DS4 (vB) - Correction

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidat·es sont invité·es à ***encadrer*** *dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*
Aucun document n'est autorisé. ***L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique*** *est* ***interdite****. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*
Si au cours de l'épreuve, un candidat ou une candidate repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

On suppose, et c'est valable pour toute l'épreuve, que la librairie suivante est importée sous son alias habituel :

- `import numpy as np`
- `import numpy.linalg as al`
- `import numpy.random as rd`

Exercice (inspiré d'un oral ESCP voie S)

1. a) Montrer que, pour tout $\alpha > 0$, l'intégrale $I(\alpha) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t\mathrm{e}^{-\alpha t}\mathrm{d}t$ converge et calculer sa valeur.

Démonstration.
Soit $\alpha > 0$.

- La fonction $t \mapsto t\mathrm{e}^{-\alpha t}$ est continue sur $[0, +\infty[$ donc l'intégrale $I(\alpha)$ est impropre en $+\infty$.
- Soit $B \geqslant 0$. Procédons par intégration par parties :

$$\left| \begin{array}{ll} u'(t) = \mathrm{e}^{-\alpha t} & u(t) = \dfrac{\mathrm{e}^{-\alpha t}}{-\alpha} \\ v(t) = t & v'(t) = 1 \end{array} \right.$$

Cette intégration par parties est valide car u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, B]$. Ainsi :

$$\begin{aligned} \int_0^B t\mathrm{e}^{-\alpha t}\mathrm{d}t &= \left[t\frac{\mathrm{e}^{-\alpha t}}{-\alpha} \right]_0^B - \int_0^B \frac{\mathrm{e}^{-\alpha t}}{-\alpha}\mathrm{d}t \\ &= \frac{B\mathrm{e}^{-\alpha B}}{-\alpha} + \frac{1}{\alpha}\int_0^B \mathrm{e}^{-\alpha t}\mathrm{d}t \\ &= \frac{B\mathrm{e}^{-\alpha B}}{-\alpha} + \frac{1}{\alpha}\left[\frac{\mathrm{e}^{-\alpha t}}{-\alpha} \right]_0^B \\ &= \frac{B\mathrm{e}^{-\alpha B}}{-\alpha} - \frac{\mathrm{e}^{-\alpha B}}{\alpha^2} + \frac{1}{\alpha^2} \end{aligned}$$

Or, $\displaystyle\lim_{B \to +\infty} \frac{B\mathrm{e}^{-\alpha B}}{-\alpha} = 0$ par croissances comparées et $\displaystyle\lim_{B \to +\infty} \frac{\mathrm{e}^{-\alpha B}}{\alpha^2} = 0$ donc :

$$\lim_{B \to +\infty} \int_0^B t\mathrm{e}^{-\alpha t}\mathrm{d}t = \frac{1}{\alpha^2}$$

$$\boxed{\text{On en déduit que l'intégrale } I(\alpha) \text{ converge et } I(\alpha) = \frac{1}{\alpha^2}.}$$

□

Commentaire

Une fois le chapitre sur les variables aléatoires à densité fait, nous pourrons rédiger cette question plus efficacement.

$$\begin{aligned} I(\alpha) &= \int_0^{+\infty} t\mathrm{e}^{-\alpha t}\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{\alpha}\int_0^{+\infty} t\alpha\mathrm{e}^{-\alpha t}\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{\alpha}\mathbb{E}(X) \end{aligned}$$

où $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\alpha)$. D'où $I(\alpha)$ est convergente et $I(\alpha) = \dfrac{1}{\alpha}\dfrac{1}{\alpha} = \dfrac{1}{\alpha^2}$.

b) Montrer que, pour tout $x > 0$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t}{1 + x\,\mathrm{e}^t}\mathrm{d}t$ converge.

Démonstration.
Soit $x > 0$.

- La fonction $t \mapsto \dfrac{t}{1 + x\,\mathrm{e}^t}$ est continue sur $[0, +\infty[$ donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t}{1 + x\,\mathrm{e}^t}\mathrm{d}t$ est impropre en $+\infty$.
- $\dfrac{t}{1 + x\,\mathrm{e}^t} \underset{t \to +\infty}{\sim} \dfrac{t}{x\,\mathrm{e}^t} = \dfrac{1}{x}t\mathrm{e}^{-t}$.
- Pour tout $t \geqslant 0$, $\dfrac{t}{1 + x\,\mathrm{e}^t} \geqslant 0$ et $\dfrac{1}{x}t\mathrm{e}^{-t} \geqslant 0$.
- L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} t\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$ converge d'après la question ***1.a)*** (on reconnaît $I(1)$) et donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{x}t\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$ converge également car la multiplication par une constante non nulle ne change pas la nature d'une intégrale impropre.

On en déduit, par critère d'équivalence pour les intégrales généralisées de fonctions continues et positives, que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t}{1 + x\,\mathrm{e}^t}\mathrm{d}t$ converge.

□

On définit la fonction f sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$\forall x > 0,\ f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t}{1 + x\,\mathrm{e}^t}\mathrm{d}t$$

2. Montrer que f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

Démonstration.
Soit $(x, y) \in]0, +\infty[^2$ tel que $x < y$.

$$\begin{aligned}
f(x) - f(y) &= \int_0^{+\infty} \frac{t}{1 + x\,\mathrm{e}^t}\mathrm{d}t - \int_0^{+\infty} \frac{t}{1 + y\,\mathrm{e}^t}\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{+\infty} \left(\frac{t}{1 + x\,\mathrm{e}^t} - \frac{t}{1 + y\,\mathrm{e}^t}\right)\mathrm{d}t && \textit{(par linéarité)} \\
&= \int_0^{+\infty} t\frac{1 + y\,\mathrm{e}^t - (1 + x\,\mathrm{e}^t)}{(1 + x\,\mathrm{e}^t)(1 + y\,\mathrm{e}^t)}\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{+\infty} t\mathrm{e}^t\frac{y - x}{(1 + x\,\mathrm{e}^t)(1 + y\,\mathrm{e}^t)}\mathrm{d}t \\
&= (y - x)\int_0^{+\infty} \frac{t\mathrm{e}^t}{(1 + x\,\mathrm{e}^t)(1 + y\,\mathrm{e}^t)}\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

De plus,

× la fonction $t \mapsto \dfrac{t\mathrm{e}^t}{(1 + x\,\mathrm{e}^t)(1 + y\,\mathrm{e}^t)}$ est continue et positive sur $[0, +\infty[$. De plus cette fonction n'est pas identiquement nulle. On en déduit que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t\mathrm{e}^t}{(1 + x\,\mathrm{e}^t)(1 + y\,\mathrm{e}^t)}\mathrm{d}t > 0$ par positivité de l'intégrale (les bornes étant rangées dans l'ordre croissant).

× $y - x > 0$

et donc $f(x) > f(y)$.

$$\boxed{\text{On en déduit que } f \text{ est strictement décroissante sur } \mathbb{R}_+^*.}$$

□

3. a) Montrer que, pour tout $x > 0$:

$$0 \leqslant f(x) \leqslant \frac{1}{x}$$

Démonstration.
Soit $x > 0$.

- Soit $t \geqslant 0$. On a $1 + x\mathrm{e}^t \geqslant x\mathrm{e}^t > 0$. Par décroissance de la fonction inverse sur $]0, +\infty[$:

$$0 \leqslant \frac{1}{1 + x\mathrm{e}^t} \leqslant \frac{1}{x\mathrm{e}^t}$$

  et puisque $t \geqslant 0$, on a finalement :

$$0 \leqslant \frac{t}{1 + x\mathrm{e}^t} \leqslant \frac{t}{x\mathrm{e}^t} = \frac{1}{x}t\mathrm{e}^{-t}$$

- D'après la question ***1***, les intégrales $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t}{1 + x\,\mathrm{e}^t}\mathrm{d}t$ et $I(1)$ convergent.
- Par croissance de l'intégrale, les bornes étant rangées dans l'ordre croissant :

$$0 \leqslant f(x) \leqslant \int_0^{+\infty} \frac{1}{x}t\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t = \frac{1}{x}I(1) \qquad \textit{(par linéarité)}$$

  Or, $I(1) = 1$.

$$\boxed{\text{On a bien : } \forall x > 0,\ 0 \leqslant f(x) \leqslant \frac{1}{x}.}$$

□

b) En déduire la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

Démonstration.
On sait que $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$.

$$\boxed{\text{Ainsi d'après le théorème d'encadrement : } \lim_{x \to +\infty} f(x) = 0.}$$

□

c) Démontrer que :

$$\frac{1}{x} - f(x) \underset{x \to +\infty}{=} o\left(\frac{1}{x}\right)$$

Démonstration.
Soit $x > 0$.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{x} - f(x) &= \frac{1}{x} - \int_0^{+\infty} \frac{t}{1 + x\,\mathrm{e}^t} \mathrm{d}t \\
&= \int_0^{+\infty} \frac{1}{x} t\mathrm{e}^{-t} \mathrm{d}t - \int_0^{+\infty} \frac{t}{1 + x\,\mathrm{e}^t} \mathrm{d}t \\
&= \int_0^{+\infty} \left(\frac{t}{x\mathrm{e}^t} - \frac{t}{1 + x\,\mathrm{e}^t} \right) \mathrm{d}t && \textit{(par linéarité)} \\
&= \int_0^{+\infty} t \frac{1 + x\mathrm{e}^t - x\mathrm{e}^t}{x\mathrm{e}^t(1 + x\mathrm{e}^t)} \mathrm{d}t \\
&= \int_0^{+\infty} \frac{t}{x\mathrm{e}^t(1 + x\mathrm{e}^t)} \mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{x} \int_0^{+\infty} \frac{t}{\mathrm{e}^t(1 + x\mathrm{e}^t)} \mathrm{d}t
\end{aligned}$$

Il suffit alors de montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t}{\mathrm{e}^t(1 + x\mathrm{e}^t)} \mathrm{d}t = 0$.
Procédons par encadrement (les arguments étant analogues à ceux de la question ***3.a)***).
Soit $t \geqslant 0$. On a :

$$0 \leqslant \frac{t}{\mathrm{e}^t(1 + x\mathrm{e}^t)} \leqslant \frac{t}{x\mathrm{e}^{2t}} = \frac{1}{x} t\mathrm{e}^{-2t}$$

Par croissance de l'intégrale, les bornes étant rangées dans l'ordre croissant :

$$0 \leqslant \int_0^{+\infty} \frac{t}{\mathrm{e}^t(1 + x\mathrm{e}^t)} \mathrm{d}t \leqslant \int_0^{+\infty} \frac{1}{x} t\mathrm{e}^{-2t} \mathrm{d}t = \frac{1}{x} I(2) = \frac{1}{4x}$$

Par théorème d'encadrement, on a bien :

$$\lim_{x \to +\infty} \int_0^{+\infty} \frac{t}{\mathrm{e}^t(1 + x\mathrm{e}^t)} \mathrm{d}t = 0$$

et donc

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{1}{x} - f(x)}{\frac{1}{x}} = 0$$

$$\boxed{\text{On a bien : } \frac{1}{x} - f(x) \underset{x \to +\infty}{=} o\left(\frac{1}{x}\right).}$$

□

d) En déduire un équivalent simple de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

Démonstration.
On remarque que, pour tout $x > 0$:

$$\frac{\frac{1}{x} - f(x)}{\frac{1}{x}} = 1 - \frac{f(x)}{\frac{1}{x}}$$

D'après la question précédente :

$$\lim_{x\to+\infty} 1 - \frac{f(x)}{\frac{1}{x}} = 0$$

et donc

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{\frac{1}{x}} = 1$$

$$\boxed{\text{On peut conclure que : } f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{x}.}$$

□

4. ***a)*** Montrer que, pour tout $x \in]0,1[$:

$$f(x) \geqslant \int_0^{-\ln(x)} \frac{t}{1+x\,\mathrm{e}^t}\mathrm{d}t$$

Démonstration.
Soit $x \in]0,1[$. On remarque que $-\ln(x) > 0$. Ainsi, par relation de Chasles :

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t}{1+x\,\mathrm{e}^t}\mathrm{d}t = \int_0^{-\ln(x)} \frac{t}{1+x\,\mathrm{e}^t}\mathrm{d}t + \int_{-\ln(x)}^{+\infty} \frac{t}{1+x\,\mathrm{e}^t}\mathrm{d}t$$

De plus, la fonction $t \mapsto \dfrac{t}{1+x\,\mathrm{e}^t}$ est continue et positive sur $[-\ln(x), +\infty[$. Par positivité de l'intégrale, les bornes étant rangées dans l'ordre croissant :

$$\int_{-\ln(x)}^{+\infty} \frac{t}{1+x\,\mathrm{e}^t}\mathrm{d}t \geqslant 0$$

$$\boxed{\text{On a bien : } \forall x \in]0,1[,\ f(x) \geqslant \int_0^{-\ln(x)} \frac{t}{1+x\,\mathrm{e}^t}\mathrm{d}t.}$$

□

b) En déduire que, pour tout $x \in]0,1[$:

$$f(x) \geqslant \frac{\ln(x)^2}{4}$$

Démonstration.
Soit $x \in]0,1[$. Soit $t \in [0, -\ln(x)]$.
La fonction exponentielle étant croissante sur $\mathbb{R}$, on a :

$$0 < 1 + x\mathrm{e}^t \leqslant 1 + x\mathrm{e}^{-\ln(x)} = 1 + x\frac{1}{x} = 2$$

D'où, par décroissance de la fonction inverse sur $]0, +\infty[$:

$$\frac{t}{1+x\,\mathrm{e}^t} \geqslant \frac{t}{2}$$

Par croissance de l'intégrale, les bornes étant rangées dans l'ordre croissant $(0 < -\ln(x))$:

$$\int_0^{-\ln(x)} \frac{t}{1+x\,\mathrm{e}^t}\mathrm{d}t \geqslant \int_0^{-\ln(x)} \frac{t}{2}\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^{-\ln(x)} = \frac{\ln(x)^2}{4}$$

$$\boxed{\text{On a bien : } \forall x \in]0,1[,\ f(x) \geqslant \frac{\ln(x)^2}{4}.}$$

□

c) En déduire la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers 0.

Démonstration.
On sait que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(x)^2}{4} = +\infty$.

$$\boxed{\text{Ainsi, par théorème de comparaison : } \lim_{x\to 0} f(x) = +\infty.}$$

□

5. *a)* Montrer que l'intégrale $J = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln(u)}{u(1+u)}\mathrm{d}u$ converge.

Démonstration.

