

# Colles de Mathématiques en E2A

## Systèmes différentiels linéaires, var à densité

### Semaine 15 : 6-10 janvier

Toutes les définitions et tous les énoncés de théorèmes/propositions du cours sont exigibles des élèves. Les démonstrations des théorèmes du cours ne sont pas exigibles, sauf si elles apparaissent en question de cours.

On pourra à tout moment demander à un·e élève de donner la nature (réel, suite, fonction, ensemble, proposition, etc) d'une expression manipulée dans un exercice, pour vérifier sa bonne compréhension. On pourra aussi demander de préciser quelles sont les variables libres et quelles sont les variables liées (muettes).

On portera une attention toute particulière à ce que les objets soient correctement introduits avant d'être utilisés, et ne soient pas introduits pour rien.

## 1 Chapitre XIII : Systèmes différentiels linéaires

### 1.1 Définitions

- Equation différentielle linéaire à coefficients constants d'ordre 1 et d'ordre 2.
- Notion d'équation homogène et d'équation avec second membre.
- Problème de Cauchy pour une équation différentielle linéaire d'ordre 1 ou 2.
- Système différentiel linéaire à coefficients constants. Point de vue matriciel.
- Notion de point d'équilibre (ou d'état d'équilibre ou de solution stationnaire).
- Trajectoire d'un système différentiel. Notion de trajectoire convergente / divergente.

### 1.2 Résultats

- Principe de superposition.
- Ensemble des solutions d'une équation différentielle linéaire homogène ou avec second membre d'ordre 1 ou 2 à coefficients constants.
- Existence et unicité d'une solution à un problème de Cauchy pour une équation différentielle linéaire homogène ou avec second membre d'ordre 1 ou 2 à coefficients constants.
- Ensemble des solutions du système différentiel linéaire  $X' = AX$  lorsque  $A$  est diagonalisable.
- Existence et unicité d'une solution au problème de Cauchy pour un système différentiel linéaire de la forme  $X' = AX$  lorsque  $A$  est diagonalisable.
- Lien entre système différentiel linéaire et équation différentielle linéaire d'ordre 2. Traduction du problème de Cauchy dans ce cas.

### 1.3 Méthodes

- Résolution des équations différentielles d'ordre 1 et d'ordre 2. Recherche d'une solution particulière lorsqu'il y a un second membre. (La recherche d'une solution particulière doit être accompagnée pour les équations différentielles d'ordre 2)

- Pour montrer que la trajectoire  $\{(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)) \in \mathbb{R}^n \mid t \in \mathbb{R}\}$  est divergente, il suffit de trouver une coordonnée  $x_i$  qui vérifie  $\lim_{t \rightarrow +\infty} x_i(t) = +\infty$  ou  $\lim_{t \rightarrow +\infty} x_i(t) = -\infty$ .
- Résolution des systèmes différentiels linéaires diagonaux par résolutions indépendantes de toutes les équations différentielles homogènes d'ordre 1. Différenciation des constantes pour chacune des équations différentielles.
- Résolution des systèmes différentiels linéaires triangulaires supérieurs (ou inférieurs) par remontées successives. Gestion des constantes  $C_3, C_2$  et  $C_1$  en cascade (pour un système  $3 \times 3$ ).
- Pour déterminer les solutions du système différentiel  $X' = AX$  dans le cas où  $A$  est diagonalisable, il faut déterminer le spectre de  $A$  puis une base de chacun de ses sous-espaces propres. C'est le même travail à faire que pour diagonaliser  $A$ . On peut ensuite utiliser la formule du cours.
- Résoudre un problème de Cauchy revient en pratique à déterminer les coordonnées d'un vecteur dans une base. On est ainsi ramené à résoudre un système linéaire avec second membre.
- Pour résoudre le système différentiel  $X' = AX$ , on sera souvent amené à faire un changement de variable en posant  $Y = P^{-1}X$  où  $P$  est une matrice inversible. En posant  $T = P^{-1}AP$ , il faut savoir démontrer :

$$X' = AX \iff Y' = TY$$

Il faut ensuite savoir résoudre le système différentiel  $Y' = TY$  pour en déduire les solutions de  $X' = AX$  en se souvenant que  $X = PY$ . Le calcul de  $P^{-1}$  est inutile et il ne faut donc pas le faire si il n'est pas demandé.

