Exercices de cours

Exercice 1 : *(d'après EDHEC 2016)* Pour chaque entier n on définit la fonction f_n par :

$$\forall x \in [n, +\infty[, \; f_n(x) = \int_n^x e^{\sqrt{t}} \, dt$$

1. Montrer que f_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[n, +\infty[$ puis déterminer $f_n'(x)$ pour tout x de $[n, +\infty[$.
2. En déduire le sens de variation de f_n.

Exercice 2 : On considère la fonction $g : x \mapsto \displaystyle\int_{-\sqrt{x}}^{x^2} \frac{\ln(1+t^2)}{e^t} \, dt$. Montrer que g est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et calculer sa dérivée.

Exercice 3 : Etudier la nature des intégrales suivantes.

1. $\displaystyle\int_1^{+\infty} t \, dt$
2. $\displaystyle\int_0^{+\infty} 1 \, dt$
3. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t} \, dt$
4. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t\sqrt{t}} \, dt$
5. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} \, dt$
6. $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t} \, dt$

Exercice 4 : (Hors-programme) Etudier la nature des intégrales suivantes.

1. $\displaystyle\int_0^{2} \frac{1}{t-2} \, dt$
2. $\displaystyle\int_0^{1} \ln(t) \, dt$

Exercice 5 : Etudier la nature des intégrales suivantes.

1. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t} \, dt$
2. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|t|} \, dt$

Exercice 6 : Calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^t}{(1+e^t)^2} \, dt$.

Exercice 7 : (Calcul de la primitive de ln s'annulant en 1) Soit $x > 0$. Calculer $\displaystyle\int_1^{x} \ln(t) \, dt$.

Exercice 8 : Calculer les intégrales suivantes.

1. $\displaystyle\int_1^{2} \ln(t) \, dt$
2. $\displaystyle\int_1^{2} t^2 \ln(t) \, dt$
3. $\displaystyle\int_1^{2} t^k \ln(t) \, dt$
4. $\displaystyle\int_1^{2} (\ln(t))^2 \, dt$
5. $\displaystyle\int_1^{2} \frac{t\ln(t)}{(t^2+1)^2} \, dt$
6. $\displaystyle\int_0^{1} t^3 e^{t^2} \, dt$

Exercice 9 : Calcul de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{\frac{1}{t}}}{t^3} \, dt$.

Exercice 10 : Soit $\alpha > 0$. Calculer les intégrales suivantes.

1. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \alpha \mathrm{e}^{-\alpha t}\, \mathrm{d}t$
2. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \alpha t \mathrm{e}^{-\alpha t}\, \mathrm{d}t$
3. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \alpha t^2 \mathrm{e}^{-\alpha t}\, \mathrm{d}t$

Exercice 11 : Calculer les intégrales suivantes :

1. $\displaystyle I_1 = \int_1^2 \frac{dt}{\mathrm{e}^t + 1}$ à l'aide du changement de variable $\boxed{u = \mathrm{e}^t}$
2. $\displaystyle I_2 = \int_1^2 \frac{dt}{t + 2\sqrt{t}}$ à l'aide du changement de variable $\boxed{u = \sqrt{t}}$
3. $\displaystyle I_3 = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1 + \mathrm{e}^t}}\, \mathrm{d}t$ à l'aide du changement de variable $\boxed{u = \sqrt{1 + \mathrm{e}^t}}$
4. $\displaystyle I_4 = \int_0^1 \frac{du}{1 + \sqrt{u}}$ à l'aide du changement de variable $\boxed{v = \sqrt{u}}$
5. $\displaystyle I_5 = \int_1^2 \frac{\ln(u)\, du}{u + u(\ln(u))^2}$ à l'aide du changement de variable $\boxed{v = \ln(u)}$

Exercice 12 : On pose $\displaystyle I = \int_0^3 \frac{t}{\sqrt{2\,t + 3}}\, \mathrm{d}t$. Montrer que $\displaystyle I = \frac{1}{4} \int_3^9 \frac{u - 3}{\sqrt{u}}\, du$ et en déduire la valeur de I.

Exercice 13 : Calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{\mathrm{e}^t + 1}$ à l'aide du changement de variable $\boxed{u = \mathrm{e}^t}$.