- La fonction $u \mapsto \dfrac{\ln(u)}{u(1+u)}$ est continue sur $[1,+\infty[$ donc l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln(u)}{u(1+u)}\mathrm{d}u$ est impropre en $+\infty$.
- $u^{\frac{3}{2}} \dfrac{\ln(u)}{u(1+u)} \underset{u\to+\infty}{\sim} \dfrac{\ln(u)}{u^{\frac{1}{2}}}$ et $\lim\limits_{u\to+\infty} \dfrac{\ln(u)}{u^{1/2}} = 0$ par croissances comparées donc
$$\frac{\ln(u)}{u(1+u)} \underset{u\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{u^{\frac{3}{2}}}\right)$$
- L'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{u^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}u$ converge par critère de Riemann.
- Pour tout $u \geqslant 1$, $\dfrac{\ln(u)}{u(1+u)} \geqslant 0$ et $\dfrac{1}{u^{\frac{3}{2}}} \geqslant 0$.

$$\boxed{\text{On en déduit, par critère d'équivalence pour les intégrales généralisées de fonctions continues et positives, que l'intégrale } \int_1^{+\infty} \frac{\ln(u)}{u(1+u)}\mathrm{d}u \text{ converge.}}$$

□

b) En utilisant le changement de variable $u = x\mathrm{e}^t$ que l'on justifiera, montrer que, pour tout $x > 0$:

$$f(x) = \ln(x)^2 - \ln(x)\ln(1+x) + \int_x^{+\infty} \frac{\ln(u)}{u(1+u)}\mathrm{d}u \qquad (*)$$

Démonstration.
Soit $x > 0$.
Soit $B \geqslant 0$. Procédons par changement de variable :

$$\left|\begin{array}{lcl} t = \varphi(u) = \ln(u) - \ln(x) & & u = x\mathrm{e}^t \\ \mathrm{d}t = \dfrac{1}{u}\mathrm{d}u & & \mathrm{d}u = x\mathrm{e}^t\mathrm{d}t \\ t = 0 & \Longleftrightarrow & u = x \\ t = B & \Longleftrightarrow & u = x\mathrm{e}^B \end{array}\right.$$

Ce changement de variable est valide car la fonction $\varphi : u \mapsto \ln(u) - \ln(x)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[x, x\mathrm{e}^B]$.

$$\begin{aligned}\int_0^B \frac{t}{1+x\,\mathrm{e}^t}\mathrm{d}t &= \int_x^{x\mathrm{e}^B} \frac{\ln(u)-\ln(x)}{1+u}\,\frac{1}{u}\mathrm{d}u \\ &= \int_x^{x\mathrm{e}^B} \frac{\ln(u)}{u(1+u)}\mathrm{d}u - \int_x^{x\mathrm{e}^B} \frac{\ln(x)}{u(1+u)}\mathrm{d}u\end{aligned}$$

- D'après la question ***5.a)***, l'intégrale $\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\ln(u)}{u(1+u)}\mathrm{d}u$ est convergente et

$$\lim_{B\to+\infty} \int_x^{x\mathrm{e}^B} \frac{\ln(u)}{u(1+u)}\mathrm{d}u = \int_x^{+\infty} \frac{\ln(u)}{u(1+u)}\mathrm{d}u$$

- Pour la deuxième intégrale, on a :

$$\begin{aligned}\int_x^{x\mathrm{e}^B} \frac{\ln(x)}{u(1+u)}\mathrm{d}u &= \ln(x)\int_x^{x\mathrm{e}^B} \left(\frac{1}{u} - \frac{1}{1+u}\right)\mathrm{d}u \\ &= \ln(x)\left(\Big[\ \ln(u)\ \Big]_x^{x\mathrm{e}^B} - \Big[\ \ln(1+u)\ \Big]_x^{x\mathrm{e}^B}\right) \\ &= \ln(x)\left(\ln\left(x\mathrm{e}^B\right) - \ln(x) - \ln\left(1+x\mathrm{e}^B\right) + \ln(1+x)\right) \\ &= \ln(x)\left(\cancel{\ln(x)} + \ln\left(\mathrm{e}^B\right) - \cancel{\ln(x)} - \ln\left(1+x\mathrm{e}^B\right) + \ln(1+x)\right) \\ &= \ln(x)\left(\ln\left(\frac{\mathrm{e}^B}{1+x\mathrm{e}^B}\right) + \ln(1+x)\right)\end{aligned}$$

Or, $\displaystyle\frac{\mathrm{e}^B}{1+x\mathrm{e}^B} \underset{B\to+\infty}{\sim} \frac{1}{x}$ et par continuité de ln en $\dfrac{1}{x}$:

$$\lim_{B\to+\infty} \ln\left(\frac{\mathrm{e}^B}{1+x\mathrm{e}^B}\right) = \ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln(x)$$

Finalement, on obtient :

$$\begin{aligned}f(x) &= \int_x^{+\infty} \frac{\ln(u)}{u(1+u)}\mathrm{d}u - \ln(x)\left(-\ln(x) + \ln(1+x)\right) \\ &= \ln(x)^2 - \ln(x)\ln(1+x) + \int_x^{+\infty} \frac{\ln(u)}{u(1+u)}\mathrm{d}u\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On a bien : } \forall x > 0,\ f(x) = \ln(x)^2 - \ln(x)\ln(1+x) + \int_x^{+\infty} \frac{\ln(u)}{u(1+u)}\mathrm{d}u.}$$

□

c) En déduire que f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et calculer $f'(x)$ pour tout $x > 0$.
Retrouver ainsi le sens de variations de f.

Démonstration.
Soit $x > 0$. Réécrivons la formule $(*)$ sous la forme :

$$\begin{aligned} f(x) &= \ln(x)^2 - \ln(x)\ln(1+x) + \int_x^1 \frac{\ln(u)}{u(1+u)}\mathrm{d}u + J \\ &= \ln(x)^2 - \ln(x)\ln(1+x) - \int_1^x \frac{\ln(u)}{u(1+u)}\mathrm{d}u + J \end{aligned}$$

Par théorème fondamental de l'analyse, la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_1^x \frac{\ln(u)}{u(1+u)}\mathrm{d}u$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.
Ainsi ; f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme somme et produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$.
On a alors :

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2\frac{1}{x}\ln(x) - \left(\frac{1}{x}\ln(1+x) + \ln(x)\frac{1}{1+x}\right) - \frac{\ln x}{x(1+x)} \\ &= 2\frac{\ln(x)}{x} - \frac{\ln(1+x)}{x} - \cancel{\frac{\ln(x)}{1+x}} - \frac{\ln(x)}{x} + \cancel{\frac{\ln(x)}{1+x}} \\ &= \frac{\ln(x)}{x} - \frac{\ln(1+x)}{x} \\ &= \frac{\ln(x) - \ln(1+x)}{x} \end{aligned}$$

Or, la fonction ln est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$ donc $\ln(x) - \ln(1+x) < 0$. D'où : $f'(x) < 0$.

$$\boxed{\text{On retrouve ainsi que } f \text{ est strictement décroissante sur } \mathbb{R}_+^*.}$$

□

6. a) Montrer par encadrement que :

$$\int_x^1 \frac{\ln(u)}{1+u}\mathrm{d}u = \underset{x\to 0}{o}\left(\ln(x)^2\right)$$

Démonstration.
Soit $x \in]0,1[$. Soit $u \in [x,1]$.
On a :

$$\begin{aligned} & 0 \leqslant x \leqslant u \leqslant 1 \\ \text{donc} \quad & 1 \leqslant 1+u \leqslant 2 \\ \text{donc} \quad & \frac{1}{2} \leqslant \frac{1}{1+u} \leqslant 1 && \textit{(car } t \mapsto \frac{1}{t} \textit{ est décroissante sur }]0,+\infty[\textit{)} \\ \text{donc} \quad & \ln(u) \leqslant \frac{\ln(u)}{1+u} \leqslant \frac{\ln(u)}{2} && \textit{(car } \ln(u) \leqslant 0\textit{)} \end{aligned}$$

Par croissance de l'intégrale, les bornes étant rangées dans l'ordre croissant :

$$\int_x^1 \ln(u)\mathrm{d}u \leqslant \int_x^1 \frac{\ln(u)}{1+u}\mathrm{d}u \leqslant \int_x^1 \frac{\ln(u)}{2}\mathrm{d}u$$

Or :

$$\int_x^1 \ln(u)\mathrm{d}u = \left[\ u\ln(u) - u\ \right]_x^1 = -1 - x\ln(x) + x$$

D'où :

$$-1 - x\ln(x) + x \leqslant \int_x^1 \frac{\ln(u)}{1+u}\mathrm{d}u \leqslant \frac{-1 - x\ln(x) + x}{2}$$

De plus, $\ln(x)^2 > 0$ et donc :

$$\frac{-1 - x\ln(x) + x}{\ln(x)^2} \leqslant \frac{\displaystyle\int_x^1 \frac{\ln(u)}{1+u}\mathrm{d}u}{\ln(x)^2} \leqslant \frac{-1 - x\ln(x) + x}{2\ln(x)^2}$$

Pour conclure, remarquons que :

$$\lim_{x\to 0} \frac{-1 - x\ln(x) + x}{\ln(x)^2} = \lim_{x\to 0} -\frac{1}{\ln(x)^2} - \frac{x}{\ln(x)} + \frac{x}{\ln(x)^2} = 0$$

$$\boxed{\text{Par théorème d'encadrement : } \lim_{x\to 0} \frac{\displaystyle\int_x^1 \frac{\ln(u)}{1+u}\mathrm{d}u}{\ln(x)^2} = 0 \text{ et donc } \int_x^1 \frac{\ln(u)}{1+u}\mathrm{d}u \underset{x\to 0}{=} o\left(\ln(x)^2\right).}$$

□

b) En utilisant $(*)$, montrer que, pour tout $x > 0$:

$$f(x) - \frac{\ln(x)^2}{2} = J - \ln(x)\ln(1+x) - \int_x^1 \frac{\ln(u)}{1+u}\mathrm{d}u$$

Démonstration.
Soit $x > 0$. D'après $(*)$:

$$\begin{aligned} f(x) - \frac{\ln(x)^2}{2} &= \ln(x)^2 - \ln(x)\ln(1+x) + \int_x^{+\infty} \frac{\ln(u)}{u(1+u)}\mathrm{d}u - \frac{\ln(x)^2}{2} \\ &= \frac{\ln(x)^2}{2} - \ln(x)\ln(1+x) + \int_x^1 \frac{\ln(u)}{u(1+u)}\mathrm{d}u + J \\ &= \frac{\ln(x)^2}{2} - \ln(x)\ln(1+x) + \int_x^1 \ln(u)\left(\frac{1}{u} - \frac{1}{1+u}\right)\mathrm{d}u + J \\ &= \frac{\ln(x)^2}{2} - \ln(x)\ln(1+x) + \int_x^1 \frac{\ln(u)}{u}\mathrm{d}u - \int_x^1 \frac{\ln(u)}{1+u}\mathrm{d}u + J \end{aligned}$$

Or :

$$\int_x^1 \frac{\ln(u)}{u}\mathrm{d}u = \int_x^1 \frac{1}{u}\ln(u)\mathrm{d}u = \left[\frac{\ln(u)^2}{2}\right]_x^1 = -\frac{\ln(x)^2}{2}$$

$$\boxed{\text{D'où : } f(x) - \frac{\ln(x)^2}{2} = J - \ln(x)\ln(1+x) - \int_x^1 \frac{\ln(u)}{1+u}\mathrm{d}u.}$$

□

c) En déduire un équivalent simple de $f(x)$ lorsque x tend vers 0.

Démonstration.
Soit $x > 0$. D'après la question précédente :

$$\frac{f(x)}{\frac{\ln(x)^2}{2}} - 1 = \frac{f(x) - \frac{\ln(x)^2}{2}}{\frac{\ln(x)^2}{2}}$$

$$= \frac{2J}{\ln(x)^2} - \frac{2\ln(1+x)}{\ln(x)} + 2\frac{\displaystyle\int_x^1 \frac{\ln(u)}{u(1+u)}\mathrm{d}u}{\ln(x)^2}$$

Or $\lim\limits_{x\to 0} \ln(x) = -\infty$ et donc :

× $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2J}{\ln(x)^2} = 0$

× $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2\ln(1+x)}{\ln(x)} = 0$

× $\lim\limits_{x\to 0} 2\dfrac{\displaystyle\int_x^1 \frac{\ln(u)}{u(1+u)}\mathrm{d}u}{\ln(x)^2} = 0$ d'après la question ***6.a)***

$$\boxed{\text{On en déduit que : } f(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{\ln(x)^2}{2}.}$$

□

Problème 1 (sujet maison)

Partie 1 : Réduction d'une matrice

Soit n un entier naturel non nul fixé.
On note J_n la matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1.

1. Calculer J_n^2. En déduire les valeurs propres possibles de J_n.

Démonstration.
Tous les coefficients de la matrice J_n^2 sont égaux à n.

$$\boxed{\text{D'où : } J_n^2 = nJ_n.}$$

On en déduit que le polynôme $P(x) = x^2 - nx = x(x-n)$ est un polynôme annulateur de J_n. On en déduit que :

$$\operatorname{Sp}(J_n) \subset \{\text{racines de } P(x)\} = \{0, n\}$$

$$\boxed{\text{Les valeurs propres possibles de } J_n \text{ sont } 0 \text{ et } n.}$$

□

Dans la suite de l'énoncé, on note λ_1 (resp. λ_2) la plus petite (resp. la plus grande) des deux valeurs propres possibles de J_n. Ainsi, $\lambda_1 < \lambda_2$.

2. Calculer $\operatorname{rg}(J_n)$. En déduire la dimension de $E_{\lambda_1}(J_n)$.

Démonstration.

$$\boxed{\text{Toutes les colonnes de } J_n \text{ sont égales et } J_n \text{ n'est pas la matrice nulle donc } \operatorname{rg}(J_n) = 1.}$$

Par théorème du rang matriciel :

$$n = \dim(E_0(J_n)) + \operatorname{rg}(J_n)$$

et donc, puisque $\lambda_1 = 0$:

$$\boxed{\dim(E_{\lambda_1}(J_n)) = \dim(E_0(J_n)) = n - 1.}$$

□

3. a) Montrer que $E_{\lambda_2}(J_n) \neq \{0_{\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})}\}$ en exhibant un vecteur particulier.

Démonstration.
Tout d'abord, remarquons que $\lambda_2 = n$.
Soit $U = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

$$J_n U = \begin{pmatrix} n \\ \vdots \\ n \end{pmatrix} = nU$$

et puisque $U \neq 0_{\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$, on en déduit que n est une valeur propre de J_n et que U est un vecteur propre de J_n associé à la valeur propre n.

$$\boxed{\text{On a bien : } E_{\lambda_2}(J_n) \neq \{0_{\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})}\}.}$$

☐

b) En déduire que : $\dim(E_{\lambda_2}(J_n)) = 1$.

Démonstration.
D'après la question précédente : $\dim(E_{\lambda_2}(J_n)) \geqslant 1$.
Supposons que $\dim(E_{\lambda_2}(J_n)) > 1$. Notons alors $p = \dim(E_{\lambda_2}(J_n))$.
Fixons une base $\mathcal{F}_0 = (U_1, \dots, U_{n-1})$ de $E_0(J_n)$ et une base $\mathcal{F}_n = (V_1, \dots, V_p)$ de $E_n(J_n)$.
Par théorème de concaténation, la famille $\mathcal{F} = (U_1, \dots, U_{n-1}, V_1, \dots, V_p)$ est libre.
Or :

$$\mathrm{Card}(\mathcal{F}) = n - 1 + p > n = \dim(\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}))$$

C'est absurde.

$$\boxed{\text{On peut donc conclure que : } \dim(E_{\lambda_2}(J_n)) = 1.}$$

☐

4. Que peut-on conclure sur le spectre de J_n ?

Démonstration.

- D'après la question ***1***, les valeurs propres possibles de J_n sont 0 et n.
- D'après la question ***2***, 0 est bien valeur propre de J_n.
- D'après la question ***3.a)***, n est bien valeur propre de J_n.

$$\boxed{\text{On peut donc conclure que : } \mathrm{Sp}(J_n) = \{0, n\}.}$$

☐

5. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Soit $a \in \mathbb{R}$.

a) Montrer que :

$$\mathrm{Sp}(A - aI_n) = \{\lambda - a \mid \lambda \in \mathrm{Sp}(A)\}$$

Démonstration.
Soit $\mu \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
\mu \in \mathrm{Sp}(A - aI_n) &\iff \exists U \neq 0, (A - aI_n)U = \mu U \\
&\iff \exists U \neq 0, AU - aU = \mu U \\
&\iff \exists U \neq 0, AU = (a + \mu)U \\
&\iff (a + \mu) \in \mathrm{Sp}(A) \\
&\iff \exists \lambda \in \mathrm{Sp}(A), \lambda = a + \mu \\
&\iff \exists \lambda \in \mathrm{Sp}(A), \mu = \lambda - a \\
&\iff \mu \in \{\lambda - a \mid \lambda \in \mathrm{Sp}(A)\}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On a bien : } \mathrm{Sp}(A - aI_n) = \{\lambda - a \mid \lambda \in \mathrm{Sp}(A)\}.}$$

☐

b) Montrer que, pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$:

$$E_{\lambda-a}(A - aI_n) = E_\lambda(A)$$

Démonstration.
Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$. Soit $U \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

$$\begin{aligned} U \in E_{\lambda-a}(A - aI_n) &\iff (A - aI_n)U = (\lambda - a)U \\ &\iff AU - aU = \lambda U - aU \\ &\iff AU = \lambda U \\ &\iff U \in E_\lambda(A) \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On a bien : } E_{\lambda-a}(A - aI_n) = E_\lambda(A).}$$

□

6. ***a)*** Déterminer le spectre de la matrice $J_n - I_n$.

