{(4-x^2)^2} dx \\ &= \frac{1}{3(n+1)} - \frac{2}{n+1} \int_0^1 \frac{x^{n+2}}{(4-x^2)^2} dx \end{aligned}$$

On a bien :  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{1}{3(n+1)} - \frac{2}{n+1} \int_0^1 \frac{x^{n+2}}{(4-x^2)^2} dx.$

□

c) Montrer par encadrement que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{x^{n+2}}{(4-x^2)^2} dx = 0$$

*Démonstration.*

Procédons de manière analogue à la question 4.a). Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Soit  $x \in [0, 1]$ .

$$\frac{1}{4} \leq \frac{1}{4-x^2} \leq \frac{1}{3}$$

Par croissance de  $x \mapsto x^2$  sur  $\mathbb{R}^+$ , on obtient :

$$\frac{1}{16} \leq \frac{1}{(4-x^2)^2} \leq \frac{1}{9}$$

puis

$$\frac{x^{n+2}}{16} \leq \frac{x^{n+2}}{(4-x^2)^2} \leq \frac{x^{n+2}}{9}$$

Par croissance de l'intégrale, les bornes étant rangées dans l'ordre croissant :

$$\int_0^1 \frac{x^{n+2}}{16} dx \leq \int_0^1 \frac{x^{n+2}}{(4-x^2)^2} dx \leq \int_0^1 \frac{x^{n+2}}{9} dx$$

Or,  $\int_0^1 x^{n+2} dx = \frac{1}{n+3}$ . D'où :

$$\frac{1}{16(n+3)} \leq \int_0^1 \frac{x^{n+2}}{(4-x^2)^2} dx \leq \frac{1}{9(n+3)}$$

De plus :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{16(n+3)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{9(n+3)} = 0$$

On peut alors conclure par théorème d'encadrement que :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{x^{n+2}}{(4-x^2)^2} dx = 0.$

□

d) Vérifier la conjecture établie à la question 5.a).

*Démonstration.*

Posons, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\varepsilon_n = \int_0^1 \frac{x^{n+2}}{(4-x^2)^2} dx$ . D'après la question précédente :

$$\varepsilon_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$$

Soit  $n \in \mathbb{N}$ . D'après la question 5.b) :

$$3nu_n = \frac{n}{n+1} - 6 \frac{n}{n+1} \varepsilon_n$$

Or,  $\frac{n}{n+1} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 1$ . On en déduit que :  $3nu_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 1$ .

La conjecture est vraie :  $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{3n}$ .

□

### Exercice 4 (extrait de ECRICOME 2018)

Soit  $A$  la matrice de  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  donnée par :  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$ .

1. Calculer  $A^2 - 7A$ .

*Démonstration.*

- Tout d'abord :  $A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 7 & -14 \\ 0 & 9 & 0 \\ 7 & -7 & 23 \end{pmatrix}$ .
- Ainsi :  $A^2 - 7A = \begin{pmatrix} 2 & 7 & -14 \\ 0 & 9 & 0 \\ 7 & -7 & 23 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 14 & 7 & -14 \\ 0 & 21 & 0 \\ 7 & -7 & 35 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 & 0 & 0 \\ 0 & -12 & 0 \\ 0 & 0 & -12 \end{pmatrix} = -12I_3$ .

On en conclut :  $A^2 - 7A = -12I_3$ .

□

2. En déduire que les seuls réels susceptibles d'être valeurs propres de  $A$  sont les réels 3 et 4.

*Démonstration.*

D'après la question précédente, le polynôme  $P(X) = X^2 - 7X + 12 = (X - 3)(X - 4)$  est un polynôme annulateur de la matrice  $A$ .

Or, le spectre de  $A$  est inclus dans l'ensemble des racines d'un polynôme annulateur de  $A$ .

Ainsi,  $\text{Sp}(A) \subset \{3, 4\}$ . Les seuls réels susceptibles d'être valeurs propres de  $A$  sont 3 et 4.

#### Commentaire

- Une matrice  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  possède **TOUJOURS** un polynôme annulateur non nul  $P$ .  
On peut même démontrer (ce n'est pas au programme en ECG) qu'il existe toujours un tel polynôme de degré (au plus)  $n$ .
- Si  $P$  est un polynôme annulateur de  $A$  alors, pour tout  $\alpha \in \mathbb{R}$ , le polynôme  $\alpha P$  est toujours un polynôme annulateur puisque :

$$(\alpha P)(A) = \alpha P(A) = 0$$

Cela suffit à démontrer que  $A$  possède une infinité de polynômes annulateurs.

On peut en obtenir d'autres. Par exemple  $Q(X) = (X - 5)P(X)$  est un polynôme annulateur de  $A$  puisque :

$$Q(A) = (A - 5I)P(A) = 0$$

Il faut donc parler d'UN polynôme annulateur d'une matrice.

- Les racines d'un polynôme annulateur ne sont pas forcément toutes valeurs propres de  $A$ . Si c'était le cas,  $A$  aurait une infinité de valeurs propres (elle en possède au plus 3 !). Par exemple, comme  $Q(X) = (X - 5)P(X)$  est un polynôme annulateur, un tel raisonnement permettrait de démontrer que 5 est aussi valeur propre.