Exercice 14 : Soit $\alpha > 0$. Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \alpha \mathrm{e}^{-\alpha t}\, \mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\, \mathrm{d}t$ à l'aide d'un changement de variable.

Exercice 15 : Calculer $\displaystyle\int_{-2}^2 t^4\, \mathrm{d}t$.

Exercice 16 : Etudier la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t\, \mathrm{d}t$.

Exercice 17 : Etudier la nature des intégrales suivantes.

1. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\, \mathrm{d}t$
2. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}}\, \mathrm{d}t$
3. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{(2t + 1)^3}\, \mathrm{d}t$?

Exercice 18 : Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose $\displaystyle I_n = \int_0^1 x^n\, \mathrm{e}^{-x}\, \mathrm{d}x$.

1. Montrer que pour tout n, on a : $\displaystyle 0 \leqslant I_n \leqslant \frac{1}{n + 1}$.
2. En déduire la limite de la suite (I_n).

Exercice 19 : Donner la nature des intégrales impropres suivantes.

1. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t^2}\, \mathrm{d}t$
2. $\displaystyle\int_{\mathrm{e}}^{+\infty} \frac{\ln(t)}{\sqrt{t}}\, \mathrm{d}t$
3. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{\mathrm{e}^t + \ln(t)}$

Exercice 20 : Donner la nature des intégrales impropres suivantes.

1. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\ \mathrm{d}t$
2. $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{\ln(t)}\ \mathrm{d}t$

Exercice 21 : Donner la nature des intégrales impropres suivantes.

1. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{t}}}{t^{10}}\ \mathrm{d}t$
2. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{4t^2+2t-1}\ \mathrm{d}t$
3. $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} \frac{1-2t+3t^2}{4-3t+t^2-5t^3}\ \mathrm{d}t$

Exercice 22 : On considère une fonction f de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et vérifiant :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \left|f''(x)\right| \leq 2$$

Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.

1. Montrer que :
$$bf'(a) - (f(a+b) - f(a)) = \int_0^1 b(f'(a) - f'(a+tb))\ \mathrm{d}t$$
2. En déduire que :
$$\left|bf'(a) - (f(a+b) - f(a))\right| \leq b^2$$

Exercice 23 : *(d'après EDHEC 2003)*

On note f la fonction définie, pour tout $x > 0$, par : $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{x^2}$.

1. (a) Pour tout $n \geqslant 1$, on pose $I_n = \displaystyle\int_n^{+\infty} f(x)\ \mathrm{d}x$. Montrer que l'intégrale I_n est convergente et exprimer I_n en fonction de n.
   (b) En déduire que $I_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$.
2. Montrer que la série de terme général $u_n = f(n)$ est convergente.
3. (a) Établir que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $f(k+1) \leqslant \displaystyle\int_k^{k+1} f(x)\,dx \leq f(k)$.
   (b) En sommant soigneusement cette dernière inégalité, montrer que :
   $$\forall n \in \mathbb{N}^*,\quad \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \leq I_n \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k + \frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}}{n^2}$$
   (c) Déduire des questions précédentes un équivalent simple, lorsque n est au voisinage de $+\infty$, de $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{k}}}{k^2}$.

Techniques de calcul d'intégrales

Exercice 24 : Calculer les intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_0^2 t\,\mathrm{e}^{2t}\ \mathrm{d}t$
2. $\displaystyle\int_1^e \ln(x)\ \mathrm{d}x$
3. $\displaystyle\int_2^4 \frac{1}{1-x^2}\ \mathrm{d}x$
4. $\displaystyle\int_1^4 \sqrt{x}\,\ln(x)\ \mathrm{d}x$
5. $\displaystyle\int_0^1 \frac{t}{2t+1}\ \mathrm{d}t$
6. $\displaystyle\int_0^1 x\sqrt{3x+1}\ \mathrm{d}x$

Exercice 25 : *(d'après* `ECRICOME 1998`*)*
Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $g(x) = \ln\left(\frac{x}{x+1}\right) - \frac{\ln(1+x)}{x}$. A l'aide du changement de variables $u = \mathrm{e}^t$, montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}^+$:

$$\int_0^x \mathrm{e}^{-t}\ln(1+\mathrm{e}^t)\ \mathrm{d}t = g\left(\mathrm{e}^x\right) + 2\ln 2$$

Exercice 26 : Déterminer la nature des intégrales suivantes, et donner leur valeur en cas de convergence.

1. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-\sqrt{t}}}{\sqrt{t}}\ \mathrm{d}t$
2. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x^2}\ \mathrm{d}x$
3. $\displaystyle I = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x)^2}\ \mathrm{d}x$ puis $\displaystyle J = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2(1+|x|)^2}\ \mathrm{d}x$.

Intégrale fonction de ses bornes

Exercice 27 : On considère la fonction $f : x \mapsto \displaystyle\int_{\frac{1}{x}}^{x} \frac{\ln(t)}{1+t^2}\ \mathrm{d}t$.

1. (a) Démontrer que f est définie sur $]0,+\infty[$.
   (b) Démontrer que f est dérivable sur $]0,+\infty[$ et calculer f'.
   (c) En déduire, pour tout $x \in\ ]0,+\infty[$, une expression simple de $f(x)$.
2. Retrouver ce résultat en posant le changement de variable $u = \frac{1}{t}$.

Exercice 28 : On considère la fonction H définie sur $\mathbb{R}_+$ par $H(x) = \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{1+t}\ \mathrm{d}t$.

1. Montrer que H est bien définie sur $\mathbb{R}_+$.
2. Montrer que H est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$, et calculer $H'(x)$, pour tout $x \geqslant 0$.
3. Montrer que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} xH(x) = 0$.
4. Montrer que l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} H(t)\ \mathrm{d}t$ est convergente et calculer sa valeur en fonction de $H(0)$.

Relation de récurrence entre intégrales

Exercice 29 : *(d'après* `ECRICOME 2005`*)* On considère, pour tout entier naturel n, l'application φ_n définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \varphi_n(x) = (1-x)^n\,\mathrm{e}^{-2x}$$

ainsi que l'intégrale :

$$I_n = \int_0^1 \varphi_n(x)\ \mathrm{d}x$$

On se propose de démontrer l'existence de trois réels, a, b, c tels que :

$$I_n = a + \frac{b}{n} + \frac{c}{n^2} + \frac{1}{n^2}\varepsilon(n) \qquad \text{avec} \qquad \lim_{n\to+\infty}\varepsilon(n) = 0$$

1. Calculer I_0, I_1.
2. Etudier la monotonie de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
3. Déterminer le signe de I_n pour tout entier naturel n.
4. Qu'en déduit-on pour la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

5. Majorer la fonction $g : x \mapsto \mathrm{e}^{-2x}$ sur $[0,1]$.
6. En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant I_n \leqslant \frac{1}{n+1}$$

7. Déterminer la limite de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lorsque n tend vers l'infini.
8. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ 2I_{n+1} = 1 - (n+1)\, I_n$$

9. En déduire la limite de la suite $(nI_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lorsque n tend vers l'infini.
10. Déterminer la limite de la suite $(n(nI_n - 1))_{n\in\mathbb{N}}$ lorsque n tend vers l'infini.
11. Donner alors les valeurs de a, b, c.

Exercice 30 : Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. On définit pour tout entier naturel n, l'intégrale $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} x^n \mathrm{e}^{-ax}\, \mathrm{d}x$.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, justifier l'existence de l'intégrale I_n.
2. Calculer I_0 puis I_1 *(on pourra penser à une intégration par parties)*.
3. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ aI_n = nI_{n-1}$.
4. Démontrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N},\ I_n = \dfrac{n!}{a^{n+1}}$.

Exercice 31 : Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $I_n = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^n}$ et $u_n = \sqrt{n}\, I_n$. On admet que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\, \mathrm{d}x = \sqrt{2\pi}$.

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, I_n est convergente. Établir une relation de récurrence entre I_n et I_{n+1}.
2. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est monotone et étudier sa convergence.
3. Calculer, pour tout $n \geqslant 1$, la valeur de I_n.
4. (a) Montrer que, pour tout réel x : $\ln(1+x^2) \leqslant x^2$. En déduire que, pour tout $n \geqslant 1$: $I_n \geqslant \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-nx^2}\, \mathrm{d}x$.
   (b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-nx^2}\, \mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{n}}$.
   (c) En déduire une minoration de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et conclure que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ne tend pas vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$.
5. Montrer qu'il existe un réel α tel que $\dbinom{2n}{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\alpha\, 4^n}{\sqrt{n}}$.