Démonstration.
D'après la question ***5.a)*** :

$$\begin{aligned} \mathrm{Sp}(J_n - I_n) &= \{\lambda - 1 \mid \lambda \in \mathrm{Sp}(J_n)\} && \textit{(d'après la question 5.a))} \\ &= \{\lambda - 1 \mid \lambda \in \{0, n\}\} && \textit{(d'après la question 4)} \\ &= \{-1, n-1\} \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{D'où : } \mathrm{Sp}(J_n - I_n) = \{-1, n-1\}.}$$

□

b) Déterminer les dimensions des sous-espaces propres de la matrice $J_n - I_n$.

Démonstration.
D'après la question ***5.b)*** :

$$E_{-1}(J_n - I_n) = E_0(J_n) \qquad \text{et} \qquad E_{n-1}(J_n - I_n) = E_n(J_n)$$

$$\boxed{\text{Ainsi, d'après les questions } \textbf{\textit{2}} \text{ et } \textbf{\textit{3.b)}} : \dim(E_{-1}(J_n - I_n)) = n - 1 \text{ et } \dim(E_{n-1}(J_n - I_n)) = 1.}$$

□

Partie 2 : Quelques exemples de graphes réguliers

On fixe un entier n supérieur ou égal à 2.
Dans cette partie et la suivante, on ne considérera que des graphes non orientés et sans boucle.
On dit qu'un graphe G est *régulier* si tous ses sommets ont le même degré. Plus précisément, on dira que G est d-*régulier* si tous ses sommets ont un degré égal à d (où $d \in [\![0, n-1]\!]$ est appelé le *degré de régularité* du graphe G).

7. Soit $d \in [\![0, n-1]\!]$. On considère dans cette question un graphe G à n sommets et d-régulier.
On note a le nombre d'arêtes de G. Exprimer a en fonction de d et n.

Démonstration.
D'après la formule d'Euler :

$$\sum_{s \in S} \deg(s) = 2a$$

où S est l'ensemble des sommets du graphe G.
Puisque G est d-régulier : pour tout $s \in S$, $\deg(s) = d$. Ainsi :

$$\sum_{s \in S} \deg(s) = d \, \mathrm{Card}(S) = dn$$

$$\boxed{\text{D'où : } a = \frac{dn}{2}.}$$

□

8. On considère dans cette question un graphe G à n sommets et 0-régulier.

a) Quelle est la matrice d'adjacence A du graphe G ?

Démonstration.
Un graphe 0-régulier est un graphe sans arête (les sommets ont tous 0 voisins) et donc la matrice d'adjacence A est la matrice nulle de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. □

b) Déterminer le spectre de A.

Démonstration.
La matrice nulle est diagonale donc ses valeurs propres sont exactement ses coefficients diagonaux.

$$\boxed{\text{On en déduit que : } \mathrm{Sp}(A) = \{0\}.}$$

□

9. On considère dans cette question un graphe G à n sommets et $(n-1)$-régulier.

a) Exprimer la matrice d'adjacence A du graphe G à l'aide des notations de la partie 1.

Démonstration.
Puisque le graphe G est $(n-1)$-régulier, chaque sommet est relié par une arête à tous les autres sommets (rappelons que G est sans boucle). Ainsi, sur chaque ligne de la matrice d'adjacence A, on ne trouve que des 1 sauf pour l'élément diagonal qui vaut 0 (c'est toujours le cas pour un graphe sans boucle).

$$\boxed{\text{On en déduit que : } A = J_n - I_n.}$$

□

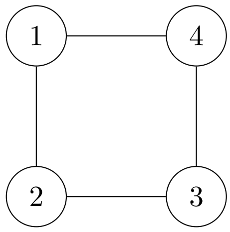
b) En déduire le spectre de A.

Démonstration.

$$\boxed{\text{D'après la question } \textbf{\textit{6.a)}} : \mathrm{Sp}(A) = \{-1, n-1\}.}$$

□

10. On considère dans cette question le graphe G suivant :



a) Le graphe G est-il régulier ? Si oui, préciser son degré de régularité.

Démonstration.
On observe que chaque sommet est relié à deux autres sommets.

$$\boxed{\text{Le graphe } G \text{ est 2-régulier.}}$$

□

b) Expliciter la matrice d'adjacence A du graphe G sous forme de tableau matriciel.

Démonstration.

$$\boxed{\text{Par lecture du graphe, on obtient : } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.}$$

□

c) Déterminer le spectre de A.

Démonstration.

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$
\begin{aligned}
\mathrm{rg}(A-\lambda I_4) &= \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -\lambda \end{pmatrix}\right) \\
&= \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -\lambda \\ 1 & -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda & 1 \\ -\lambda & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right) & & L_1 \leftrightarrow L_4 \\
&= \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -\lambda \\ 0 & -\lambda & 0 & \lambda \\ 0 & 1 & -\lambda & 1 \\ 0 & 1 & \lambda & 1-\lambda^2 \end{pmatrix}\right) & & \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 + \lambda L_1 \end{array} \\
&= \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -\lambda \\ 0 & 1 & -\lambda & 1 \\ 0 & -\lambda & 0 & \lambda \\ 0 & 1 & \lambda & 1-\lambda^2 \end{pmatrix}\right) & & L_2 \leftrightarrow L_3 \\
&= \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -\lambda \\ 0 & 1 & -\lambda & 1 \\ 0 & 0 & -\lambda^2 & 2\lambda \\ 0 & 0 & 2\lambda & -\lambda^2 \end{pmatrix}\right) & & \begin{array}{l} L_3 \leftarrow L_3 + \lambda L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 - L_2 \end{array} \\
&= \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -\lambda \\ 0 & 1 & -\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 2\lambda & -\lambda^2 \\ 0 & 0 & -\lambda^2 & 2\lambda \end{pmatrix}\right) & & L_3 \leftrightarrow L_4 \\
&= \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -\lambda \\ 0 & 1 & -\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 2\lambda & -\lambda^2 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda(\lambda-2)(\lambda+2) \end{pmatrix}\right) & & L_4 \leftarrow 2L_4 + \lambda L_3
\end{aligned}
$$

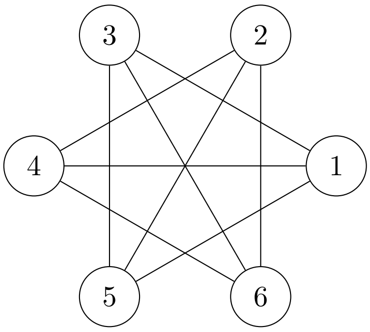
La réduite obtenue $M_\lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -\lambda \\ 0 & 1 & -\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 2\lambda & -\lambda^2 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda(\lambda-2)(\lambda+2) \end{pmatrix}$ étant triangulaire supérieure, on obtient les équivalences suivantes :

$$
\begin{aligned}
\lambda \text{ est valeur propre de } A &\iff A-\lambda I_4 \text{ est non inversible} \\
&\iff M_\lambda \text{ est non inversible} \\
&\iff \text{au moins un des coefficients diagonaux de } M_\lambda \text{ est nul} \\
&\iff \lambda = 0 \text{ ou } \lambda = 2 \text{ ou } \lambda = -2
\end{aligned}
$$

$$\boxed{\text{D'où : } \mathrm{Sp}(A) = \{-2, 0, 2\}.}$$

□

11. On considère dans cette question le graphe G suivant :



a) Le graphe G est-il régulier ? Si oui, préciser son degré de régularité.

Démonstration.
On observe que chaque sommet est relié à trois autres sommets.

$$\boxed{\text{Le graphe } G \text{ est 3-régulier.}}$$

□

b) Expliciter la matrice d'adjacence A du graphe G sous forme de tableau matriciel.

Démonstration.

$$\boxed{\text{Par lecture du graphe, on obtient : } A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.}$$

□

c) On suppose que la matrice A est définie en **Python** sous la variable `A`. Le script suivant

```
I = np.eye(6)
print(al.matrix_rank(A-3*I))
print(al.matrix_rank(A-I))
print(al.matrix_rank(A+2*I))
print(al.matrix_rank(A))
```

renvoie les nombres (dans cet ordre) : `5, 5, 4, 4`.
En déduire le spectre de A.

Démonstration.
D'après le script **Python**, ces 4 rangs sont strictement inférieurs à 6 (la taille de la matrice A).
On en déduit que :

$$\{-2, 0, 1, 3\} \subset \mathrm{Sp}(A)$$

Montrons qu'il n'y a pas d'autres valeurs propres.
Supposons que $\mathrm{Sp}(A) \neq \{-2, 0, 1, 3\}$ et donc qu'il existe une autre valeur propre de A que l'on note $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 0, 1, 3\}$.
D'après le théorème du rang matriciel :

$$\dim(E_{-2}(A)) = 2, \ \dim(E_0(A)) = 2, \ \dim(E_1(A)) = 1, \ \dim(E_3(A)) = 1$$

Fixons $\mathcal{F}_{-2} = (U_1, U_2)$ une base de $E_{-2}(A)$, $\mathcal{F}_0 = (U_3, U_4)$ une base de $E_0(A)$, $\mathcal{F}_1 = (U_5)$ une base de $E_1(A)$ et $\mathcal{F}_3 = (U_6)$ une base de $E_3(A)$.

Soit V un vecteur propre associé à la valeur propre λ. Ainsi, la famille (V) est libre.

Par théorème de concaténation, la famille $\mathcal{F} = (U_1, U_2, U_3, U_4, U_5, U_6, V)$ est libre.

Or :

$$\mathrm{Card}(\mathcal{F}) = 7 > 6 = \dim(\mathscr{M}_{6,1}(\mathbb{R}))$$

C'est absurde.

$$\boxed{\text{On peut alors conclure que : } \mathrm{Sp}(A) = \{-2, 0, 1, 3\}.}$$

□

12. Au vu des différents exemples étudiés dans cette partie, quelle conjecture pouvez-vous faire sur la plus grande valeur propre de la matrice d'adjacence d'un graphe d-régulier ?

Démonstration.
Soit G un graphe d-régulier. On note A sa matrice d'adjacence.

$$\boxed{\text{On conjecture que la plus grande valeur propre de } A \text{ est toujours égale à } d.}$$

□

Partie 3 : Un résultat général sur les graphes réguliers

Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Soit $d \in [\![0, n-1]\!]$.
Soit G un graphe à n sommets et d-régulier.
On note $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant n}}$ la matrice d'adjacence du graphe G.

13. Soit $i \in [\![1, n]\!]$. Que vaut la somme $\sum\limits_{j=1}^{n} a_{i,j}$?
En déduire une valeur propre de A. On explicitera un vecteur propre associé à cette valeur propre.

Démonstration.
Par définition de la matrice d'adjacence, les termes de la somme $\sum\limits_{j=1}^{n} a_{i,j}$ sont des 0 et des 1. Plus précisément, il y a autant de 1 que de voisins du sommet numéro i.

$$\boxed{\text{Puisque le graphe } G \text{ est } d\text{-régulier, on peut alors conclure que : } \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = d.}$$

Soit $U = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. D'après le résultat précédent :

$$AU = \begin{pmatrix} \sum\limits_{j=1}^{n} a_{1,j} \\ \vdots \\ \sum\limits_{j=1}^{n} a_{n,j} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d \\ \vdots \\ d \end{pmatrix} = dU$$

et puisque $U \neq 0_{\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$, on en déduit que d est une valeur propre de A et que U est un vecteur propre de A associé à la valeur propre d. □

14. Soit λ une valeur propre de A. Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0_{\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})}\}$ tel que :

$$AX = \lambda X \quad (*)$$

On fixe $i_0 \in [\![1, n]\!]$ tel que :

$$|x_{i_0}| = \max_{i \in [\![1,n]\!]} |x_i|$$

a) En utilisant $(*)$, montrer que : $|\lambda|\,|x_{i_0}| \leqslant d\,|x_{i_0}|$.

Démonstration.
L'égalité $(*)$ se réécrit :

$$\begin{pmatrix} \sum\limits_{j=1}^{n} a_{1,j}x_j \\ \vdots \\ \sum\limits_{j=1}^{n} a_{n,j}x_j \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

En ne gardant que la ligne i_0, on obtient :

$$\sum_{j=1}^{n} a_{i_0,j}x_j = \lambda x_{i_0}$$

D'où :

$$\begin{aligned} |\lambda x_{i_0}| &= \left| \sum_{j=1}^{n} a_{i_0,j}x_j \right| \\ &\leqslant \sum_{j=1}^{n} |a_{i_0,j}x_j| && \textit{(par inégalité triangulaire)} \\ &= \sum_{j=1}^{n} a_{i_0,j}\,|x_j| && \textit{(car, pour tout } j \in [\![1,n]\!],\ a_{i_0,j} \geqslant 0\textit{)} \\ &\leqslant \sum_{j=1}^{n} a_{i_0,j}\,|x_{i_0}| && \textit{(car, pour tout } j \in [\![1,n]\!],\ |x_j| \leqslant |x_{i_0}|\textit{)} \\ &= |x_{i_0}| \sum_{j=1}^{n} a_{i_0,j} \\ &= |x_{i_0}|\,d && \textit{(d'après la question } \textbf{\textit{13}}\textit{)} \end{aligned}$$

De plus, $|\lambda x_{i_0}| = |\lambda|\,|x_{i_0}|$.

$$\boxed{\text{On a bien : } |\lambda|\,|x_{i_0}| \leqslant d\,|x_{i_0}|.}$$

□

b) Conclure que : $|\lambda| \leqslant d$.

Démonstration.
Supposons que $|x_{i_0}| = 0$. Alors il vient par maximalité que : $\forall i \in [\![1, n]\!], x_i = 0$. On en déduit que $X = 0_{\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$. Ceci contredit la définition de X (comme vecteur propre de A associé à la valeur propre λ). C'est absurde.

$$\boxed{\text{Ainsi, } |x_{i_0}| > 0 \text{ et donc, d'après la question précédente : } |\lambda| \leqslant d.}$$

□

Problème 2 (ESCP 2004)

Dans tout le problème, r désigne un entier naturel vérifiant $1 \leqslant r \leqslant 10$. Une urne contient 10 boules distinctes B_1, B_2, ..., B_{10}. Une expérience aléatoire consiste à y effectuer une suite de tirages d'une boule **avec remise**, chaque boule ayant la même probabilité de sortir à chaque tirage.
Cette expérience est modélisée par un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.

Commentaire

Il est vivement conseillé de prendre le temps de comprendre précisément l'expérience aléatoire. Un défaut de compréhension aura en effet des répercussions importantes sur le reste du problème. Le contenu initial de l'urne est une donnée primordiale. Il est précisé de manière très explicite que l'urne contient 10 boules. Le rôle de l'entier r est par contre beaucoup moins clair. Il faut comprendre que parmi les 10 boules de l'urne, on en distingue r. Plus précisément, les boules $B_1, \ldots, B_r$ sont considérés comme différentes (on aurait pu les choisir d'une autre couleur par exemple) des boules B_{r+1}, ..., B_{10}.

