Table des matières

1 Deux inégalités probabilistes **2**

1.1 L'inégalité de Markov . . . 2

1.2 L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev . . . 5

2 La loi faible des grands nombres (LfGN) **7**

3 Convergence en loi d'une suite de v.a.r. **8**

3.1 Limite simple d'une suite de fonctions (Hors-programme) . . . 8

3.2 Convergence en loi . . . 10

3.3 Cas particuliers . . . 10

3.4 Illustration sur des exemples . . . 10

3.4.1 Cas d'une suite de v.a.r. discrètes convergeant en loi vers une v.a.r. discrète . . . 10

3.4.2 Cas d'une suite de v.a.r. à densité convergeant en loi vers une v.a.r. discrète . . . 12

3.4.3 Cas d'une suite de v.a.r. discrètes convergeant en loi vers une v.a.r. à densité . . . 12

3.4.4 Cas d'une suite de v.a.r. à densité convergeant en loi vers une v.a.r. à densité . . . 12

4 Approximation de v.a.r. par le TCL **12**

4.1 Théorème central limite . . . 12

4.2 Idée générale de l'approximation de lois par TCL . . . 13

4.3 Illustration sur des exemples . . . 14

4.3.1 Approximation d'une loi binomiale par une loi normale . . . 14

4.3.2 Approximation d'une loi de Poisson par une loi normale . . . 15

1 Deux inégalités probabilistes

1.1 L'inégalité de Markov

Théoreme 1 (Inégalité de Markov)**.** *Soit X une v.a.r. telle que*

1. *X admet une espérance*
2. *X est à valeurs positives,* i.e. $X(\Omega) \subset [0, +\infty[$

Alors,

$$\boxed{\forall a > 0,\ \mathbb{P}([X \geqslant a]) \ \leqslant\ \frac{\mathbb{E}(X)}{a}}$$

Preuve dans le cas discret. Si X est discrète, on peut écrire :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X) &= \sum_{x \in X(\Omega)} x\mathbb{P}([X = x]) \\
&= \sum_{\substack{x \in X(\Omega) \\ x \geqslant a}} x\mathbb{P}([X = x]) + \sum_{\substack{x \in X(\Omega) \\ x < a}} x\mathbb{P}([X = x]) \\
&\geqslant \sum_{\substack{x \in X(\Omega) \\ x \geqslant a}} x\mathbb{P}([X = x]) \\
&\geqslant a \sum_{\substack{x \in X(\Omega) \\ x \geqslant a}} \mathbb{P}([X = x]) \\
&\geqslant a\mathbb{P}([X \geqslant a])
\end{aligned}$$

□

Preuve dans le cas à densité. Si X admet une densité f, alors, comme X est à valeurs positives, f est nulle en dehors de $[0, +\infty[$. On peut alors écrire :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)\ \mathrm{d}t \\
&= \int_{0}^{+\infty} tf(t)\ \mathrm{d}t && \textit{(car } f \textit{ est nulle en dehors de } [0, +\infty[\textit{)} \\
&= \int_{0}^{a} tf(t)\ \mathrm{d}t + \int_{a}^{+\infty} tf(t)\ \mathrm{d}t && \textit{(par Chasles)} \\
&\geqslant \int_{a}^{+\infty} tf(t)\ \mathrm{d}t \\
&\geqslant \int_{a}^{+\infty} af(t)\ \mathrm{d}t && \textit{(par croissance de l'intégrale, les bornes étant rangées dans l'ordre croissant)} \\
&\geqslant a\int_{a}^{+\infty} f(t)\ \mathrm{d}t \\
&\geqslant a\mathbb{P}([X \geqslant a])
\end{aligned}$$

□

Remarque 1. Rappel : si A est un événement, la v.a.r. $\mathbb{1}_A$ est définie en tant qu'application par :

$$\mathbb{1}_A : \omega \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } \omega \in A, \textit{ i.e.} \text{ si } A \text{ est réalisé par l'issue } \omega \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Autrement dit, $\mathbb{1}_A$ prend la valeur 1 si A est réalisé, et la valeur 0 sinon.a

Preuve dans le cas général (`top 3`). Soit $a > 0$.

Etape 1 : construction d'une nouvelle v.a.r.