Suites d'intégrales

Exercice 32 : On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \displaystyle\int_0^1 x^n \ln(1+x)\, \mathrm{d}x$.

1. Calculer I_0.
2. Montrer que (I_n) est décroissante.
3. (a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in [0,1]$, $0 \leqslant x^n \ln(1+x) \leqslant x^n$.
   (b) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant I_n \leqslant \dfrac{1}{n+1}$.
   (c) Déterminer la limite de la suite (I_n).
4. (a) En effectuant une IPP, montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$I_n = \frac{\ln(2)}{n+1} - \frac{1}{n+1} \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x}\, \mathrm{d}x$$

   (b) Etudier la convergence de la suite (nI_n).

Comparaison série intégrale

Exercice 33 : On définit la fonction :

$$f:\left\{\begin{array}{ccc}[2,+\infty[& \to & \mathbb{R}\\ x & \mapsto & \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}\end{array}\right.$$

1. Démontrer que pour tout réel $x \geqslant 2$ on a : $\dfrac{1}{x} \leqslant f(x) \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{x-1}}$.
2. Pour tout entier $n \geqslant 2$, on définit l'intégrale : $I_n = \displaystyle\int_2^n f(x)\,\mathrm{d}x$.
   (a) En utilisant l'inégalité de la question 1, démontrer que :
   $$\lim_{n\to+\infty} I_n = +\infty$$
   (b) On définit la fonction :
   $$F:\left\{\begin{array}{ccc}[2,+\infty[& \to & \mathbb{R}\\ x & \mapsto & \ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)\end{array}\right.$$
   Calculer la dérivée de F. En déduire une expression de I_n en fonction de n.
   (c) Déterminer la limite de $I_n - \ln(n)$ quand n tend vers $+\infty$.
3. On définit, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2 :
   $$S_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{\sqrt{k^2-1}}$$
   (a) Pour tout k entier supérieur ou égal à trois, montrer qu'on a :
   $$\int_k^{k+1} f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{\sqrt{k^2-1}} \leq \int_{k-1}^{k} f(x)\,\mathrm{d}x$$
   (b) En déduire que : $\forall n \geqslant 3,\ I_{n+1} \leqslant S_n \leq I_n + \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.
   (c) Démontrer que : $S_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$.

Exercice 34 : Soit f la fonction définie sur $[2,+\infty[$ par : $f(t) = \dfrac{1}{t\ln^2(t)}$.

1. Quelle est la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_2^{+\infty} f(t)\,dt$?
2. Déterminer le tableau de variations de f.
3. En déduire la nature de la série $\sum \dfrac{1}{n\ln^2(n)}$.
4. Généraliser ce résultat en déterminant la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n\ln^{\beta}(n)}$ où $\beta > 1$.

Critères de comparaison (fonctions continues positives)

Exercice 35 :_(d'après_ `ESC 2002`_)_ On considère, pour $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$\forall x > 0,\ f_n(x) = \frac{n\ln x}{n+1+nx^2}$$

On définit également sur $\mathbb{R}_+^*$ la fonction h par :

$$\forall x > 0,\ h(x) = \frac{\ln x}{1+x^2}$$

Dans tout l'exercice, n désigne un entier naturel non nul fixé.

1. Montrer que f_n et h sont continues sur $\mathbb{R}_+^*$ et étudier leur signe.
2. (a) Montrer que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2}\,\mathrm{d}x$ est convergente et déterminer sa valeur.

   (b) Montrer que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_1^{+\infty} h(x)\,\mathrm{d}x$ est convergente.

Dans toute la suite de l'exo, on note K l'intégrale impropre :

$$K = \int_1^{+\infty} h(x)\,\mathrm{d}x$$

3. (a) Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 h(x)\,\mathrm{d}x$ est convergente.

   (b) En posant $u = \dfrac{1}{x}$, montrer que : $K = -\displaystyle\int_0^1 h(u)\mathrm{d}u$.

   (c) En déduire que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^{+\infty} |h(x)|\,\mathrm{d}x$ converge et est égale à $2K$.

