DS4 (vB)

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidat·es sont invité·es à ***encadrer*** *dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*
Aucun document n'est autorisé. ***L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique*** *est* ***interdite****. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*
Si au cours de l'épreuve, un candidat ou une candidate repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

On suppose, et c'est valable pour toute l'épreuve, que la librairie suivante est importée sous son alias habituel :

- `import numpy as np`
- `import numpy.linalg as al`
- `import numpy.random as rd`

Exercice

1. ***a)*** Montrer que, pour tout $\alpha > 0$, l'intégrale $I(\alpha) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t\mathrm{e}^{-\alpha t}\mathrm{d}t$ converge et calculer sa valeur.

b) Montrer que, pour tout $x > 0$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t}{1+x\,\mathrm{e}^t}\mathrm{d}t$ converge.

On définit la fonction f sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$\forall x > 0,\ f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t}{1+x\,\mathrm{e}^t}\mathrm{d}t$$

2. Montrer que f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

3. ***a)*** Montrer que, pour tout $x > 0$:

$$0 \leqslant f(x) \leqslant \frac{1}{x}$$

b) En déduire la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

c) Démontrer que :

$$\frac{1}{x} - f(x) = \underset{x\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{x}\right)$$

d) En déduire un équivalent simple de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

4. ***a)*** Montrer que, pour tout $x \in]0,1[$:

$$f(x) \geqslant \int_0^{-\ln(x)} \frac{t}{1+x\,\mathrm{e}^t}\mathrm{d}t$$

b) En déduire que, pour tout $x \in]0,1[$:

$$f(x) \geqslant \frac{\ln(x)^2}{4}$$

c) En déduire la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers 0.

5. ***a)*** Montrer que l'intégrale $J = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln(u)}{u(1+u)}\mathrm{d}u$ converge.

b) En utilisant le changement de variable $u = x\mathrm{e}^t$ que l'on justifiera, montrer que, pour tout $x > 0$:

$$f(x) = \ln(x)^2 - \ln(x)\ln(1+x) + \int_x^{+\infty} \frac{\ln(u)}{u(1+u)}\mathrm{d}u \qquad (*)$$

c) En déduire que f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et calculer $f'(x)$ pour tout $x > 0$.
Retrouver ainsi le sens de variations de f.

6. ***a)*** Montrer par encadrement que :

$$\int_x^1 \frac{\ln(u)}{1+u}\mathrm{d}u = \underset{x\to 0}{o}\left(\ln(x)^2\right)$$

b) En utilisant $(*)$, montrer que, pour tout $x > 0$:

$$f(x) - \frac{\ln(x)^2}{2} = J - \ln(x)\ln(1+x) - \int_x^1 \frac{\ln(u)}{1+u}\mathrm{d}u$$

c) En déduire un équivalent simple de $f(x)$ lorsque x tend vers 0.

Problème 1

Partie 1 : Réduction d'une matrice

Soit n un entier naturel non nul fixé.
On note J_n la matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1.

1. Calculer J_n^2. En déduire les valeurs propres possibles de J_n.

Dans la suite de l'énoncé, on note λ_1 (resp. λ_2) la plus petite (resp. la plus grande) des deux valeurs propres possibles de J_n. Ainsi, $\lambda_1 < \lambda_2$.

2. Calculer $\mathrm{rg}(J_n)$. En déduire la dimension de $E_{\lambda_1}(J_n)$.

3. ***a)*** Montrer que $E_{\lambda_2}(J_n) \neq \{0_{\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})}\}$ en exhibant un vecteur particulier.

b) En déduire que : $\dim(E_{\lambda_2}(J_n)) = 1$.

4. Que peut-on conclure sur le spectre de J_n ?

5. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Soit $a \in \mathbb{R}$.

a) Montrer que :
$$\mathrm{Sp}(A - aI_n) = \{\lambda - a \mid \lambda \in \mathrm{Sp}(A)\}$$

b) Montrer que, pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$:
$$E_{\lambda - a}(A - aI_n) = E_\lambda(A)$$

6. ***a)*** Déterminer le spectre de la matrice $J_n - I_n$.

b) Déterminer les dimensions des sous-espaces propres de la matrice $J_n - I_n$.

Partie 2 : Quelques exemples de graphes réguliers

On fixe un entier n supérieur ou égal à 2.
Dans cette partie et la suivante, on ne considérera que des graphes non orientés et sans boucle.
On dit qu'un graphe G est *régulier* si tous ses sommets ont le même degré. Plus précisément, on dira que G est *d-régulier* si tous ses sommets ont un degré égal à d (où $d \in [\![0, n-1]\!]$ est appelé le *degré de régularité* du graphe G).

7. Soit $d \in [\![0, n-1]\!]$. On considère dans cette question un graphe G à n sommets et d-régulier.
On note a le nombre d'arêtes de G. Exprimer a en fonction de d et n.

8. On considère dans cette question un graphe G à n sommets et 0-régulier.

a) Quelle est la matrice d'adjacence A du graphe G ?