3. Trouver alors toutes les valeurs propres de  $A$ , et pour chacune d'entre elles, donner une base du sous-espace propre associé.

*Démonstration.*

- Déterminons  $E_3(A) = \{X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid (A - 3 \cdot I_3) X = 0_{\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})}\}$ .

Soit  $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ .

$$\begin{aligned} X \in E_3(A) &\iff (A - 3 \cdot I_3) X = 0_{\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \\ &\iff \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{cases} -x + y - 2z = 0 \\ 0 = 0 \\ x - y + 2z = 0 \end{cases} \\ &\stackrel{L_3 \leftarrow L_3 + L_1}{\iff} \begin{cases} -x + y - 2z = 0 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} -x + y - 2z = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Finalement, on obtient l'expression de  $E_3(A)$  suivante :

$$\begin{aligned} E_3(A) &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid x = y - 2z \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} y - 2z \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid (y, z) \in \mathbb{R}^2 \right\} \\ &= \left\{ y \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mid (y, z) \in \mathbb{R}^2 \right\} = \text{Vect} \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \end{aligned}$$

Comme  $E_3(A) \neq \{0_{\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})}\}$ , 3 est bien valeur propre de  $A$ , de sous-espace propre associé  $E_3(A)$ .

$$E_3(A) = \text{Vect} \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

- La famille  $\mathcal{F}_3 = \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$  :

× engendrent  $E_3(A)$ ,

× est libre car constituée de deux vecteurs non colinéaires.

Ainsi,  $\mathcal{F}_3$  est une base de  $E_3(A)$ .



**Commentaire**

Il est important de lire l'énoncé de ce type de questions en entier pour choisir une méthode de résolution. En effet :

- × si l'énoncé demande simplement de montrer qu'un réel  $\lambda$  donné est valeur propre d'une matrice  $A$  carrée d'ordre 3, alors on vérifie  $\text{rg}(A - \lambda I_3) < 3$  pour ce réel  $\lambda$  particulier.  
(si  $A$  est une matrice carrée d'ordre 2, on vérifie  $\det(A - \lambda I_2) = 0$ )
- × si l'énoncé demande de montrer qu'un réel  $\lambda$  est valeur propre d'une matrice  $A$  carrée d'ordre 3 **et** de déterminer le sous-espace propre associé, alors on détermine directement  $E_\lambda(A)$  et comme  $E_\lambda(A) \neq \{0_{\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})}\}$ , cela démontre que  $E_\lambda(A)$  est bien le sous-espace propre associé à la valeur propre  $\lambda$ .

- Déterminons  $E_4(A) = \{X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid (A - 4 \cdot I_3) X = 0_{\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})}\}$ .

Soit  $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ .

$$\begin{aligned}
 X \in E_4(A) &\iff (A - 4 \cdot I_3) X = 0_{\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \\
 &\iff \begin{pmatrix} -2 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
 &\iff \begin{cases} -2x + y - 2z = 0 \\ -y = 0 \\ x - y + z = 0 \end{cases} \\
 &\stackrel{L_3 \leftarrow 2L_3 + L_1}{\iff} \begin{cases} -2x + y - 2z = 0 \\ -y = 0 \\ -y = 0 \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} -2x + y = 2z \\ -y = 0 \end{cases} \\
 &\stackrel{L_1 \leftarrow L_1 + L_2}{\iff} \begin{cases} -2x = 2z \\ -y = 0 \end{cases}
 \end{aligned}$$

Finalement, on obtient l'expression de  $E_4(A)$  suivante :

$$\begin{aligned}
 E_4(A) &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid x = -z \text{ et } y = 0 \right\} \\
 &= \left\{ \begin{pmatrix} -z \\ 0 \\ z \end{pmatrix} \mid z \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ z \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mid z \in \mathbb{R} \right\} = \text{Vect} \left( \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)
 \end{aligned}$$

Comme  $E_4(A) \neq \{0_{\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})}\}$ , 4 est bien valeur propre de  $A$ , de sous-espace propre associé  $E_4(A)$ .

$$E_4(A) = \text{Vect} \left( \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

- La famille  $\mathcal{F}_4 = \left( \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$  :

- × engendre  $E_4(A)$ ,
- × est libre car constituée d'un vecteur non nul.

Ainsi,  $\mathcal{F}_4$  est une base de  $E_4(A)$ .

□

4. La matrice  $A$  est-elle inversible?

*Démonstration.* D'après la question précédente, 0 n'est pas valeur propre de  $A$ .

Ainsi,  $A$  est inversible.

□

5. La matrice  $A$  est-elle diagonalisable?

*Démonstration.*

- Par théorème de concaténation, la famille  $\mathcal{F} = \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$  est libre.

De plus,  $\text{Card}(\mathcal{F}) = 3 = \dim(\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}))$ .

Ainsi,  $\mathcal{F}$  est une base de  $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$  formée de vecteurs propres de  $A$ .

On en déduit que  $A$  est diagonalisable.

□