   (d) En déduire également que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^{+\infty} h(x)\,\mathrm{d}x$ converge et vaut 0.
4. (a) Montrer que, pour tout réel x strictement positif : $|f_n(x)| \leqslant |h(x)|$.
   En déduire la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(x)\,dx$.

   (b) Montrer que, pour tout $x > 0$: $h(x) - f_n(x) = \dfrac{h(x)}{n+1+nx^2}$.

   (c) En déduire successivement : $0 \leqslant \displaystyle\int_1^{+\infty} (h(x) - f_n(x))\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{K}{n+1}$,
   et : $-\dfrac{K}{n+1} \leqslant \displaystyle\int_0^1 (h(x) - f_n(x))\,\mathrm{d}x \leqslant 0$.

   (d) Montrer que : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} f_n(x)\,dx = 0$.
5. Calculer, pour tout $x > 0$, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} f_n(x)$. A-t-on $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \lim_{n\to+\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x$?

Exercice 36 : Soit $n \in \mathbb{N}$ et $\alpha > 0$. Déterminer la nature des intégrales généralisées suivantes :

1. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t}\,\mathrm{d}t$
2. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$
3. $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^n\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$
4. $\displaystyle\int_1^{3} \frac{\mathrm{e}^{-x}}{\sqrt{x-1}}\,\mathrm{d}x$
5. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x}{1+\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}x$
6. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{x+\mathrm{e}^{-x}}\,\mathrm{d}x$
7. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t+t^n}\,\mathrm{d}t$
8. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{1+t^n}\,\mathrm{d}t$
9. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\alpha t}\left(1-\mathrm{e}^{-t}\right)^n\,\mathrm{d}t$
10. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^n\mathrm{e}^{-\alpha t}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$

Exercice 37 :

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}^*,\ f(x) = \frac{x}{\mathrm{e}^x - 1} \quad \text{et} \quad f(0) = 1.$$

   $\mathcal{C}$ désigne la courbe représentative de f dans un repère orthogonal.

   (a) Montrer que f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.

   (b) Étudier les variations de f et déterminer ses limites en $+\infty$ et $-\infty$. Tracer la courbe $\mathcal{C}$.

   (c) Montrer que pour tout $x \geqslant 0$, on a : $0 \leqslant f(x) \leqslant 1$.
2. Montrer que l'aire comprise entre la courbe $\mathcal{C}$ et ses asymptotes est finie.

3. Pour tout entier naturel n, on pose : $I_n = \int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{e}^{-nx}\,\mathrm{d}x$.
   (a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'intégrale I_n est convergente.
   (b) Montrer que pour $n \geqslant 1$, on a : $0 \leqslant I_n \leqslant \dfrac{1}{n}$. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.
   (c) Montrer que pour $n \geqslant 1$, on a : $\forall x \geqslant 0,\ f(x) = f(x)\mathrm{e}^{-nx} + \sum\limits_{k=1}^{n} x\,\mathrm{e}^{-kx}$.
   En déduire que : $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \dfrac{1}{k^2} = \int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$.
4. On pose pour tout $u > 0$, $J_u = \int_0^{+\infty} \dfrac{x}{\mathrm{e}^{ux}-1}\,\mathrm{d}x$ et $K_u = \int_0^{+\infty} \dfrac{x}{\mathrm{e}^{ux}+1}\,\mathrm{d}x$.
   (a) Montrer que, pour tout $u > 0$, les intégrales J_u et K_u sont convergentes.
   (b) Calculer, pour tout $u > 0$, J_u et K_u en fonction de J_1 et K_1.
   (c) Etablir que $J_1 - K_1 = 2J_2$.
   (d) Déduire des questions précédentes une relation simple entre J_1 et K_1, puis entre J_u et K_u.

Exercice 38 : Déterminer un équivalent de $\dfrac{x^3\mathrm{e}^x}{(1+\mathrm{e}^x)^2}$ lorsque x tend vers $+\infty$. En déduire la nature de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \dfrac{x\mathrm{e}^x}{(1+\mathrm{e}^x)^2}\,\mathrm{d}x$.

Intégrales à paramètre

Exercice 39 : On pose, quand l'intégrale converge, $f(x) = \int_1^{+\infty} \dfrac{dt}{1+t+t^{x+1}}$.