Partie I : Étude du nombre de tirages nécessaires pour obtenir au moins une fois chacune des boules B_1, ... , B_r

On suppose que le nombre de tirages nécessaires pour obtenir au moins une fois chacune des boules B_1, ... , B_r définit une variable aléatoire Y_r sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.

1. Cas particulier $r = 1$.
Montrer que la variable aléatoire Y_1 suit une loi géométrique ; préciser son paramètre, son espérance et sa variance.

Démonstration.

- Par définition, Y_1 est le nombre de tirages nécessaires pour obtenir la boule B_1.
  - × L'expérience consiste en une succession d'une infinité d'épreuves de Bernoulli (tirage d'une boule dans l'urne) indépendantes et de même paramètre de succès $\dfrac{1}{10}$ (probabilité d'obtenir la boule B_1).
  - × La v.a.r. Y_1 est le rang du premier succès de cette expérience.

$$\boxed{\text{On en conclut : } Y_1 \hookrightarrow \mathcal{G}\left(\frac{1}{10}\right).}$$

Commentaire

- Même si cela n'est pas explicitement supposé dans l'énoncé, on fait ici l'hypothèse que les tirages sont indépendants. Il est à noter que les tirages se font avec remise. Ainsi, la composition de l'urne n'est pas modifiée au cours des tirages. Il est alors raisonnable de penser que la probabilité de tirer une boule lors d'un tirage ne dépend pas des résultats des autres tirages.
- Le fait que la composition de l'urne reste inchangée tout au long de l'expérience permet de démontrer que la probabilité de tirer la boule B_1 est de $\frac{1}{10}$ à chaque tirage. Par contre, lorsque les tirages s'effectuent sans remise, l'expérience consiste toujours en une succession d'épreuves de Bernoulli mais celles-ci ont des paramètres de succès différents.
- En cas d'absence de remise, il est naturel de conditionner par des événements permettant de préciser le contenu de l'urne avant que le tirage n'ait lieu. Cela nous amène généralement à l'utilisation de la formule des probabilités composées ainsi qu'à celle des probabilités totales.

- Comme $Y_1 \hookrightarrow \mathcal{G}\left(\frac{1}{10}\right)$, alors Y_1 admet une espérance et une variance données par :

$$\mathbb{E}(Y_1) = \frac{1}{\frac{1}{10}} = 10 \qquad \text{et} \qquad \mathbb{V}(Y_1) = \frac{1-\frac{1}{10}}{\left(\frac{1}{10}\right)^2} = \frac{\frac{9}{10}}{\frac{1}{100}} = \frac{9}{10} \times 100 = 90$$

$$\boxed{\mathbb{E}(Y_1) = 10 \quad \text{et} \quad \mathbb{V}(Y_1) = 90}$$

□

2. On suppose que r est supérieur ou égal à 2.

a) Calculer la probabilité pour que les r boules B_1, B_2, ..., B_r sortent dans cet ordre aux r premiers tirages.

Démonstration.

- Tout d'abord, notons A l'événement « les r boules $B_1, B_2, \ldots, B_r$ sortent dans cet ordre aux r premiers tirages ».
- Pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, on note T_i la v.a.r. égale au numéro de la boule tirée lors du $i^{\text{ème}}$ tirage.
On a alors :

$$A = [T_1 = 1] \cap [T_2 = 2] \cap \ldots \cap [T_r = r]$$

Et ainsi :

$$\begin{array}{rcll} \mathbb{P}(A) & = & \mathbb{P}\big(\,[T_1 = 1] \cap [T_2 = 2] \cap \ldots \cap [T_r = r]\,\big) & \\ & = & \mathbb{P}\big(\,[T_1 = 1]\,\big) \times \mathbb{P}\big(\,[T_2 = 2]\,\big) \times \ldots \times \mathbb{P}\big(\,[T_r = r]\,\big) & \textit{(par indépendance des tirages)} \\ & = & \dfrac{1}{10} \times \dfrac{1}{10} \times \ldots \times \dfrac{1}{10} & \textit{(car chaque boule a la même probabilité d'apparaître)} \\ & = & \left(\dfrac{1}{10}\right)^r & \end{array}$$

$$\boxed{\text{On en déduit : } \mathbb{P}(A) = \left(\frac{1}{10}\right)^r}$$

Commentaire

- On a introduit dans cette question des v.a.r. T_i.
On aurait aussi pu introduire, pour tout $i \in \mathbb{N}^*$ et tout $j \in [\![1, r]\!]$ l'événement :

$$A_i^j \ : \text{« la boule } B_j \text{ a été tirée lors du } i^{\text{ème}} \text{ tirage »}$$

Dans ce cas : $A = A_1^1 \cap \ldots \cap A_r^r$.
- Il était aussi possible d'introduire, pour tout $j \in [\![1, r]\!]$ l'événement :

$$C_j \ : \text{« la boule } B_j \text{ a été tirée lors du } j^{\text{ème}} \text{ tirage »}$$

Dans ce cas : $A = B_1 \cap \ldots \cap B_r$.
- Ce dernier choix est certainement le plus adapté à la question posée. Les autres permettent l'introduction de v.a.r. ou événements plus généraux qui pourront être utilisés dans d'autres questions de l'énoncé.

Commentaire

- Il était enfin possible de traiter cette question par dénombrement. On considère alors que l'expérience consiste à effectuer r tirages successifs et avec remise dans l'urne contenant initialement 10 boules.
  - $\times$ Dans ce cas, Ω_1 (l'univers des possibles de l'expérience ci-dessus) est l'ensemble des r-uplets de l'ensemble $\mathscr{B} = [\![1, 10]\!]$ des boules.
    (ici la boule est désignée par son numéro mais on pourrait aussi considérer l'ensemble des boules sous la forme $\mathscr{B} = \{B_1, \ldots, B_{10}\}$)
    Ainsi : $\text{Card}(\Omega_1) = 10^r$.
  - $\times$ Comme Ω_1 est un ensemble fini, on choisit comme tribu $\mathscr{A}_1 = \mathcal{P}(\Omega_1)$.
  - $\times$ Enfin, on munit $(\Omega_1, \mathscr{A}_1)$ de la probabilité uniforme notée $\mathbb{P}_1$ (chaque r-tirage a même probabilité d'apparaître).

  Le seul r-tirage qui réalise l'événement A est : $(1, 2, \ldots, r)$.
  Autrement dit : $A = \{(1, 2, \ldots, r)\}$. On en déduit :

$$\mathbb{P}_1(A) = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega_1)} = \frac{1}{10^r}$$

$\square$

b) En déduire la probabilité $\mathbb{P}\big([Y_r = r]\big)$.

Démonstration.

- L'événement $[Y_r = r]$ est réalisé si et seulement si il a fallu attendre r tirages pour obtenir au moins une fois chacune des boules $B_1, \ldots, B_r$.
  Autrement dit, cet événement est réalisé si et seulement si on obtient exactement une fois chacune des boules $B_1, \ldots, B_r$ lors des r premiers tirages.
- Ainsi, l'événement $[Y_r = r]$ est réalisé par tous les r-tirages qui contiennent chaque nombre de $[\![1, r]\!]$. Un tel r-tirage est entièrement déterminé par :
  - $\times$ le numéro (élément de $[\![1, r]\!]$) en $1^{\text{ère}}$ position : r possibilités.
  - $\times$ le numéro (élément de $[\![1, r]\!]$) en $2^{\text{ème}}$ position, différent du numéro précédent : $r - 1$ possibilités.
  - $\times$ ...
  - $\times$ le numéro (élément de $[\![1, r]\!]$) en $r^{\text{ème}}$ position, différent des numéros précédents : 1 possibilité.

  Il y a donc $r \times (r-1) \times \ldots \times 1 = r!$ tels r-tirages.
  (chacun de ces r-tirage n'est autre qu'une permutation de l'ensemble $[\![1, r]\!]$)
- Chacun de ces r-tirages a la même probabilité d'apparaître puisque l'ordre dans lequel les boules $B_1, \ldots, B_r$ n'a pas d'influence sur le résultat.
  Par exemple :

$$\mathbb{P}\big([T_1 = 1] \cap [T_2 = 2] \cap \ldots \cap [T_r = r]\big) = \mathbb{P}(A) = \mathbb{P}\big([T_1 = r] \cap [T_2 = r-1] \cap \ldots \cap [T_r = 1]\big)$$

$$\boxed{\text{On en conclut : } \mathbb{P}\big([Y_r = r]\big) = r! \times \mathbb{P}(A) = \frac{r!}{10^r}.}$$

Commentaire

- Il était possible de traiter entièrement cette question par dénombrement. On a déterminé le nombre de r-tirages réalisant l'événement considéré. Or, il y a 10^r r-tirages en tout.
  On en conclut, en reprenant les notations de la question précédente :

$$\mathbb{P}\big([Y_r = r]\big) = \frac{\mathrm{Card}\big([Y_r = r]\big)}{\mathrm{Card}(\Omega_1)} = \frac{r!}{10^r}$$

- Il était aussi possible, mais plus technique, en opérant par décomposition d'événements.
  Notons $\mathcal{S}_r$ l'ensemble des permutations de l'ensemble $[\![1, r]\!]$. Alors :

$$[Y_r = r] = \bigcup_{\sigma \in \mathcal{S}_r} \left(\bigcap_{i=1}^{r} [T_i = \sigma(i)] \right)$$

  Et ainsi :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\big([Y_r = r]\big) &= \mathbb{P}\left(\bigcup_{\sigma \in \mathcal{S}_r} \left(\bigcap_{i=1}^{r} [T_i = \sigma(i)] \right) \right) \\
&= \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_r} \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{r} [T_i = \sigma(i)] \right) && \textit{(car les événements de la famille } \Big(\bigcap_{i=1}^{r} [T_i = \sigma(i)]\Big)_{\sigma \in \mathcal{S}_r} \textit{ sont 2 à 2 incompatibles)} \\
&= \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_r} \left(\prod_{i=1}^{r} \mathbb{P}\big([T_i = \sigma(i)]\big) \right) && \textit{(par indépendance des tirages)} \\
&= \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_r} \left(\prod_{i=1}^{r} \frac{1}{10} \right) \\
&= \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_r} \left(\frac{1}{10} \right)^r = r! \times \left(\frac{1}{10} \right)^r && \textit{(car } \mathrm{Card}\,(\mathcal{S}_r) = r! \textit{)}
\end{aligned}$$

□

c) Préciser l'ensemble des valeurs que peut prendre la variable aléatoire Y_r.

Démonstration.

- Il faut au minimum r tirages pour obtenir au moins une fois chacune des r boules $B_1, \ldots, B_r$.

$$\boxed{Y_r(\Omega) \subset [\![r, +\infty[\![}$$

- De plus, n'importe quelle valeur $i \in [\![r, +\infty[\![$ peut être atteinte par Y_r. Démontrons-le.
  Soit $i \in [\![r, +\infty[\![$. Considérons par exemple l'∞-tirage ω défini par :

$$\omega = (1, 2, \ldots, r-1, r-1, \ldots, r-1, r, \ldots)$$

  Ce tirage apparaît si l'on tire les boules $B_1, \ldots, B_{r-1}$ dans cet ordre, suivi du tirage répété de la boule B_{r-1} jusqu'au $i^{\text{ème}}$ tirage où la boule B_r est tirée. Cet ∞-tirage ω réalise l'événement $[Y_r = i]$ (ce qui démontre que Y_r peut prendre la valeur i).

$$\boxed{\text{Finalement, l'ensemble des valeurs que peut prendre } Y_r \text{ est } Y_r(\Omega) = [\![r, +\infty[\![.}$$

□

d) Compléter la fonction **Python** `simulY(r)` pour qu'elle simule la variable aléatoire Y_r.

```
def simulY(r):
    rang = 0
    tab = np.zeros(r)
    while np.sum(tab) < r :
        rang += 1
        tirage = rd.randint(1, 11)
        if tirage <= r:
            if tab[tirage-1] == 0 :
                tab[tirage-1] += 1
    return rang
```

3. On suppose encore que r est supérieur ou égal à 2. Pour tout entier i vérifiant $1 \leqslant i \leqslant r$, on désigne par W_i la variable aléatoire représentant le nombre de tirages nécessaires pour que, pour la première fois, i boules distinctes parmi les boules B_1, B_2, ... , B_r soient sorties (en particulier, on a : $W_r = Y_r$). On pose :

$$\left\{ \begin{array}{l} X_1 = W_1 \\ \forall i \in [\![2, r]\!],\ X_i = W_i - W_{i-1} \end{array} \right.$$

On admet que les variables aléatoires X_1, ..., X_r sont indépendantes.

a) Exprimer la variable aléatoire Y_r à l'aide des variables aléatoires X_1, ..., X_r.

Démonstration.

- Par définition :

$$\forall i \in [\![2, r]\!],\ X_i = W_i - W_{i-1}$$

- On en déduit :

$$\begin{array}{rcll} \sum\limits_{i=2}^{r} X_i & = & \sum\limits_{i=2}^{r} \big(W_i - W_{i-1}\big) & \\ & = & W_r - W_1 & \textit{(par télescopage)} \\ & = & W_r - X_1 & \textit{(car } X_1 = W_1\textit{)} \\ & = & Y_r - X_1 & \textit{(car } Y_r = W_r\textit{)} \end{array}$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } Y_r = X_1 + \sum_{i=2}^{r} X_i = \sum_{i=1}^{r} X_i.}$$

□

b) Interpréter concrètement la variable aléatoire X_i pour tout i vérifiant $1 \leqslant i \leqslant r$.

Démonstration.
Soit $i \in [\![2, r]\!]$.

- La v.a.r. W_i prend pour valeur le nombre de tirages nécessaires pour qu'on ait obtenu, pour la première fois, i boules distinctes parmi B_1, ... , B_r.
- Comme $X_i = W_i - W_{i-1}$, la v.a.r. a donc pour valeur la différence entre :
  - × le nombre de tirages nécessaires à l'obtention de i boules distinctes parmi B_1, ... , B_r.

  et × le nombre de tirages nécessaires à l'obtention de $(i-1)$ boules distinctes parmi B_1, ... , B_r.

$$\boxed{\text{Ainsi, pour tout } i \in [\![2, r]\!], \text{ la v.a.r. } X_i \text{ est donc le nombre de tirages nécessaires entre la première obtention de } i-1 \text{ boules distinctes parmi } B_1, \ldots, B_r \text{ et la première obtention de } i \text{ boules distinctes parmi } B_1, \ldots, B_r.}$$

- Par définition, $X_1 = W_1$.

$$\boxed{\text{La v.a.r. } X_1 \text{ est donc le nombre de tirages nécessaires pour obtenir, pour la première fois, une des boules } B_1, \ldots, B_r.}$$

Commentaire

La première définition est en réalité aussi adaptée pour le cas $i = 1$. On peut en effet considérer que la v.a.r. X_1 est le nombre de tirages nécessaires entre la première obtention de 0 boule parmi $B_1, \ldots, B_r$ (sous-entendu ce qu'on a avant le premier tirage) et la première obtention d'une boule $B_1, \ldots, B_r$. On retrouve ainsi que X_1 est la v.a.r. qui donne le nombre de tirages nécessaires à la première obtention d'une boule parmi $B_1, \ldots, B_r$. □

c) Montrer que, pour tout i vérifiant $1 \leqslant i \leqslant r$, la variable aléatoire X_i suit une loi géométrique ; préciser son espérance et sa variance.