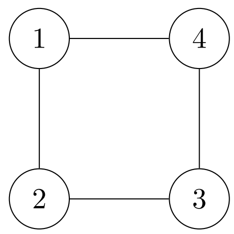
b) Déterminer le spectre de A.

9. On considère dans cette question un graphe G à n sommets et $(n-1)$-régulier.

a) Exprimer la matrice d'adjacence A du graphe G à l'aide des notations de la partie 1.

b) En déduire le spectre de A.

10. On considère dans cette question le graphe G suivant :

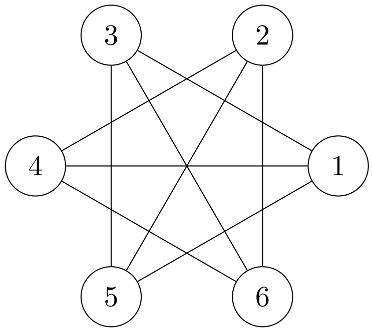


a) Le graphe G est-il régulier ? Si oui, préciser son degré de régularité.

b) Expliciter la matrice d'adjacence A du graphe G sous forme de tableau matriciel.

c) Déterminer le spectre de A.

11. On considère dans cette question le graphe G suivant :



a) Le graphe G est-il régulier ? Si oui, préciser son degré de régularité.

b) Expliciter la matrice d'adjacence A du graphe G sous forme de tableau matriciel.

c) On suppose que la matrice A est définie en **Python** sous la variable `A`. Le script suivant

```
I = np.eye(6)
print(al.matrix_rank(A-3*I))
print(al.matrix_rank(A-I))
print(al.matrix_rank(A+2*I))
print(al.matrix_rank(A))
```

renvoie les nombres (dans cet ordre) : `5, 5, 4, 4`.
En déduire le spectre de A.

12. Au vu des différents exemples étudiés dans cette partie, quelle conjecture pouvez-vous faire sur la plus grande valeur propre de la matrice d'adjacence d'un graphe d-régulier ?

Partie 3 : Un résultat général sur les graphes réguliers

Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Soit $d \in [\![0, n-1]\!]$.
Soit G un graphe à n sommets et d-régulier.
On note $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant n}}$ la matrice d'adjacence du graphe G.

13. Soit $i \in [\![1, n]\!]$. Que vaut la somme $\sum\limits_{j=1}^{n} a_{i,j}$?

En déduire une valeur propre de A. On explicitera un vecteur propre associé à cette valeur propre.

14. Soit λ une valeur propre de A. Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0_{\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})}\}$ tel que :

$$AX = \lambda X \quad (*)$$

On fixe $i_0 \in [\![1, n]\!]$ tel que :

$$|x_{i_0}| = \max_{i \in [\![1,n]\!]} |x_i|$$

a) En utilisant $(*)$, montrer que : $|\lambda|\,|x_{i_0}| \leqslant d\,|x_{i_0}|$.

b) Conclure que : $|\lambda| \leqslant d$.

Problème 2

Dans tout le problème, r désigne un entier naturel vérifiant $1 \leqslant r \leqslant 10$. Une urne contient 10 boules distinctes B_1, B_2, … , B_{10}. Une expérience aléatoire consiste à y effectuer une suite de tirages d'une boule **avec remise**, chaque boule ayant la même probabilité de sortir à chaque tirage.
Cette expérience est modélisée par un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.

Partie I : Etude du nombre de tirages nécessaires pour obtenir au moins une fois chacune des boules B_1, … , B_r

On suppose que le nombre de tirages nécessaires pour obtenir au moins une fois chacune des boules B_1, … , B_r définit une variable aléatoire Y_r sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.

1. Cas particulier $r = 1$.
Montrer que la variable aléatoire Y_1 suit une loi géométrique ; préciser son paramètre, son espérance et sa variance.

2. On suppose que r est supérieur ou égal à 2.

a) Calculer la probabilité pour que les r boules B_1, B_2, …, B_r sortent dans cet ordre aux r premiers tirages.

b) En déduire la probabilité $\mathbb{P}([Y_r = r])$.

c) Préciser l'ensemble des valeurs que peut prendre la variable aléatoire Y_r.

d) Compléter la fonction **Python** `simulY(r)` pour qu'elle simule la variable aléatoire Y_r.

```
def simulY(r):
    rang = _____
    tab = np.zeros(r)
    while np.sum(tab) _______ :
        rang += 1
        tirage = _______________________
        if tirage <= r:
            if tab[tirage-1] ________:
                tab[tirage-1] += 1
    return ________
```

3. On suppose encore que r est supérieur ou égal à 2. Pour tout entier i vérifiant $1 \leqslant i \leqslant r$, on désigne par W_i la variable aléatoire représentant le nombre de tirages nécessaires pour que, pour la première fois, i boules distinctes parmi les boules B_1, B_2, … , B_r soient sorties (en particulier, on a : $W_r = Y_r$). On pose :

$$\begin{cases} X_1 = W_1 \\ \forall i \in [\![2, r]\!],\ X_i = W_i - W_{i-1} \end{cases}$$