1. Montrer que le domaine de définition de f est $]0,+\infty[$.
2. Montrer que f est décroissante sur $]0,+\infty[$.
3. (a) Pour $x > 0$, justifier l'existence de $g(x) = \int_1^{+\infty} \dfrac{dt}{t(1+t^x)}$.
   (b) Pour $x > 0$ et $t \geqslant 1$, simplifier $\dfrac{1}{t} - \dfrac{t^{x-1}}{1+t^x}$, puis calculer $g(x)$.
   (c) En déduire que, pour tout $x > 0$: $0 \leqslant f(x) \leqslant \dfrac{\ln 2}{x}$. Déterminer la limite de f en $+\infty$.
4. (a) Montrer que : $\forall x > 0,\ 0 \leqslant \dfrac{\ln 2}{x} - f(x) \leqslant \dfrac{1}{2x+1}$.
   (b) En déduire la limite et un équivalent de $f(x)$ quand x tend vers 0.

Exercice 40 : Pour $x > 0$, on pose $f(x) = \int_0^1 \dfrac{t^x}{1+t}dt$.

1. Vérifier que pour $x > 0$, $f(x) + f(x+1) = \dfrac{1}{x+1}$.
2. Donner le sens de variation de f.
   (indication : pour tout $0 < a < b$, montrer que $f(b) < f(a)$)
3. En utilisant la question 1, déterminer la limite de f en $+\infty$.
4. (a) Démontrer que : $\forall x > 0,\ f(x) + f(x+1) \leqslant 2\,f(x)$.
   (b) Démontrer que : $\forall x > 0,\ f(x) + f(x+1) \geqslant 2\,f(x+1)$.
   (c) En déduire un équivalent simple de f en $+\infty$.

Exercice 41 : On considère la fonction $f : x \mapsto \int_1^{+\infty} \dfrac{t^{-x}}{1+t}\,\mathrm{d}t$

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.

2. Quel est le sens de variation de f ?
3. Soient a, b deux réels tels que $0 < a \leqslant b$, montrer que :

$$0 \leqslant f(a) - f(b) \leqslant \frac{1}{a} - \frac{1}{b}$$

   En déduire que f est continue.
4. Déterminer $f(x) + f(x+1)$ pour $x > 0$. En déduire la limite de f en 0 et en $+\infty$.

Exercice 42 : On considère la fonction $f : x \mapsto \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^x}$
1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Démontrer que f est décroissante.
3. Déterminer la limite de f en $+\infty$.

Grands classiques

Exercice 43 : *(d'après* `HEC 2002, EDHEC 2008, HEC 2018, EDHEC 2022`*)*

Pour tout couple d'entiers naturels (p, q), on pose $B(p,q) = \displaystyle\int_0^1 t^p(1-t)^q \,\mathrm{d}t$.
1. Soit $(p,q) \in \mathbb{N}^2$. Montrer que : $B(p,q) = B(q,p)$.
2. Soit $(p,q) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$. Établir la relation : $B(p,q) = \dfrac{p}{q+1}\, B(p-1, q+1)$.
3. Calculer, pour tout entier naturel n, $B(0,n)$.
4. En déduire la valeur de $B(p,q)$, pour tout couple d'entiers naturels (p,q).
5. En déduire une expression simple de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \frac{1}{p+k+1}$, pour tout $(n,p) \in \mathbb{N}^2$.

Exercice 44 : Étude de la fonction Γ

On rappelle que l'intérale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}} \,\mathrm{d}t$ est convergente et que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}} \,\mathrm{d}t = \sqrt{2\pi}$.
1. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}} \,\mathrm{d}t$ est convergente, et calculer sa valeur.
2. (a) Déterminer, pour tout réel x, la valeur de $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} t^{x+1}\mathrm{e}^{-t}$.
   (b) En déduire la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} t^{x-1}\mathrm{e}^{-t} \,\mathrm{d}t$, pour tout réel x.
   (c) (Hors programme) Déterminer les valeurs du réel x pour lesquelles l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 t^{x-1}\mathrm{e}^{-t} \,\mathrm{d}t$ est convergente.
   (d) En déduire que la fonction Gamma d'Euler