## 2 Chapitre XIV : v.a.r. à densité

**Seulement en question de cours cette semaine.**

Il y a un gros effort à fournir sur ce chapitre pour réussir à manipuler les fonctions définies par morceaux :

- Savoir calculer leurs intégrales.
- Savoir trouver des formules quand on les compose avec d'autres fonctions (utile pour calculer des fonctions de répartition de transformée de v.a.r. ).

Formulaire des lois usuelles à connaître par coeur pour les lois uniformes et exponentielles.

*(on ajoutera les lois normales plus tard)*

### 2.1 Définitions

- Fonction de répartition d'une v.a.r. (rappel).
- Trois définitions différentes à ne pas confondre :
  1.  $X$  est une v.a.r. à densité.
  2.  $f$  est une densité de  $X$ , où  $X$  est une v.a.r. à densité.
  3.  $f$  est une densité de probabilité.

### 2.2 Résultats

- Si  $X$  est à densité, alors :  $\forall x \in \mathbb{R}, \mathbb{P}([X = x]) = 0$ .
- Calcul de probabilités à l'aide d'une fonction de répartition pour une v.a.r. à densité :

$$\begin{aligned} F_X(b) - F_X(a) &= \mathbb{P}([a < X \leq b]) \\ &= \mathbb{P}([a \leq X < b]) \\ &= \mathbb{P}([a \leq X \leq b]) \\ &= \mathbb{P}([a < X < b]) \end{aligned}$$

- Formule fondamentale (calcul de la fonction de répartition à l'aide d'une densité) :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_X(x) = \mathbb{P}([X \leq x]) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$$

et ses conséquences (autres formules du théorème).

- La transformée affine d'une v.a.r. à densité est une v.a.r. à densité (à savoir redémontrer).
- La transformée affine d'une v.a.r. qui suit une loi uniforme est encore une v.a.r. qui suit une loi uniforme (à savoir redémontrer).

## 2.3 Méthodes

On renvoie aux détails du cours pour la marche à suivre. Il faut maîtriser les méthodes suivantes (et les schémas de rédaction qui vont avec) :

1. Montrer qu'une v.a.r.  $X$  est une v.a.r. à densité via sa fonction de répartition (très important).
2. Déterminer une densité à partir de la fonction de répartition (très important).
3. Déterminer la fonction de répartition à partir d'une densité (très important).
4. Démontrer qu'une fonction  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est une densité de probabilité (très important).
5. Montrer qu'une fonction  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction de répartition (peu important, à ne travailler que quand tout le reste est compris et maîtrisé).

De nombreux exercices font travailler sur des transformées de v.a.r. à densité. Il faut maîtriser les techniques vues en cours dans les exemples suivants :

1. Transformation affine :  $Y = aX + b$  avec  $a \neq 0$ .
2. Transformation au carré :  $Y = X^2$ .
3. Transformation exponentielle :  $Y = e^X$ .
4. Transformation usuelle :  $Y = -\frac{1}{\lambda} \ln(1 - U)$  avec  $U \hookrightarrow \mathcal{U}([0, 1[)$  et  $\lambda > 0$ .

## 3 Questions de cours

1. Soit  $X$  une v.a.r. de fonction de répartition

$$F_X : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x^2 & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Montrer que  $X$  est une v.a.r. à densité puis déterminer une densité de  $X$ .

2. On considère une v.a.r. à densité  $X$ , dont une densité est

$$f : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 3x^2 & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Déterminer  $X(\Omega)$  et la fonction de répartition de  $X$ .

3. Soit  $\alpha \in \mathbb{R}$  et soit  $f : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \alpha e^{2x} & \text{si } 0 \leq x \leq 1. \\ 0 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

Déterminer  $\alpha$  pour que  $f$  soit une densité de probabilité.

4. Soit  $X \hookrightarrow \mathcal{U}([0, 1[)$  et  $\lambda > 0$ . Quelle est la loi de  $Y = -\frac{1}{\lambda} \ln(1 - X)$  ?
5. Soit  $X$  une v.a.r. telle que  $X \hookrightarrow \mathcal{U}([1, 2])$ . On note  $Y = -3X + 2$ .  
Déterminer la fonction de répartition  $F_Y$  de  $Y$  puis reconnaître la loi de  $Y$ .