Démonstration.
Soit $i \in [\![1, r]\!]$.
D'après la question précèdente, X_i est la v.a.r. qui prend pour valeur le nombre de tirages nécessaires entre la première obtention de $i-1$ boules distinctes parmi $B_1, \ldots, B_r$ et la première obtention de i boules distinctes parmi $B_1, \ldots, B_r$.

- L'expérience consiste en une succession d'une infinité d'épreuves de Bernoulli (tirage d'une boule dans l'urne) indépendantes et de même paramètre de succès $\dfrac{r-(i-1)}{10}$ (probabilité d'obtenir, dans l'urne contenant 10 boules, une boule qui est une des boules $B_1, \ldots, B_r$ mais qui n'est pas une des $i-1$ boules distinctes parmi $B_1, \ldots, B_r$ déjà obtenue au moins une fois).
- La v.a.r. X_i est le rang du premier succès de cette expérience.

$$\boxed{\text{On en conclut : } X_i \hookrightarrow \mathcal{G}\left(\frac{r-i+1}{10}\right).}$$

- Comme $X_i \hookrightarrow \mathcal{G}\left(\dfrac{r-i+1}{10}\right)$, alors X_i admet une espérance et une variance données par :

$$\mathbb{E}(X_i) = \frac{1}{\frac{r-i+1}{10}} = \frac{10}{r-i+1}$$

$$\mathbb{V}(X_i) = \frac{1 - \frac{r-i+1}{10}}{\left(\frac{r-i+1}{10}\right)^2} = \frac{\frac{10-(r-i+1)}{10}}{\frac{(r-i+1)^2}{10^2}} = \frac{10-(r-i+1)}{\cancel{10}} \times \frac{10^{\cancel{2}}}{(r-i+1)^2}$$

$$\boxed{\text{On en déduit que pour tout } i \in [\![1, r]\!], \ \mathbb{E}(X_i) = \frac{10}{r-i+1} \ \text{ et } \ \mathbb{V}(X_i) = 10\, \frac{10-(r-i+1)}{(r-i+1)^2}.}$$

□

d) On pose : $S_1(r) = \sum\limits_{k=1}^{r} \dfrac{1}{k}$ et $S_2(r) = \sum\limits_{k=1}^{r} \dfrac{1}{k^2}$.
Exprimer l'espérance $\mathbb{E}(Y_r)$ et la variance $\mathbb{V}(Y_r)$ de Y_r à l'aide de $S_1(r)$ et de $S_2(r)$.

Démonstration.

- D'après la question **3.a)**, $Y_r = \sum\limits_{i=1}^{r} X_i$. La v.a.r. Y_r admet une variance (et donc une espérance) comme somme de v.a.r. qui admettent chacune une variance (et donc une espérance).
- De plus :

$$\begin{array}{rcll}
\mathbb{E}(Y_r) & = & \mathbb{E}\Big(\sum\limits_{i=1}^{r} X_i \Big) & \\[2mm]
& = & \sum\limits_{i=1}^{r} \mathbb{E}(X_i) & \\[2mm]
& = & \sum\limits_{i=1}^{r} \dfrac{10}{r-i+1} & \\[2mm]
& = & \sum\limits_{j=1}^{r} \dfrac{10}{j} & \textit{(à l'aide du changement d'indice } j = r+1-i\textit{)} \\[2mm]
& = & 10\ S_1(r) &
\end{array}$$

$$\boxed{\mathbb{E}(Y_r) = 10\ S_1(r)}$$

- Enfin :

$$\begin{array}{rcll}
\mathbb{V}(Y_r) & = & \mathbb{V}\Big(\sum\limits_{i=1}^{r} X_i \Big) & \\[2mm]
& = & \sum\limits_{i=1}^{r} \mathbb{V}(X_i) & \textit{(car, d'après l'énoncé, les v.a.r. de la famille } (X_i)_{i \in [\![1,r]\!]} \textit{ sont indépendantes)} \\[2mm]
& = & \sum\limits_{i=1}^{r} 10 \times \dfrac{10-(r-i+1)}{(r-i+1)^2} & \\[2mm]
& = & 10 \sum\limits_{i=1}^{r} \left(\dfrac{10}{(r-i+1)^2} - \dfrac{\cancel{r-i+1}}{(r-i+1)^{\cancel{2}}} \right) & \\[2mm]
& = & 10 \left(10 \sum\limits_{i=1}^{r} \dfrac{1}{(r-i+1)^2} - \sum\limits_{i=1}^{r} \dfrac{1}{r-i+1} \right) & \\[2mm]
& = & 10 \left(10 \sum\limits_{j=1}^{r} \dfrac{1}{j^2} - \sum\limits_{j=1}^{r} \dfrac{1}{j} \right) & \textit{(à l'aide du changement d'indice } j = r+1-i\textit{)} \\[2mm]
& = & 100\, S_2(r) - 10 S_1(r) &
\end{array}$$

$$\boxed{\mathbb{V}(Y_r) = 100\ S_2(r) - 10\ S_1(r).}$$

Commentaire

Le changement d'indice $j = r+1-i$ n'est rien d'autre qu'une sommation dans l'autre sens :

$$\begin{array}{rcl}
\sum\limits_{i=1}^{r} \dfrac{1}{r+1-i} & = & \dfrac{1}{r} + \dfrac{1}{r-1} + \cdots + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{1} \\[2mm]
& = & \dfrac{1}{1} + \dfrac{1}{2} + \cdots + \dfrac{1}{r-1} + \dfrac{1}{r} = \sum\limits_{j=1}^{r} \dfrac{1}{j}
\end{array}$$

□

4. a) Soit k un entier naturel non nul. Donner un encadrement de l'intégrale $\displaystyle\int_k^{k+1} \frac{1}{t}\, dt$.

Démonstration.

- Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Soit $t \in [k, k+1]$. Alors :

$$\begin{array}{rcccccl} & k & \leqslant & t & \leqslant & k+1 & \\ \text{donc} & \dfrac{1}{k} & \geqslant & \dfrac{1}{t} & \geqslant & \dfrac{1}{k+1} & \quad \textit{(par décroissance de } t \mapsto \frac{1}{t} \textit{ sur }]0, +\infty[) \end{array}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, le minimum de } t \mapsto \dfrac{1}{t} \text{ est } \dfrac{1}{k+1} \text{ et son maximum est } \dfrac{1}{k} \text{ sur } [k, k+1].}$$

- Par croissance de l'intégrale, les bornes étant dans l'ordre croissant ($k \leqslant k+1$) :

$$\begin{array}{ccccc} \displaystyle\int_k^{k+1} \frac{1}{k}\, dt & \geqslant & \displaystyle\int_k^{k+1} \frac{1}{t}\, dt & \geqslant & \displaystyle\int_k^{k+1} \frac{1}{k+1}\, dt \\ \shortparallel & & \shortparallel & & \shortparallel \\ \big((k+1)-k\big)\, \dfrac{1}{k} & & \displaystyle\int_k^{k+1} \frac{1}{t}\, dt & & \big((k+1)-k\big)\, \dfrac{1}{k+1} \end{array}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, pour tout } k \in \mathbb{N}^* : \dfrac{1}{k+1} \leqslant \displaystyle\int_k^{k+1} \frac{1}{t}\, dt \leqslant \frac{1}{k}.}$$

Commentaire

- Il faut noter que les intégrales en présence sont bien définies.
  En effet, les fonctions $t \mapsto \dfrac{1}{k}$, $t \mapsto \dfrac{1}{t}$ et $t \mapsto \dfrac{1}{k+1}$ sont continues sur le **segment** $[k, k+1]$.
- Il est important de noter que l'argument de bonne définition est essentiel dans le cas où l'on étudie des intégrales impropres. Dans ce cas, il est essentiel de démontrer la convergence de ces intégrales impropres avant de pouvoir utiliser la croissance de l'intégrale.

□

b) Si r est supérieur ou égal à 2, donner un encadrement de $S_1(r)$ et en déduire la double inégalité :

$$10 \ln(r+1) \leqslant \mathbb{E}(Y_r) \leqslant 10 \big(\ln(r) + 1\big)$$

Démonstration.
Soit $r \geqslant 2$. D'après la question ***4.a)*** :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \ \frac{1}{k+1} \leqslant \int_k^{k+1} \frac{1}{t}\, dt \leqslant \frac{1}{k}$$

- En sommant les inégalités de droite pour k variant de 1 à r, on obtient :

$$\begin{array}{ccccccc} & & & \displaystyle\sum_{k=1}^{r} \int_k^{k+1} \frac{1}{t}\, dt & \leqslant & \displaystyle\sum_{k=1}^{r} \frac{1}{k} & \\ & & & \shortparallel & & \shortparallel & \\ \ln(r+1) & = & [\, \ln(t)\,]_1^{r+1} \; = & \displaystyle\int_1^{r+1} \frac{1}{t}\, dt & & S_1(r) & \textit{(par relation de Chasles)} \end{array}$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } S_1(r) \geqslant \ln(r+1).}$$

- En sommant les inégalités de gauche pour k variant de 1 à $r-1$, on obtient :

$$\begin{array}{ccc} \displaystyle\sum_{k=1}^{r-1} \frac{1}{k+1} & \leqslant & \displaystyle\sum_{k=1}^{r-1} \int_k^{k+1} \frac{1}{t}\, dt \\ \shortparallel & & \shortparallel \\ \displaystyle\sum_{i=2}^{r} \frac{1}{i} & & \displaystyle\int_1^r \frac{1}{t}\, dt \qquad \textit{(par relation de Chasles)} \end{array}$$

Puis en ajoutant 1 de part et d'autre :

$$1 + \sum_{i=2}^{r} \frac{1}{i} \leqslant 1 + \ln(r)$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } S_1(r) \leqslant \ln(r) + 1.}$$

- En combinant les deux inégalité précédentes, on obtient :

$$\begin{array}{ccccc} 10\ \ln(r+1) & \leqslant & 10\ S_1(r) & \leqslant & 10\ \big(\ln(r)+1\big) \\ & & \shortparallel & & \\ & & \mathbb{E}(Y_r) & & \textit{(d'après la question } \textbf{\textit{3.d)}}\textit{)} \end{array}$$

$$\boxed{\text{On a bien : } \forall r \geqslant 2,\ 10\ \ln(r+1)\ \leqslant\ \mathbb{E}(Y_r)\ \leqslant\ 10\ (\ln(r)+1).}$$

$\square$

c) Si r supérieur ou égal à 2, établir par une méthode analogue à celle de la question précédente, la double inégalité :

$$1 - \frac{1}{r+1}\ \leqslant\ S_2(r)\ \leqslant\ 2 - \frac{1}{r}$$

En déduire un encadrement de $\mathbb{V}(Y_r)$.

Démonstration.
Soit $r \geqslant 2$.

- Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Soit $t \in [k, k+1]$. Alors :

$$\begin{array}{rccccc} & k & \leqslant & t & \leqslant & k+1 \\ \text{donc} & \dfrac{1}{k^2} & \geqslant & \dfrac{1}{t^2} & \geqslant & \dfrac{1}{(k+1)^2} \end{array} \qquad \textit{(par décroissance de } t \mapsto \tfrac{1}{t} \textit{ sur }]0,+\infty[\textit{)}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, le minimum de } t \mapsto \frac{1}{t} \text{ est } \frac{1}{k+1} \text{ et son maximum est } \frac{1}{k} \text{ sur } [k,k+1].}$$

- Par croissance de l'intégrale, les bornes étant dans l'ordre croissant ($k \leqslant k+1$) :

$$\begin{array}{ccccc} \displaystyle\int_k^{k+1} \frac{1}{k^2}\, dt & \geqslant & \displaystyle\int_k^{k+1} \frac{1}{t^2}\, dt & \geqslant & \displaystyle\int_k^{k+1} \frac{1}{(k+1)^2}\, dt \\ \shortparallel & & \shortparallel & & \shortparallel \\ \big((k+1)-k\big)\ \dfrac{1}{k^2} & & \displaystyle\int_k^{k+1} \frac{1}{t^2}\, dt & & \big((k+1)-k\big)\ \dfrac{1}{(k+1)^2} \end{array}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, pour tout } k \in \mathbb{N}^* : \frac{1}{(k+1)^2}\ \leqslant\ \int_k^{k+1} \frac{1}{t^2}\, dt\ \leqslant\ \frac{1}{k^2}.}$$

- En sommant les inégalités de droite pour k variant de 1 à r, on obtient :

$$\begin{array}{ccccc} & & \displaystyle\sum_{k=1}^{r}\int_k^{k+1}\frac{1}{t^2}\,dt & \leqslant & \displaystyle\sum_{k=1}^{r}\frac{1}{k^2} \\ & & \shortparallel & & \shortparallel \\ 1-\dfrac{1}{r+1} = \left[-\dfrac{1}{t}\right]_1^{r+1} & = & \displaystyle\int_1^{r+1}\frac{1}{t^2}\,dt & & S_2(r) \quad \textit{(par relation de Chasles)} \end{array}$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } 1-\frac{1}{r+1} \leqslant S_2(r).}$$

- En sommant les inégalités de gauche pour k variant de 1 à $r-1$, on obtient :

$$\begin{array}{ccccc} & \displaystyle\sum_{k=1}^{r-1}\frac{1}{(k+1)^2} & \leqslant & \displaystyle\sum_{k=1}^{r-1}\int_k^{k+1}\frac{1}{t^2}\,dt & \\ & \shortparallel & & \shortparallel & \\ S_2(r)-1 = & \displaystyle\sum_{k=2}^{r}\frac{1}{k^2} & & \displaystyle\int_1^{r}\frac{1}{t^2}\,dt & = \left[-\dfrac{1}{t}\right]_1^{r} = 1-\dfrac{1}{r} \end{array}$$

$$\boxed{\text{On en déduit : } S_2(r)-1 \leqslant 1-\frac{1}{r} \text{ puis : } S_2(r) \leqslant 2-\frac{1}{r}.}$$

$$\boxed{\text{En conclusion : } 1-\frac{1}{r+1} \leqslant S_2(r) \leqslant 2-\frac{1}{r}.}$$

- Or, d'après la question ***3.d)*** :

$$\mathbb{V}(Y_r) = 100\,S_2\,(r) - 10\,S_1\,(r)$$

En reprenant les inégalités précédentes :

$$100\,\left(1-\frac{1}{r+1}\right) \leqslant 100\;S_2(r) \leqslant 100\,\left(2-\frac{1}{r}\right)$$

$$\begin{array}{ccccc} \text{donc} \quad 100\,\left(1-\dfrac{1}{r+1}\right) - 10\,S_1(r) & \leqslant & 100\;S_2(r) - 10\,S_1(r) & \leqslant & 100\,\left(2-\dfrac{1}{r}\right) - 10\,S_1(r) \\ & & \shortparallel & & \\ & & \mathbb{V}(Y_r) & & \end{array}$$

Enfin, d'après la question précédente :

$$-10\big(\ln(r)+1\big) \leqslant -10\,S_1(r) \qquad \text{et} \qquad -10\,S_1(r) \leqslant -10\,\ln(r+1)$$

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{On en déduit :} \\ \forall r \geqslant 2,\ 100\left(1-\dfrac{1}{r+1}\right) - 10\,(\ln(r)+1) \leqslant \mathbb{V}\,(Y_r) \leqslant 100\left(2-\dfrac{1}{r}\right) - 10\ln(r+1)\end{array}} \quad \square$$

Partie II : Étude du nombre de boules distinctes parmi les boules B_1, B_2, ..., B_r tirées au moins une fois au cours des n premiers tirages

Pour tout entier n supérieur ou égal à 1, on suppose que le nombre de boules distinctes parmi les boules B_1, B_2, ..., B_r tirées au moins une fois au cours des n premiers tirages, définit une variable aléatoire Z_n sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$. On note $\mathbb{E}(Z_n)$ l'espérance de Z_n et on pose $Z_0 = 0$.
Pour tout entier naturel n non nul et pour tout entier naturel k, on note $p_{n,k}$ la probabilité de l'événement $[Z_n = k]$ et on pose : $p_{n,-1} = 0$.