On admet que les variables aléatoires X_1, …, X_r sont indépendantes.

a) Exprimer la variable aléatoire Y_r à l'aide des variables aléatoires X_1, …, X_r.

b) Interpréter concrètement la variable aléatoire X_i pour tout i vérifiant $1 \leqslant i \leqslant r$.

c) Montrer que, pour tout i vérifiant $1 \leqslant i \leqslant r$, la variable aléatoire X_i suit une loi géométrique ; préciser son espérance et sa variance.

d) On pose : $S_1(r) = \sum\limits_{k=1}^{r} \dfrac{1}{k}$ et $S_2(r) = \sum\limits_{k=1}^{r} \dfrac{1}{k^2}$.
Exprimer l'espérance $\mathbb{E}(Y_r)$ et la variance $\mathbb{V}(Y_r)$ de Y_r à l'aide de $S_1(r)$ et de $S_2(r)$.

4. ***a)*** Soit k un entier naturel non nul. Donner un encadrement de l'intégrale $\displaystyle\int_k^{k+1} \frac{1}{t}\, dt$.

b) Si r est supérieur ou égal à 2, donner un encadrement de $S_1(r)$ et en déduire la double inégalité :

$$10 \ln(r+1) \leqslant \mathbb{E}(Y_r) \leqslant 10\big(\ln(r)+1\big)$$

c) Si r supérieur ou égal à 2, établir par une méthode analogue à celle de la question précédente, la double inégalité :

$$1 - \frac{1}{r+1} \leqslant S_2(r) \leqslant 2 - \frac{1}{r}$$

En déduire un encadrement de $\mathbb{V}(Y_r)$.

Partie II : Etude du nombre de boules distinctes parmi les boules B_1, B_2, ..., B_r tirées au moins une fois au cours des n premiers tirages

Pour tout entier n supérieur ou égal à 1, on suppose que le nombre de boules distinctes parmi les boules B_1, B_2, ..., B_r tirées au moins une fois au cours des n premiers tirages, définit une variable aléatoire Z_n sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$. On note $\mathbb{E}(Z_n)$ l'espérance de Z_n et on pose $Z_0 = 0$.
Pour tout entier naturel n non nul et pour tout entier naturel k, on note $p_{n,k}$ la probabilité de l'événement $[Z_n = k]$ et on pose : $p_{n,-1} = 0$.

5. Étude des cas particuliers $n = 1$ et $n = 2$.

a) Déterminer la loi de Z_1 et donner son espérance.

b) On suppose, dans cette question, que r est supérieur ou égal à 2.
Déterminer la loi de Z_2 et montrer que son espérance est donnée par : $\mathbb{E}(Z_2) = \dfrac{19\,r}{100}$

6. Établir, pour tout entier naturel n non nul et pour tout entier naturel k au plus égal à r, l'égalité :

$$10\, p_{n,k} = (10 - r + k)\, p_{n-1,k} + (r+1-k)\, p_{n-1,k-1} \qquad (*)$$

Vérifier que cette égalité reste vraie dans le cas où k est supérieur ou égal à $r+1$.

7. Pour tout entier naturel non nul n, on définit le polynôme Q_n par :

$$\begin{cases} Q_0(X) = 1 \\ Q_n(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} p_{n,k}\, x^k \end{cases}$$

a) Préciser les polynômes Q_1 et Q_2.

b) Calculer $Q_n(1)$ et exprimer $Q_n'(1)$ en fonction de $\mathbb{E}(Z_n)$, où Q_n' désigne la dérivée du polynôme Q_n.

c) En utilisant l'égalité $(*)$, établir, pour tout réel x et pour tout entier naturel n non nul, la relation suivante :

$$10\, Q_n(x) = (10 - r + rx)\, Q_{n-1}(x) + x(1-x)\, Q_{n-1}'(x) \qquad (**)$$

d) En dérivant membre à membre l'égalité $(**)$, former, pour tout entier naturel n non nul, une relation entre les espérances $\mathbb{E}(Z_n)$ et $\mathbb{E}(Z_{n-1})$.
En déduire, pour tout entier naturel n, la valeur de $\mathbb{E}(Z_n)$ en fonction de n et de r.

8. a) Pour tout entier naturel n, le polynôme Q''_n désigne la dérivée du polynôme Q'_n.
En utilisant une méthode semblable à celle de la question précédente, trouver pour tout entier naturel n non nul, une relation entre $Q''_n(1)$ et $Q''_{n-1}(1)$.
En déduire, pour tout entier naturel n non nul, l'égalité suivante :

$$Q''_n(1) \;=\; r(r-1)\left(1+\left(\frac{8}{10}\right)^n - 2\left(\frac{9}{10}\right)^n\right)$$

b) Calculer, pour tout entier naturel n, la variance de la variable aléatoire Z_n en fonction de n et de r.