Considérons la v.a.r. $Y = a\mathbb{1}_{[X \geqslant a]}$ définie par :

$$\begin{array}{rcl} Y & : & \Omega \to \mathbb{R} \\ & & \omega \mapsto \begin{cases} a & \text{si } X(\omega) \geqslant a \\ 0 & \text{si } X(\omega) < a \end{cases} \end{array}$$

Listons quelques propriétés de Y :

1. $Y(\Omega) = \{0, a\}$ (donc Y est une v.a.r. finie).
2. $[Y = a] = [X \geqslant a]$ (puisque : $\forall \omega \in \Omega,\ Y(\omega) = a \Leftrightarrow X(\omega) \geqslant a$).
3. $[Y = 0] = [X < a]$ (puisque : $\forall \omega \in \Omega,\ Y(\omega) = 0 \Leftrightarrow X(\omega) < a$).

Etape 2 : calcul de $\mathbb{E}(Y)$*.*

Comme Y est finie, Y admet une espérance. De plus :

$$\mathbb{E}(Y) = 0 \times \underset{\displaystyle \mathbb{P}([X < a])}{\underset{\shortparallel}{\mathbb{P}([Y = 0])}} + a \times \underset{\displaystyle \mathbb{P}([X \geqslant a])}{\underset{\shortparallel}{\mathbb{P}([Y = a])}} = a \times \mathbb{P}([X \geqslant a])$$

Etape 3 : inégalité entre Y *et* X*.*

Soit $\omega \in \Omega$. Deux cas se présentent.

1. si $X(\omega) \geqslant a$, alors $Y(\omega) = a \leq X(\omega)$.
2. si $X(\omega) < a$, alors $Y(\omega) = 0 \leq X(\omega)$.

Donc $\forall \omega \in \Omega$, $Y(\omega) \leqslant X(\omega)$, *i.e.* : $Y \leqslant X$.

Etape 4 : conclusion.

Par croissance de l'espérance, on déduit des deux points précédents :

$$\underset{\displaystyle a\,\mathbb{P}([X \geqslant a])}{\underset{\shortparallel}{\mathbb{E}(Y)}} \leqslant \mathbb{E}(X)$$

On conclut en divisant de part et d'autre par $a > 0$. $\square$

Exemple 1. Dans le DS4 vB 2022-2023, une question nécessitait l'inégalité de Markov. On considérait une v.a.r. $V_k^{(m)}$ positive qui admettait une espérance vérifiant

$$\mathbb{E}\big(V_k^{(m)}\big) \leqslant k\,\frac{\alpha}{\alpha - 1} m^{1-\alpha}$$

puis il fallait en déduire que :

$$\mathbb{P}\Big(\Big[V_k^{(m)} \geqslant k\varepsilon\Big]\Big) \leqslant \frac{\alpha}{\alpha - 1}\frac{m^{1-\alpha}}{\varepsilon}$$

Remarque 2.

- Avantage : universelle (s'applique à toutes les v.a.r. qui admettent une espérance et sont positives, la loi n'importe pas).
- Désavantage : peu précise (on peut faire mieux en utilisant les propriétés spécifiques d'une loi).

Remarque 3.

1. Si $a \leqslant \mathbb{E}(X)$, alors l'inégalité ne nous apprend rien. En effet, dans ce cas $\dfrac{\mathbb{E}(X)}{a} \geqslant 1$ et donc on retrouve $\mathbb{P}([X \geqslant a]) \leqslant 1$.
2. Si $a \geqslant \mathbb{E}(X)$ est très grand, alors l'inégalité nous apprend que la probabilité que X prenne de très grandes valeurs au dessus de son espérance est très faible.

Exercice 1 : *(Inégalité de Markov : un théorème puissant mais parfois grossier)*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $X \hookrightarrow \mathcal{B}\left(2n, \frac{1}{2}\right)$.

1. (a) Rappeler la valeur de l'espérance de X.

   (b) En déduire que, pour tout $x > 0$, $\mathbb{P}([X \geqslant x]) \leqslant \dfrac{n}{x}$.

2. (a) Calculer $\mathbb{P}([X = n])$.

   (b) Montrer que $\mathbb{P}([X \geqslant n+1]) = \mathbb{P}([X \leqslant n-1])$.

   (c) En déduire que $\mathbb{P}([X \geqslant n+1]) < \dfrac{1}{2}$. Comparer cette majoration avec celle obtenue en question 1b.