5. Étude des cas particuliers $n = 1$ et $n = 2$.

a) Déterminer la loi de Z_1 et donner son espérance.

Démonstration.

- Par définition, la v.a.r. Z_1 prend pour valeur le nombre de boules distinctes parmi $B_1, \ldots, B_r$ obtenues en un seul tirage. On considère alors que l'expérience consiste à effectuer 1 tirage.
  - × Cette expérience possède deux issues. Il y a succès si on obtient une boule parmi $B_1, \ldots,$ B_r (ce qui se produit avec probabilité $\frac{r}{10}$) et échec dans le cas contraire.
  - × La v.a.r. Z_1 prend la valeur 1 en cas de succès de l'expérience et prend pour valeur 0 sinon.

$$\boxed{\text{On en conclut : } Z_1 \hookrightarrow \mathcal{B}\left(\frac{r}{10}\right) \text{ et } \mathbb{E}(Z_1) = \frac{r}{10}.}$$

Commentaire

Il est conseillé d'utiliser la rédaction indiquée au-dessus lorsque l'on reconnaît une loi usuelle. Toutefois, il peut arriver que, de par le découpage des questions, le sujet attende une rédaction plus détaillée. On développe ci-dessous la rédaction la plus générale consistant tout d'abord à préciser l'ensemble image puis obtenir la loi de Z_1 à l'aide d'une décomposition d'événements.

- Lorsqu'on effectue ce tirage, deux cas se présentent :
  - × soit on obtient une boule parmi $B_1, \ldots, B_r$.
    Dans ce cas, la v.a.r. Z_1 prend la valeur 1.
  - × soit on obtient une boule parmi $B_{r+1}, \ldots, B_{10}$.
    Dans ce cas, la v.a.r. Z_1 prend la valeur 0.

  On en déduit : $Z_1(\Omega) = \{0, 1\}$. Ainsi : $Z_1 \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$ où $p = \mathbb{P}\big([Z_1 = 1]\big)$.
- De plus (avec les notations introduites précédemment) :

$$[Z_1 = 1] = [T_1 = 1] \cup \ldots \cup [T_1 = r]$$

Et ainsi :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\big([Z_1 = 1]\big) &= \mathbb{P}\Big(\bigcup_{i=1}^{r} [T_1 = i]\Big) \\ &= \sum_{i=1}^{r} \mathbb{P}\big([T_1 = i]\big) && \textit{(car les événements de la famille } \big([T_1 = i]\big)_{i \in [\![1,r]\!]} \textit{ sont 2 à 2 incompatibles)} \\ &= \sum_{i=1}^{r} \frac{1}{10} = \frac{r}{10} \end{aligned}$$

On a bien : $Z_1 \hookrightarrow \mathcal{B}\left(\frac{r}{10}\right)$.

□

b) On suppose, dans cette question, que r est supérieur ou égal à 2.
Déterminer la loi de Z_2 et montrer que son espérance est donnée par : $\mathbb{E}(Z_2) = \dfrac{19\,r}{100}$.

Démonstration.

- Par définition, la v.a.r. Z_2 prend pour valeur le nombre de boules distinctes parmi $B_1, \ldots, B_r$ obtenues après deux tirages. Or en deux tirages, on peut obtenir au plus 2 boules distinctes parmi $B_1, \ldots, B_r$.

$$\boxed{\text{On en conclut : } Z_2(\Omega) \subset \{0,1,2\}.}$$

Commentaire

On peut être plus précis et démontrer : $Z_2(\Omega) = \{0,1,2\}$.
On peut par exemple remarquer que :
× le 2-tirage $(r+1, r+1)$ réalise $[Z_2 = 0]$,
(les deux premiers tirages ont fourni 2 boules qui ne sont pas parmi $B_1, \ldots, B_r$)
× le 2-tirage $(1, r+1)$ réalise $[Z_2 = 1]$,
(les deux premiers tirages ont fourni 1 boule parmi $B_1, \ldots, B_r$ et 1 qui ne l'est pas)
× le 2-tirage $(1, r)$ réalise $[Z_2 = 2]$.
(les deux premiers tirages ont fourni 2 boules parmi $B_1, \ldots, B_r$)

- La famille $\big([Z_1 = 0], [Z_1 = 1]\big)$ est un système complet d'événements.
Soit $i \in \{0,1,2\}$. D'après la formule des probabilités totales :

$$\mathbb{P}\big([Z_2 = i]\big) = \mathbb{P}\big([Z_1 = 0] \cap [Z_2 = i]\big) + \mathbb{P}\big([Z_1 = 1] \cap [Z_2 = i]\big)$$

- Plusieurs cas se présentent.

× Si $i = 0$ alors :

$$[Z_1 = 1] \cap [Z_2 = 0] = \varnothing$$

En effet, si le premier tirage a fourni une boule parmi $B_1, \ldots, B_r$, au bout de deux tirages on a forcément obtenu au moins une boule parmi $B_1, \ldots, B_r$. On en déduit :

$$\mathbb{P}\big([Z_2 = 0]\big) = \mathbb{P}\big([Z_1 = 0] \cap [Z_2 = 0]\big)$$

On considère alors que l'expérience consiste à effectuer deux tirages successifs et avec remise.

– Dans ce cas, Ω_2 (l'univers des possibles de l'expérience ci-dessus) est l'ensemble des 2-uplets de l'ensemble $\mathscr{B} = [\![1, 10]\!]$ des boules. Ainsi : $\text{Card}(\Omega_2) = 10^2$.
– Comme Ω_2 est un ensemble fini, on choisit comme tribu $\mathscr{A}_2 = \mathcal{P}(\Omega_2)$.
– Enfin, on munit $(\Omega_2, \mathscr{A}_2)$ de la probabilité uniforme notée $\mathbb{P}_2$ (chaque 2-tirage a même probabilité d'apparaître).

L'événement $[Z_1 = 0] \cap [Z_2 = 0]$ est réalisé par tous les 2-tirages qui contiennent deux nombres de $[\![r+1, 10]\!]$. Un tel 2-tirage est entièrement déterminé par :

× le numéro (élément de $[\![r+1, 10]\!]$) en $1^{\text{ère}}$ position : $10 - (r+1) + 1 = 10 - r$ possibilités.
× le numéro (élément de $[\![r+1, 10]\!]$) en $2^{\text{ème}}$ position : $10 - (r+1) + 1 = 10 - r$ possibilités.

Il y a donc : $(10 - r)^2$ tels 2-tirages. Finalement :

$$\mathbb{P}_2\big([Z_1 = 0] \cap [Z_2 = 0]\big) = \frac{\text{Card}\,\big([Z_1 = 0] \cap [Z_2 = 0]\big)}{\text{Card}(\Omega_2)} = \frac{(10 - r)^2}{10^2}$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } \mathbb{P}\big(\, [Z_2 = 0] \,\big) = \dfrac{(10-r)^2}{10^2}.}$$

Commentaire

On peut aussi procéder par décomposition d'événement.
On reprend les notations de la question ***2.a)***. Remarquons tout d'abord :

$$[Z_2 = 0] \;=\; [r+1 \leqslant T_1 \leqslant 10] \;\cap\; [r+1 \leqslant T_2 \leqslant 10]$$

$\left(\begin{array}{l}\textit{l'événement } [Z_2 = 0] \textit{ est réalisé si et seulement si les deux premiers} \\ \textit{tirages fournissent une boule parmi } B_{r+1},\ \dots,\ B_{10}\end{array}\right)$

On en déduit : T_1 et T_2 sont indépendantes car les tirages se font avec remise. Ainsi :

$$\begin{array}{rcll}
& & \mathbb{P}\big(\, [Z_2 = 0] \,\big) & \\
& = & \mathbb{P}\big(\, [r+1 \leqslant T_1 \leqslant 10] \quad \cap \quad [r+1 \leqslant T_2 \leqslant 10] \,\big) & \\
& = & \mathbb{P}\big(\, [r+1 \leqslant T_1 \leqslant 10] \,\big) \;\times\; \mathbb{P}\big(\, [r+1 \leqslant T_2 \leqslant 10] \,\big) & \textit{(car les v.a.r. } T_1 \textit{ et } T_2 \textit{ sont indépendantes)} \\
& = & \mathbb{P}\left(\bigcup\limits_{i=r+1}^{10} [T_1 = i]\right) \;\times\; \mathbb{P}\left(\bigcup\limits_{i=r+1}^{10} [T_2 = i]\right) & \\
& = & \left(\sum\limits_{i=r+1}^{10} \mathbb{P}\big(\, [T_1 = i] \,\big)\right) \;\times\; \left(\sum\limits_{i=r+1}^{10} \mathbb{P}\big(\, [T_2 = j] \,\big)\right) & \textit{(car les événements de la famille } \big(\, [T_1 = i] \,\big)_{i \in [\![r+1,10]\!]} \textit{ et de la famille } \big(\, [T_2 = j] \,\big)_{j \in [\![r+1,10]\!]} \textit{ sont 2 à 2 incompatibles)} \\
& = & \left(\sum\limits_{i=r+1}^{10} \dfrac{1}{10}\right) \;\times\; \left(\sum\limits_{i=r+1}^{10} \dfrac{1}{10}\right) & \\
& = & \dfrac{10-r}{10} \;\times\; \dfrac{10-r}{10} &
\end{array}$$

× Si $i = 2$ alors :

$$[Z_1 = 0] \cap [Z_2 = 2] = \varnothing$$

En effet, si le premier tirage n'a pas fourni de boule parmi $B_1, \dots, B_r$, on ne peut en avoir obtenu deux distinctes au bout de deux tirages. On en déduit :

$$\mathbb{P}\big(\, [Z_2 = 2] \,\big) = \mathbb{P}\big(\, [Z_1 = 1] \cap [Z_2 = 2] \,\big)$$

L'événement $[Z_1 = 1] \cap [Z_2 = 2]$ est réalisé par tous les 2-tirages qui contiennent deux nombres distincts de $[\![1, r]\!]$. Un tel 2-tirage est entièrement déterminé par :

× le numéro (élément de $[\![1, r]\!]$) en $1^{\text{ère}}$ position : r possibilités.
× le numéro (élément de $[\![1, r]\!]$) en $2^{\text{ème}}$ position, différent du 1^{er} : $r-1$ possibilités.

Il y a donc : $r \times (r-1)$ tels 2-tirages. Finalement :

$$\mathbb{P}_2\big(\, [Z_1 = 1] \cap [Z_2 = 2] \,\big) = \dfrac{\text{Card}\,\big(\, [Z_1 = 1] \cap [Z_2 = 2] \,\big)}{\text{Card}(\Omega_2)} = \dfrac{r \times (r-1)}{10^2}$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } \mathbb{P}\big(\, [Z_2 = 2] \,\big) = \dfrac{r \times (r-1)}{10^2}.}$$

Commentaire

Ici aussi il était possible de procéder par décomposition d'événements. Tout d'abord :

$$[Z_2 = 2] = \bigcup_{\substack{(i,j) \in [\![1,r]\!]^2 \\ i \neq j}} [T_1 = i] \cap [T_2 = j]$$

$\left(\begin{array}{l}\textit{l'événement } [Z_2 = 2] \textit{ est réalisé si et seulement si les deux premiers} \\ \textit{tirages fournissent deux boules distinctes parmi } B_1, \ldots, B_r\end{array}\right)$

On en déduit :

$$\begin{aligned}
& \mathbb{P}\big([Z_2 = 2]\big) \\
= \ & \mathbb{P}\Big(\bigcup_{\substack{(i,j) \in [\![1,r]\!]^2 \\ i \neq j}} [T_1 = i] \cap [T_2 = j]\Big) \\
= \ & \sum_{\substack{(i,j) \in [\![1,r]\!]^2 \\ i \neq j}} \mathbb{P}\big([T_1 = i] \cap [T_2 = j]\big) && \textit{(car les événements de la famille } \big([T_1 = i] \cap [T_2 = j]\big)_{\substack{(i,j) \in [\![1,r]\!]^2 \\ i \neq j}} \textit{ sont deux à deux incompatibles)} \\
= \ & \sum_{\substack{(i,j) \in [\![1,r]\!]^2 \\ i \neq j}} \mathbb{P}\big([T_1 = i]\big) \times \mathbb{P}\big([T_2 = j]\big) && \textit{(car les v.a.r. } T_1 \textit{ et } T_2 \textit{ sont indépendantes)} \\
= \ & \sum_{\substack{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant r \\ i \neq j}} \mathbb{P}\big([T_1 = i]\big) \times \mathbb{P}\big([T_2 = j]\big) \\
= \ & \sum_{\substack{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant r \\ i \neq j}} \frac{1}{100} && \textit{(car pour tout } (i,j) \in [\![1,r]\!]^2, \ \mathbb{P}\big([T_1 = i]\big) = \frac{1}{10} = \mathbb{P}\big([T_2 = j]\big)\textit{)} \\
= \ & \sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant r} \frac{1}{100} - \sum_{\substack{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant r \\ i = j}} \frac{1}{100} \\
= \ & \sum_{i=1}^{r} \left(\sum_{j=1}^{r} \frac{1}{100}\right) - \sum_{k=1}^{r} \frac{1}{100} \\
= \ & \sum_{i=1}^{r} \left(\frac{r}{100}\right) - \frac{r}{100} \ = \ \frac{r^2}{100} - \frac{r}{100} \ = \ \frac{r(r-1)}{100}
\end{aligned}$$

- La famille $([Z_2 = 0], [Z_2 = 1], [Z_2 = 2])$ forme un système complet d'événements.
  On en déduit :
  $$\mathbb{P}\big([Z_2 = 0]\big) + \mathbb{P}\big([Z_2 = 1]\big) + \mathbb{P}\big([Z_2 = 2]\big) = 1$$
  Et ainsi :
  $$\begin{aligned}
  \mathbb{P}\big([Z_2 = 1]\big) &= 1 - \Big(\mathbb{P}\big([Z_2 = 0]\big) + \mathbb{P}\big([Z_2 = 2]\big)\Big) \\
  &= 1 - \frac{(10 - r)^2}{100} - \frac{r(r-1)}{100} \\
  &= \frac{1}{100}\ \big(100 - (100 - 20\,r + r^2) - r^2 + r\big) \ = \ \frac{21\,r - 2\,r^2}{100}
  \end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{P}\big(\,[Z_2 = 1]\,\big) = \frac{21\,r - 2\,r^2}{100}}$$

- La v.a.r. Z_2 est finie. Elle admet donc une espérance.
  De plus :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{E}(Z_2) & = & \sum\limits_{i=0}^{2} i\ \mathbb{P}\big(\,[Z_2 = i]\,\big) \\ & = & 0 \times \dfrac{(10-r)^2}{100} + 1 \times \left(\dfrac{21r - 2r^2}{100}\right) + 2 \times \dfrac{r(r-1)}{100} \\ & = & \dfrac{19\,r}{100} \end{array}$$

$$\boxed{\mathbb{E}(Z_2) = \frac{19\,r}{100}}$$

Commentaire

- La valeur de $\mathbb{E}(Z_2)$ est fournie dans l'énoncé. Cela permet de mettre en avant le lien suivant :

$$1 \times \mathbb{P}\big(\,[Z_2 = 1]\,\big) + 2 \times \mathbb{P}\big(\,[Z_2 = 2]\,\big) = \frac{19\,r}{100}$$

  Ainsi, si on a déterminé $\mathbb{P}\big(\,[Z_2 = 2]\,\big)$, il est possible de vérifier la valeur de $\mathbb{P}\big(\,[Z_2 = 1]\,\big)$ à l'aide de cette égalité. Ensuite, à l'aide de l'égalité :

$$\mathbb{P}\big(\,[Z_2 = 0]\,\big) + \mathbb{P}\big(\,[Z_2 = 1]\,\big) + \mathbb{P}\big(\,[Z_2 = 2]\,\big) = 1$$

  on peut alors vérifier la valeur de $\mathbb{P}\big(\,[Z_2 = 0]\,\big)$.
- Il est tout à fait possible, **au brouillon**, d'opérer par rétro-ingénierie, c'est à dire partir du résultat donné par l'énoncé ($\mathbb{E}(Z_2)$ en l'occurrence) pour en déduire un résultat intermédiaire ($\mathbb{P}\big(\,[Z_2 = 1]\,\big)$ puis $\mathbb{P}\big(\,[Z_2 = 0]\,\big)$). Évidemment, partir du résultat ne constitue en aucun cas une démonstration. Mais la valeur du résultat intermédiaire peut parfois renseigner sur la voie à choisir pour le démontrer.