$$\Gamma : x \mapsto \int_0^{+\infty} t^{x-1}\mathrm{e}^{-t} \,\mathrm{d}t$$

   est définie sur $]0, +\infty[$.
3. (a) Calculer $\Gamma(1)$.
   (b) Etablir une relation entre $\Gamma(x)$ et $\Gamma(x+1)$, pour tout réel strictement postif x.
   En déduire la valeur de $\Gamma(n)$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
   (c) Démontrer que $\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right) = \sqrt{2}\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}} \,du.$
   En déduire que, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $\Gamma\left(\dfrac{2p+1}{2}\right) = \dfrac{(2p)!}{2^{2p}\,p!}\sqrt{\pi}$.

Ici, on déborde du programme

Exercice 45 : On pose $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{x\ln x}{1-x}\,\mathrm{d}x$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$I_n = \int_0^1 \frac{x^n \ln x}{1-x}\,\mathrm{d}x \quad \text{et} \quad J_n = \int_0^1 x^n \ln x\,\mathrm{d}x$$

1. Montrer que l'intégrale I est convergente.
2. Montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, que l'intégrale I_n est convergente.
3. Montrer que, pour tout $x \in \,]0,1[$, $-1 \leqslant \dfrac{x\ln x}{1-x} \leqslant 0$. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $-\dfrac{1}{n} \leqslant I_n \leqslant 0$, puis la limite de I_n, lorsque n tend vers $+\infty$.
4. Montrer que l'intégrale J_n est convergente pour tout $n \in \mathbb{N}$, et calculer sa valeur.
5. Calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} J_k$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ I = -\displaystyle\sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k^2} + I_{n+1}$.
6. Écrire un programme **Python** qui affiche une valeur de I à 10^{-2} près.

Exercice 46 : Soient a et b deux réels strictement positifs et $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+)$ telle que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t$ converge.

1. Montrer que, pour $\alpha > 0$, on a : $\displaystyle\int_\alpha^{+\infty} \frac{f(bx)-f(ax)}{x}\,dx = \int_{b\alpha}^{a\alpha} \frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t$.
2. En déduire que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{f(bx)-f(ax)}{x}\,dx$ existe et vaut $f(0)\ln\left(\dfrac{a}{b}\right)$.
3. Montrer l'existence $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-bx}-\mathrm{e}^{-ax}}{x}\,dx$ et donner sa valeur.
4. Déduire de la question précédente la convergence et la valeur de $\displaystyle\int_0^1 \frac{t-1}{\ln t}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 47 : On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1-x}}\,\mathrm{d}x$.

1. Montrer que I_n existe, pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Montrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.
3. (a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $I_n = \dfrac{2n}{2n+1} I_{n-1}$.
   (b) En déduire l'existence et la nature de la série de terme général $v_n = \ln(I_n) - \ln(I_{n-1})$, puis la limite de $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $J_n = \sqrt{n}\, I_n$ et $K_n = \sqrt{n+1}\, I_n$.
   (a) Montrer que les suites $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes.
   (b) En déduire qu'il existe un réel $\alpha > 0$ tel que $I_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\alpha}{\sqrt{n}}$.
5. (a) Calculer I_n en fonction de n.
   (b) On admet la formule de Stirling : $n! \underset{n\to+\infty}{\sim} n^n \mathrm{e}^{-n}\sqrt{2\pi n}$. Montrer que : $I_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \mathrm{e}\left(\dfrac{2n}{2n+1}\right)^{2n+1} \dfrac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{n}}$.
   (c) Déterminer la valeur de α.

Exercice 48 : Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose : $J_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-u} u^n \mathrm{d}u$ et $I_n = \displaystyle\int_0^1 (t\,\ln(t))^n\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que J_0 est convergente, et calculer sa valeur.
2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'intégrale J_n existe. À l'aide d'une relation de récurrence entre J_n et J_{n+1}, déterminer la valeur de J_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'intégrale I_n est convergente.
4. Soit $x \in \,]0,1[$. En posant $u = -(n+1)\ln(t)$, calculer $\displaystyle\int_x^1 (t\ln(t))^n\,\mathrm{d}t$.
5. En déduire la valeur de $I_n = \displaystyle\int_0^1 (t\ln(t))^n\,\mathrm{d}t$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.