3. *Simulation informatique.*

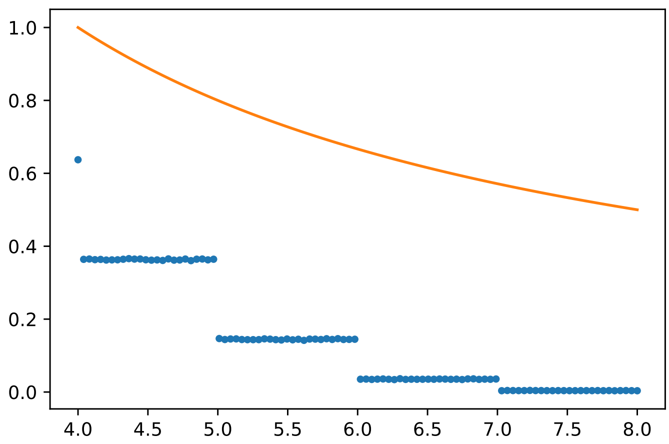
   (a) Compléter la fonction **Python** qui suit pour qu'elle renvoie une approximation de $\mathbb{P}([X \geqslant x])$.

```
def calculApproxLfGN(n, x):
    c = 0
    for k in range(10**5):
        if   rd.binomial(2*n, 1/2) >= x   :
            c +=  1
    return  c / 10**5
```

   (b) Ecrire une fonction **Python**, nommée `majorationMarkov`, qui prend en paramètre n et x et qui renvoie la majoration obtenue en question 1b.

   (c) Compléter le script **Python** ci-dessous afin d'obtenir le graphique qui suit. On expliquera en particulier le choix du premier paramètre ligne 2.

```
1 n = 4
2 abscisse = np.linspace(  n  ,  2*n  , 100)
3 ordonneeLfGN =    [calculApproxLfGN(n, x) for x in abscisse]
4 ordonneeMarkov =    [majorationMarkov(n, x) for x in abscisse]
5 plt.plot(abscisse,  ordonneeLfGN  , '.')
6 plt.plot(abscisse,  ordonneeMarkov  )
```



Théoreme 2. *Soit $r \in \mathbb{N}$. Soit X une v.a.r. possédant un moment d'ordre r.*

$$\boxed{\forall a > 0,\ \mathbb{P}\big(\left[\ |X| \geqslant a\ \right]\big) \ \leq\ \frac{\mathbb{E}\left(\ |X|^r\ \right)}{a^r}}$$

Démonstration.
On applique l'inégalité de Markov à la v.a.r. $|X|^r$ (qui admet une espérance et qui est positive) et au réel $a^r > 0$:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{P}([|X|^r \geqslant a^r]) & \leqslant & \dfrac{\mathbb{E}(|X|^r)}{a^r} \\ \parallel & & \\ \mathbb{P}([|X| \geqslant a]) & & \end{array}$$

□

1.2 L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Théoreme 3 (Inégalité de Bienaymé-Tchebychev)**.** *Soit X une v.a.r. qui admet une variance. Alors :*

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0,\ \mathbb{P}([\ |X - \mathbb{E}(X)| \geqslant \varepsilon\ ]) \leqslant \frac{\mathbb{V}(X)}{\varepsilon^2}}$$

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$. Considérons la v.a.r. $Y = \big(X - \mathbb{E}(X)\big)^2$. On est dans le cadre d'application de l'inégalité de Markov :

1. $Y = \big(X - \mathbb{E}(X)\big)^2$ est à valeurs positives.
2. la v.a.r. Y admet une espérance car X admet une variance.

En appliquant l'inégalité de Markov à la v.a.r. Y et au réel $a = \varepsilon^2$:

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{P}\big(\big[\ Y \geqslant \varepsilon^2\ \big]\big) & = & \mathbb{P}\big(\big[\ \big(X - \mathbb{E}(X)\big)^2 \geqslant \varepsilon^2\ \big]\big) & \leqslant & \dfrac{\mathbb{E}(Y)}{\varepsilon^2} \\ & & \parallel & & \parallel \\ & & \mathbb{P}([\ |X - \mathbb{E}(X)| \geqslant \varepsilon\ ]) & & \dfrac{\mathbb{E}\big((X - \mathbb{E}(X))^2\big)}{\varepsilon^2} = \dfrac{\mathbb{V}(X)}{\varepsilon^2} \end{array}$$

□

Remarque 4. Tout comme pour l'inégalité de Markov :

- Avantage : universelle (s'applique à toutes les v.a.r. qui admettent une variance, la loi n'importe pas).
- Désavantage : peu précise (on peut faire mieux en utilisant les propriétés spécifiques d'une loi).