□

6. Établir, pour tout entier naturel n non nul et pour tout entier naturel k au plus égal à r, l'égalité :

$$10\,p_{n,k} \;=\; (10 - r + k)\,p_{n-1,k} + (r + 1 - k)\,p_{n-1,k-1} \qquad (*)$$

Vérifier que cette égalité reste vraie dans le cas où k est supérieur ou égal à $r+1$.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $k \in [\![0, r]\!]$.

- Tout d'abord, remarquons : $Z_{n-1}(\Omega) \subset [\![0, r]\!]$.
  En effet, en n tirages, on obtient au plus r boules distinctes parmi les boules $B_1, \ldots, B_r$.

$$\boxed{Z_{n-1}(\Omega) \subset [\![0, r]\!]}$$

  Notons au passage que ce résultat est aussi vérifié pour $n = 1$.
  En effet : Z_0 est la v.a.r. constante nulle. On a donc bien : $Z_0(\Omega) = \{0\} \subset [\![0, r]\!]$.

Commentaire

La propriété $Z_n(\Omega) \subset [\![0, r]\!]$ (inclusion et non égalité) est suffisante pour pouvoir conclure que la famille $\big([Z_{n-1} = i] \big)_{i \in [\![0,r]\!]}$ est un système complet d'événements. Afin de bien comprendre ce point, on peut l'illustrer à l'aide de la v.a.r. Z_1 (cas où $n = 2$).
On a vu en question ***5.a)*** : $Z_1(\Omega) = \{0, 1\}$. Ainsi :

$$\big([Z_1 = 0] \, , [Z_1 = 1] \big) \quad \text{est un système complet d'événements}$$

mais on peut aussi remarquer :

$$\begin{array}{l} \big([Z_1 = 0] \, , [Z_1 = 1] \, , [Z_1 = 2] \, , [Z_1 = 3] \big) \quad \text{est un système complet d'événements} \\ \qquad\qquad\qquad \shortparallel \\ \qquad \big([Z_1 = 0] \, , [Z_1 = 1] \, , \varnothing, \varnothing \big) \end{array}$$

Ceci provient du fait qu'ajouter un nombre fini (ou infini dénombrable) de fois l'événement impossible $\varnothing$, ne modifie pas les propriétés de définition d'un systeme complet d'événements.
La nouvelle famille obtenue :
× est toujours constituée d'événements 2 à 2 incompatibles. En effet :

$$[Z_1 = 0] \cap [Z_1 = 1] = \varnothing, \quad [Z_1 = 0] \cap \varnothing = \varnothing, \quad [Z_1 = 1] \cap \varnothing = \varnothing, \quad \varnothing \cap \varnothing = \varnothing$$

× la réunion de tous les événements de la famille n'est pas modifiée. En effet :

$$[Z_1 = 0] \cup [Z_1 = 1] \cup \varnothing \cup \varnothing = [Z_1 = 0] \cup [Z_1 = 1] = \Omega$$

- Ainsi, la famille $\big([Z_{n-1} = i] \big)_{i \in [\![0,r]\!]}$ est un système complet d'événements.
D'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{array}{rll} & \mathbb{P}\big([Z_n = k] \big) & \\ = & \displaystyle\sum_{i=0}^{r} \mathbb{P}\big([Z_{n-1} = i] \cap [Z_n = k] \big) & \\ = & \mathbb{P}\big([Z_{n-1} = k-1] \cap [Z_n = k] \big) + \mathbb{P}\big([Z_{n-1} = k] \cap [Z_n = k] \big) & \begin{array}{l} \textit{(en effet, pour tout } i \in [\![1, r]\!], \\ \textit{si } i \neq k-1 \ \texttt{OU} \ i \neq k, \textit{ on a :} \\ [Z_{n-1} = i] \cap [Z_n = k] = \varnothing \ \ (\star)) \end{array} \\ = & \mathbb{P}\big([Z_{n-1} = k-1] \big) \times \mathbb{P}_{[Z_{n-1} = k-1]}\big([Z_n = k] \big) + \mathbb{P}\big([Z_{n-1} = k] \big) \times \mathbb{P}_{[Z_{n-1} = k]}\big([Z_n = k] \big) & \end{array}$$

- Revenons à la propriété $(\star)$.
Soit $i \in [\![1, r]\!]$. Alors si $i \neq k-1$ `OU` $i \neq k$, on a :

$$[Z_{n-1} = i] \cap [Z_n = k] = \varnothing$$

En effet, on ne peut obtenir à la fois $i < k-1$ (respectivement $i > k$) boules distinctes parmi B_1, …, B_r au cours des $n-1$ premiers tirages et k boules distinctes parmi B_1, …, B_r en ajoutant le $n^{\text{ème}}$ tirage. Autrement dit, le $n^{\text{ème}}$ tirage peut amener au plus une nouvelle boule non encore apparue parmi les boules B_1, …, B_r.
- Précisons maintenant les différents éléments de l'égalité issue de la formule des probabilités totales.
× Tout d'abord :

$$\mathbb{P}_{[Z_{n-1} = k-1]}\big([Z_n = k] \big) = \frac{r + 1 - k}{10}$$

En effet, si l'événement $[Z_{n-1} = k-1]$ est réalisé, c'est qu'on a obtenu $k-1$ boules distinctes parmi les boules B_1, …, B_r lors des $n-1$ premiers tirages. Dans ce cas, l'événement $[Z_n = k]$

est réalisé si et seulement si on tire une boule non encore obtenue (parmi les boules B_1, ..., B_r) lors du $n^{\text{ème}}$ tirage.
Or, parmi les 10 boules de l'urne, il y a $r-(k-1)$ boules non encore obtenues.

$$\boxed{\mathbb{P}_{[Z_{n-1}=k-1]}\big([Z_n=k]\big) = \dfrac{r+1-k}{10}}$$

× Ensuite :

$$\mathbb{P}_{[Z_{n-1}=k]}([Z_n=k]) = \frac{10-r+k}{10}$$

En effet, si l'événement $[Z_{n-1}=k]$ est réalisé, c'est qu'on a obtenu k boules distinctes parmi les boules B_1, ..., B_r lors des $n-1$ premiers tirages. Dans ce cas, l'événement $[Z_n=k]$ est alors réalisé si et seulement si :

- on obtient une des k boules distinctes déjà obtenue lors du $n^{\text{ème}}$ tirage.

OU - on obtient une boule parmi les boules B_{r+1}, ..., B_{10} lors du $n^{\text{ème}}$ tirage.

Parmi les 10 boules de l'urne, il y a donc $k+\big(10-(r+1)+1\big)=10-r+k$ boules dont le tirage permet de réaliser $[Z_n=k]$.

$$\boxed{\mathbb{P}_{[Z_{n-1}=k]}([Z_n=k]) = \dfrac{10-r+k}{10}}$$

- Finalement :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\big([Z_n=k]\big) &= \mathbb{P}\big([Z_{n-1}=k-1]\big)\times\mathbb{P}_{[Z_{n-1}=k-1]}\big([Z_n=k]\big)+\mathbb{P}\big([Z_{n-1}=k]\big)\times\mathbb{P}_{[Z_{n-1}=k]}\big([Z_n=k]\big)\\ &= \frac{r-k+1}{10}\,p_{n-1,k-1}+\frac{10-r+k}{10}\,p_{n-1,k}\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Et ainsi : } 10\,p_{n,k}=(10-r+k)\,p_{n-1,k}+(r+1-k)\,p_{n-1,k-1}.}$$

- Il reste alors à démontrer que l'égalité $(*)$ est encore vérifiée si $k \geqslant r+1$.
Soit $k\in [\![r+1,+\infty[\![$. Deux cas se présentent.

× Si $k=r+1$ alors :

– d'une part :

$$\begin{aligned}&(10-r+k)\,p_{n-1,k}+\cancel{(r+1-k)\,p_{n-1,k-1}}\\ =\ &(10-r+k)\,\mathbb{P}\big([Z_{n-1}=k]\big)\ =\ 0\end{aligned}$$

(car $[Z_{n-1}=k]=\varnothing$ puisque $k\notin[\![0,r]\!]$)

– d'autre part :

$$10\,p_{n,k}=10\,\mathbb{P}\big([Z_n=k]\big)\ =\ 0$$

(car $[Z_n=k]=\varnothing$ puisque $k\notin[\![0,r]\!]$)

$$\boxed{\text{L'égalité est donc vérifiée pour } k=r+1.}$$

× Si $k\geqslant r+2$ alors :

$$[Z_n=k]=[Z_{n-1}=k]=[Z_{n-1}=k-1]=\varnothing$$

car $k\notin[\![0,r]\!]$ et $k-1\notin[\![0,r]\!]$. Ainsi :

$$p_{n,k}=p_{n-1,k}=p_{n-1,k-1}=0$$

$$\boxed{\text{Ainsi, l'égalité } (*) \text{ est aussi vérifée pour } k\geqslant r+2.}$$

Commentaire

- Afin de démontrer l'égalité $(*)$, il convient tout d'abord d'écrire explicitement cette formule :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\big([Z_n = k]\big) &= \dfrac{10-r+k}{10} \times \mathbb{P}\big([Z_{n-1} = k]\big) + \dfrac{r+1-k}{10} \times \mathbb{P}\big([Z_{n-1} = k-1]\big) \\ &= \mathbb{P}\big([Z_{n-1} = k]\big) \times \dfrac{10-r+k}{10} + \mathbb{P}\big([Z_{n-1} = k-1]\big) \times \dfrac{r+1-k}{10}\end{aligned}$$

  C'est cette forme qui doit faire penser à l'utilisation de la formule des probabilités totales selon le système complet d'événements associé à la v.a.r. Z_{n-1}.

- Pour démontrer une égalité entre probabilités, le procédé classique consiste à démontrer une égalité entre événements. Ici, on a préféré présenter le résultat en utilisant directement la formule des probabilités totales. Mais la démonstration de cette formule fait justement apparaître une égalité entre événements. Explicitons cette étape.
  Comme la famille $\big([Z_{n-1} = i]\big)_{i \in [\![0,r]\!]}$ est un système complet d'événements, on a :

$$\begin{aligned}[Z_n = k] &= \Omega \ \cap \ [Z_n = k] \\ &= \left(\bigcup_{i=0}^{r} [Z_{n-1} = i]\right) \ \cap \ [Z_n = k] \\ &= \bigcup_{i=0}^{r} \Big([Z_{n-1} = i] \cap [Z_n = k]\Big) \\ &= \big([Z_{n-1} = k-1] \cap [Z_n = k]\big) \\ &\quad \cup \ \big([Z_{n-1} = k] \cap [Z_n = k]\big)\end{aligned}$$

  (en effet, pour tout $i \in [\![1,r]\!]$, si $i \neq k-1$ `OU` $i \neq k$, on a : $[Z_{n-1} = i] \cap [Z_n = k] = \varnothing$)

- Il est à noter que cette dernière égalité :

$$[Z_n = k] \ = \ \big([Z_{n-1} = k-1] \cap [Z_n = k]\big) \ \cup \ \big([Z_{n-1} = k] \cap [Z_n = k]\big)$$

  peut aussi se démontrer de manière directe.
  En effet, l'événement $[Z_n = k]$ est réalisé si et seulement si après n tirages on a obtenu k boules distinctes parmi les boules $B_1, \ldots, B_r$. Cela se produit si et seulement si :
  - on a obtenu k boules distinctes parmi les boules $B_1, \ldots, B_r$ lors des $n-1$ premiers tirage et le tirage suivant n'en amène pas de nouvelle.
    Ainsi, $[Z_{n-1} = k-1] \cap [Z_n = k]$ est réalisé.

  `OU`
  - on a obtenu $k-1$ boules distinctes parmi les boules $B_1, \ldots, B_r$ lors des $n-1$ premiers tirage et le tirage suivant en amène une nouvelle.
    Ainsi, $[Z_{n-1} = k] \cap [Z_n = k]$ est réalisé.

$\square$

7. Pour tout entier naturel non nul n, on définit le polynôme Q_n par :

$$\left\{\begin{aligned} Q_0(X) &= 1 \\ Q_n(X) &= \sum_{k=0}^{n} p_{n,k}\, X^k \end{aligned}\right.$$

a) Préciser les polynômes Q_1 et Q_2.

Démonstration.

- Tout d'abord :

$$\begin{array}{rcll} Q_1(X) & = & \sum\limits_{k=0}^{1} p_{1,k}\, X^k & \textit{(par définition)} \\ & = & p_{1,0} + p_{1,1}\, X & \\ & = & \mathbb{P}\big(\, [Z_1 = 0]\,\big) + \mathbb{P}\big(\, [Z_1 = 1]\,\big)\, X & \\ & = & \dfrac{10-r}{10} + \dfrac{r}{10}\, X & \textit{(d'après la question } \textbf{\textit{5.a)}}\textit{)} \end{array}$$

$$\boxed{Q_1(X) = \frac{10-r}{10} + \frac{r}{10}\, X}$$

- D'autre part :

$$\begin{array}{rcll} Q_2(X) & = & \sum\limits_{k=0}^{2} p_{2,k}\, X^k & \textit{(par définition)} \\ & = & p_{2,0} + p_{2,1}\, X + p_{2,2}\, X^2 & \\ & = & \mathbb{P}\big(\, [Z_2 = 0]\,\big) + \mathbb{P}\big(\, [Z_2 = 1]\,\big)\, X + \mathbb{P}\big(\, [Z_2 = 2]\,\big)\, X^2 & \\ & = & \dfrac{(10-r)^2}{100} + \dfrac{21r - 2r^2}{100}\, X + \dfrac{r\,(r-1)}{100}\, X^2 & \textit{(d'après la question } \textbf{\textit{5.b)}}\textit{)} \end{array}$$

$$\boxed{Q_2(X) = \frac{(10-r)^2}{100} + \frac{21r - 2r^2}{100}\, X + \frac{r\,(r-1)}{100}\, X^2}$$

□

b) Calculer $Q_n(1)$ et exprimer $Q_n'(1)$ en fonction de $\mathbb{E}(Z_n)$, où Q_n' désigne la dérivée du polynôme Q_n.

Démonstration.

- Tout d'abord :

$$\begin{array}{rcll} Q_n(1) & = & \sum\limits_{k=0}^{n} p_{n,k} & \textit{(par définition)} \\ & = & \sum\limits_{k=0}^{n} \mathbb{P}\big(\, [Z_n = k]\,\big) \;=\; 1 & \textit{(car } \big(\, [Z_n = i]\,\big)_{i \in [\![0,n]\!]} \textit{ est un} \\ & & & \textit{système complet d'événements } (\star)\textit{)} \end{array}$$

L'argument $(\star)$ résulte de la propriété : $Z_n(\Omega) \subset [\![0, n]\!]$.
En effet, en n tirages on obtient forcément moins de n boules distinctes parmi $B_1, \ldots, B_r$.

$$\boxed{\text{Ainsi : } Q_n(1) = 1.}$$

- Ensuite :

$$Q_n'(X) = \sum_{k=0}^{n} k \;p_{n,k}\; X^{k-1}$$

Ainsi :

$$\begin{array}{rcll}
Q_n'(1) & = & \sum\limits_{k=0}^{n} k\ p_{n,k} & \textit{(par définition)} \\
& = & \sum\limits_{k=0}^{n} k\ \mathbb{P}\big([Z_n = k]\big) & \\
& = & \sum\limits_{\substack{k\,=\,0 \\ k\,\in\, Z_n(\Omega)}}^{n} k\ \mathbb{P}\big([Z_n = k]\big) + \cancel{\sum\limits_{\substack{k\,=\,0 \\ k\,\notin\, Z_n(\Omega)}}^{n} k\ \mathbb{P}\big([Z_n = k]\big)} & \\
& = & \sum\limits_{k\ \in\ Z_n(\Omega) \cap [\![0,n]\!]} k\ \mathbb{P}\big([Z_n = k]\big) & \\
& = & \sum\limits_{k\ \in\ Z_n(\Omega)} k\ \mathbb{P}\big([Z_n = k]\big) & \textit{(car } Z_n(\Omega) \cap [\![0,n]\!] = Z_n(\Omega) \\
& & & \textit{puisque } Z_n(\Omega) \subset [\![0,n]\!]\textit{)}
\end{array}$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } Q_n'(1) = \mathbb{E}(Z_n).}$$

Commentaire

- Dans cette question, on illustre le fait que l'on peut généralement travailler avec une sur-approximation de l'ensemble image de la v.a.r. étudiée. Plus précisément, si on considère une v.a.r. X discrète admettant une espérance et qu'il existe une sur-approximation $\mathcal{H}$ de $X(\Omega)$ (c'est-à-dire un ensemble $\mathcal{H}$ tel que $X(\Omega) \subset \mathcal{H}$) alors :
  - × la famille $\big([X = i]\big)_{i \in \mathcal{H}}$ est un système complet d'événements.
    (cela a déjà donné lieu à une remarque)
  - × l'espérance de X peut s'écrire sous la forme :
    $$\mathbb{E}(X) = \sum_{i \in \mathcal{H}} i\ \mathbb{P}\big([X = i]\big)$$
    (on le démontre en reprenant les arguments utilisés dans la rédaction de la question)
- Même si ce n'est pas utile, on peut donner une formule explicite pour $Z_n(\Omega)$. Cet ensemble image dépend de la situation de n par rapport à r :
  - × si on considère plus de r tirages (c'est-à-dire si $n \geqslant r$), alors Z_n peut prendre toutes les valeurs de l'ensemble $[\![0, r]\!]$.
  - × si on considère strictement moins de r tirages (c'est-à-dire si $n < r$), alors Z_n peut prendre toutes les valeurs de l'ensemble $[\![0, n]\!]$.

  Finalement : $Z_n(\Omega) = [\![0, \min(n, r)]\!]$.

□

c) En utilisant l'égalité $(*)$, établir, pour tout réel x et pour tout entier naturel n non nul, la relation suivante :

$$10\, Q_n(x) \ = \ (10 - r + rx)\ Q_{n-1}(x) + x\,(1 - x)\ Q_{n-1}'(x) \qquad (**)$$

Démonstration.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$\begin{array}{rcll}
10\ Q_n(X) & = & 10 \sum\limits_{k=0}^{n} p_{n,k}\ X^k & \textit{(par définition de } Q_n\textit{)} \\
& = & \sum\limits_{k=0}^{n} (10\, p_{n,k})\ X^k & \\
& = & \sum\limits_{k=0}^{n} \big((10-r+k)\ p_{n-1,k} + (r+1-k)\ p_{n-1,k-1}\big)\ X^k & \textit{(d'après } \textbf{\textit{6}}\textit{)} \\
& = & \sum\limits_{k=0}^{n} (10-r)\ p_{n-1,k}\ X^k \ + \ \sum\limits_{k=0}^{n} k\, p_{n-1,k}\ X^k & \textit{(par linéarité de la somme)} \\
& + & \sum\limits_{k=0}^{n} r\, p_{n-1,k-1}\ X^k \ - \ \sum\limits_{k=0}^{n} (k-1)\, p_{n-1,k-1}\ X^k & \\
& = & \sum\limits_{k=0}^{n-1} (10-r)\ p_{n-1,k}\ X^k \ + \ \sum\limits_{k=0}^{n-1} k\, p_{n-1,k}\ X^k & \textit{(car } p_{n-1,n} = 0\textit{)} \\
& + & \sum\limits_{k=1}^{n} r\, p_{n-1,k-1}\ X^k \ - \ \sum\limits_{k=1}^{n} (k-1)\, p_{n-1,k-1}\ X^k & \textit{(car } p_{n-1,-1} = 0\textit{)} \\
& = & (10-r) \sum\limits_{k=0}^{n-1} p_{n-1,k}\ X^k \ + \ \left(\sum\limits_{k=0}^{n-1} k\, p_{n-1,k}\ X^{k-1}\right)\ X & \\
& + & r \sum\limits_{k=1}^{n} p_{n-1,k-1}\ X^k \ - \ \sum\limits_{k=1}^{n} (k-1)\, p_{n-1,k-1}\ X^k & \\
& = & (10-r)\ Q_{n-1}(X) \ + \ X\ Q'_{n-1}(X) & \textit{(par définition de } Q_{n-1}\textit{)} \\
& + & r \sum\limits_{j=0}^{n-1} p_{n-1,j}\ X^{j+1} \ - \ \sum\limits_{j=0}^{n-1} j\, p_{n-1,j}\ X^{j+1} & \textit{(par le décalage d'indice } j = k-1\textit{)} \\
& = & (10-r)\ Q_{n-1}(X) \ + \ X\ Q'_{n-1}(X) & \\
& + & r \left(\sum\limits_{j=0}^{n-1} p_{n-1,j}\ X^{j}\right)\ X \ - \ \left(\sum\limits_{j=0}^{n-1} j\, p_{n-1,j}\ X^{j-1}\right)\ X^2 & \textit{(par le décalage d'indice } j = k-1\textit{)} \\
& = & (10-r)\ Q_{n-1}(X) \ + \ X\, Q'_{n-1}(X) \ + \ r\, X\, Q_{n-1}(X) \ - \ X^2\ Q'_{n-1}(X) &
\end{array}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } 10\ Q_n(X) = (10 - r + r\, X)\ Q_{n-1}(X) + X\ (1-X)\ Q'_{n-1}\ (X).}$$

□

d) En dérivant membre à membre l'égalité $(**)$, former, pour tout entier naturel n non nul, une relation entre les espérances $\mathbb{E}(Z_n)$ et $\mathbb{E}(Z_{n-1})$.
En déduire, pour tout entier naturel n, la valeur de $\mathbb{E}(Z_n)$ en fonction de n et de r.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- En dérivant formellement l'égalité $(**)$, on obtient :

$$\begin{array}{rcl}
10 Q'_n(X) & = & (10 - r + r\, X)\ Q'_{n-1}(X) + r\, Q_{n-1}(X) + X(1-X) Q''_{n-1}(X) + (1-2X)\ Q'_{n-1}(X) \\
& = & r\, Q_{n-1}(X) + \big(11 - r + (r-2)\ X\big)\ Q'_{n-1}(X) + X(1-X)\ Q''_{n-1}(X)
\end{array}$$

- On évalue l'égalité polynomiale précédente en 1, on obtient :

$$\begin{aligned} 10\ Q_n'(1) &= r\,Q_{n-1}(1) + (11 - r + r - 2)\ Q_{n-1}'(1) + 1\,(1-1)\ Q_{n-1}''(1) \\ &= r + 9\ Q_{n-1}'(1) \end{aligned}$$

- Et ainsi, d'après la question ***3.b)*** :

$$10\ \mathbb{E}(Z_n) = 9\ \mathbb{E}(Z_{n-1}) + r$$

$$\boxed{\mathbb{E}(Z_n) = \frac{9}{10}\ \mathbb{E}(Z_{n-1}) + \frac{r}{10}}$$

- Notons $u_n = \mathbb{E}(Z_n)$. On constate que la suite $(\mathbb{E}(Z_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmético-géométrique.
  - × L'équation de point fixe associée à la suite (u_n) est :

  $$x = \frac{9}{10}\,x + \frac{r}{10}$$

  Elle admet pour unique solution : $\lambda = r$.

  - × On écrit :

  $$\begin{array}{lrclllll} & u_{n+1} & = & \dfrac{9}{10} & \times & u_n & + \dfrac{r}{10} & (L_1) \\ & \lambda & = & \dfrac{9}{10} & \times & \lambda & + \dfrac{r}{10} & (L_2) \\ \text{et donc} & u_{n+1} - \lambda & = & \dfrac{9}{10} & \times & (u_n - \lambda) & & (L_1)-(L_2) \end{array}$$

  Notons alors (v_n) la suite de terme général $v_n = u_n - \lambda$.

  - × La suite (v_n) est géométrique de raison $\dfrac{9}{10}$.
  Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

  $$v_n = \left(\frac{9}{10}\right)^n \times v_0 = \left(\frac{9}{10}\right)^n \times (u_0 - \lambda) = \left(\frac{9}{10}\right)^n \times (\mathbb{E}(Z_0) - r) = -\left(\frac{9}{10}\right)^n r$$

  car $Z_0 = 0$ par définition. On a donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

  $$u_n = v_n + \lambda = -\left(\frac{9}{10}\right)^n r + r = r\ \left(1 - \left(\frac{9}{10}\right)^n\right)$$

  $$\boxed{\mathbb{E}(Z_n) = r\ \left(1 - \left(\frac{9}{10}\right)^n\right)}$$

□

8. a) Pour tout entier naturel n, le polynôme Q_n'' désigne la dérivée du polynôme Q_n'.
En utilisant une méthode semblable à celle de la question précédente, trouver pour tout entier naturel n non nul, une relation entre $Q_n''(1)$ et $Q_{n-1}''(1)$.

En déduire, pour tout entier naturel n non nul, l'égalité suivante :

$$Q_n''(1) = r(r-1)\ \left(1 + \left(\frac{8}{10}\right)^n - 2\left(\frac{9}{10}\right)^n\right)$$

Démonstration.

- On dérive formellement deux fois l'égalité $(**)$.

$$\begin{aligned}10\, Q_n''(X) &= r\, Q_{n-1}'(X) + (r-2)\, Q_{n-1}'(X) + (11 - r + (r-2)\,X)\; Q_{n-1}''(X) \\ &+ (1-2X)\; Q_{n-1}''(X) + X(1-X)\; Q_{n-1}^{(3)}(X) \\ &= 2\,(r-1)\; Q_{n-1}'(X) + (12 - r + (r-4)X)\; Q_{n-1}''(X) + X(1-X)\; Q_{n-1}^{(3)}(X)\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{En évaluant en 1, on obtient : } 10\, Q_n''(1) = 2\,(r-1)\; Q_{n-1}'(1) + 8\, Q_{n-1}''(1).}$$

- Démontrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathcal{P}(n)$ où $\mathcal{P}(n) : Q_n''(1) = r(r-1)\left(1 + \left(\frac{8}{10}\right)^n - 2\left(\frac{9}{10}\right)^n\right)$.

  ▶ **Initialisation :**

  × D'une part : $Q_1(X) = \sum\limits_{k=0}^{1} p_{1,k}\ X^k = p_{1,0} + p_{1,1}\ X$.
  Donc $Q_1''(X) = 0$, d'où $Q_1''(1) = 0$.

  × D'autre part : $r(r-1)\ \left(1 + \left(\frac{8}{10}\right)^1 - 2\left(\frac{9}{10}\right)^1\right) = 0$.

  D'où $\mathcal{P}(1)$.

  ▶ **Hérédité :** soit $n \in \mathbb{N}^*$.
  Supposons $\mathcal{P}(n)$ et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$ $\left(\text{ } i.e.\ Q_{n+1}''(1) = r(r-1)(1+(\frac{8}{10})^{n+1} - 2\ (\frac{9}{10})^{n+1})\right)$.

$$\begin{aligned}10\, Q_{n+1}''(1) &= 2\ (r-1)\, Q_n'(1) + 8\ Q_n''(1) \\ &= 2\ (r-1)r\left(1 - \left(\frac{9}{10}\right)^n\right) + 8\ Q_n''(X) && \textit{(d'après la question \textbf{3.d)})} \\ &= 2\ (r-1)r\left(1 - \left(\frac{9}{10}\right)^n\right) + 8\ r(r-1)\left(1 + \left(\frac{8}{10}\right)^n - 2\left(\frac{9}{10}\right)^n\right) && \textit{(par hypothèse de récurrence)} \\ &= r(r-1)\left(2 - 2\left(\frac{9}{10}\right)^n + 8 + 8\left(\frac{8}{10}\right)^n\right) \\ &= r(r-1)\left(10 + \frac{8^{n+1}}{10^n} - 2\ \frac{9^{n+1}}{10^n}\right)\end{aligned}$$

  Ainsi : $Q_{n+1}''(1) = r(r-1)\left(1 + (\frac{8}{10})^{n+1} - 2\left(\frac{9}{10}\right)^{n+1}\right)$.

  D'où $\mathcal{P}(n+1)$.

$$\boxed{\text{Ainsi, par principe de récurrence : } \forall n \in \mathbb{N}^*,\ Q_n''(1) = r(r-1)(1 + (\frac{8}{10})^n - 2\left(\frac{9}{10}\right)^n).}$$ □

b) Calculer, pour tout entier naturel n, la variance de la variable aléatoire Z_n en fonction de n et de r.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}$.

- En dérivant $Q_n'(X) = \sum\limits_{k=0}^{n} k\, p_{n,k} X^{k-1}$, on obtient : $Q_n''(X) = \sum\limits_{k=0}^{n} k\,(k-1) p_{n,k} X^{k-2}$.

- On en déduit :

$$Q_n''(1) = \sum_{k=0}^{n} k\,(k-1)p_{n,k} = \sum_{k=0}^{n} k^{\,2}\,p_{n,k} - \sum_{k=0}^{n} kp_{n,k} = \mathbb{E}(Z_n^2) - \mathbb{E}(Z_n)$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } \mathbb{E}(Z_n^2) = Q_n''(1) + \mathbb{E}(Z_n).}$$

- D'après la formule de Kœnig-Huygens :

$$\mathbb{V}(Z_n) = \mathbb{E}(Z_n^2) - \big(\mathbb{E}(Z_n)\big)^2$$

On en déduit :

$$\begin{aligned}
& \mathbb{V}(Z_n) \\
= \;& Q_n''(1) + \mathbb{E}(Z_n) - (\mathbb{E}(Z_n))^2 \\
= \;& Q_n''(1) + Q_n'(1) - (Q_n'(1))^2 \\
= \;& r(r-1)\left(1 + \left(\frac{8}{10}\right)^n - 2\,\left(\frac{9}{10}\right)^n\right) + r\left(1 - \left(\frac{9}{10}\right)^n\right) - \left(r(1 - \left(\frac{9}{10}\right)^n)\right)^2 \quad \textit{(d'après les questions } \textbf{\textit{3.d)}} \textit{ et } \textbf{\textit{4.a)}}\textit{)} \\
= \;& r(r-1)\left(\frac{8}{10}\right)^n + r\left(\frac{9}{10}\right)^n - r^2\left(\frac{81}{100}\right)^n
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{V}(Z_n) = r(r-1)\left(\frac{8}{10}\right)^n + r\left(\frac{9}{10}\right)^n - r^2\left(\frac{81}{100}\right)^n}$$

□