Exercice 2 : *(Inégalité de Bienaymé-Tchebychev : un théorème puissant mais parfois grossier)*

1. Soit $X \hookrightarrow \mathcal{U}([0,1])$.
   (a) Rappeler les valeurs de $\mathbb{E}(X)$ et de $\mathbb{V}(X)$.
   (b) Soit $\varepsilon > 0$. A l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, donner une majoration de $\mathbb{P}([\ |X - \mathbb{E}(X)| \geqslant \varepsilon\ ])$.
   (c) Soit $\varepsilon \geqslant \frac{1}{2}$. Calculer $\mathbb{P}([\ |X - \mathbb{E}(X)| \geqslant \varepsilon\ ])$. Commenter.
2. Soit $X \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$.
   (a) Rappeler les valeurs de $\mathbb{E}(X)$ et de $\mathbb{V}(X)$.
   (b) Soit $\varepsilon > 0$. A l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, donner une majoration de $\mathbb{P}([\ |X - \mathbb{E}(X)| \geqslant \varepsilon\ ])$.
   (c) Soit $\varepsilon \geqslant 1$. Calculer $\mathbb{P}([\ |X - \mathbb{E}(X)| \geqslant \varepsilon\ ])$. Commenter.
3. Soit $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$.
   (a) Rappeler les valeurs de $\mathbb{E}(X)$ et de $\mathbb{V}(X)$.
   (b) Soit $\varepsilon > 0$. A l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, donner une majoration de $\mathbb{P}([\ |X - \mathbb{E}(X)| \geqslant \varepsilon\ ])$.
   (c) Soit $\varepsilon \geqslant 1$.
      i. Montrer que $\mathbb{P}([\ |X - \mathbb{E}(X)| \geqslant \varepsilon\ ]) = \sqrt{\dfrac{2}{\pi}} \displaystyle\int_{\varepsilon}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}t^2}\ dt$.
      ii. En déduire que $\mathbb{P}([\ |X - \mathbb{E}(X)| \geqslant \varepsilon\ ]) \leqslant \sqrt{\dfrac{2}{\pi}} \dfrac{1}{\varepsilon} e^{-\frac{1}{2}\varepsilon^2}$.
4. *Informatique.* Compléter le script **Python** ci-dessous afin d'obtenir le graphique qui suit, représentant les différentes majorations de $\mathbb{P}([\ |X - \mathbb{E}(X)| \geqslant \varepsilon\ ])$ obtenues aux questions 2 et 3. Commenter.

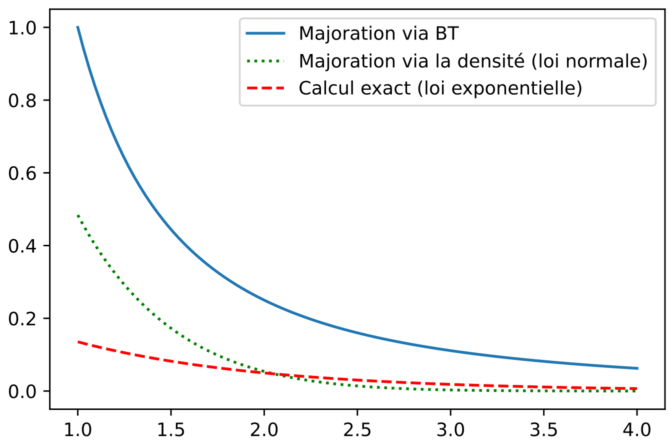
```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

def f(x):
    return  1/x**2

def g(x):
    return   np.sqrt(2/np.pi)*np.exp(-x**2/2)/x

def h(x):
    return  np.exp(-1-x)

X = np.linspace(1,4,100)
plt.plot(X, f(X), label='Majoration via BT')
plt.plot(X, g(X), 'g:', label='Majoration via la densité (loi normale)')
plt.plot(X, h(X), 'r-', label='Calcul exact (loi exponentielle)')
plt.legend(loc='best')
```



Exercice 3 :

1. Soit $p \in]0,1[$. Soit $n \geqslant 2$. Soient $X_1, \dots, X_n$ des v.a.r. mutuellement indépendantes et de même loi $\mathcal{B}(p)$. Montrer que :
$$\forall \varepsilon > 0,\ \mathbb{P}\left(\left[\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k - p\right| \geqslant \varepsilon\right]\right) \leqslant \frac{p(1-p)}{n\varepsilon^2}$$

2. On lance n fois une pièce équilibrée. On suppose que les lancers sont indépendants. Combien de lancers faut-il effectuer pour pouvoir affirmer, avec un risque d'erreur inférieur à 5%, que la fréquence d'apparition du `Pile` au cours de ces lancers sera comprise entre 49% et 51% ?

Démonstration.

1. On pose $\overline{X_n} = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k$ et on montre que :
   - $\overline{X_n}$ admet une espérance et $\mathbb{E}(\overline{X_n}) = p$
   - $\overline{X_n}$ admet une variance et $\mathbb{V}(\overline{X_n}) = \dfrac{p(1-p)}{n}$

2. La fréquence d'apparition du `Pile` au cours de n lancers est la valeur prise par la variable aléatoire $\overline{X_n}$ si l'on définit X_k comme le résultat du k^{e} lancer (1 si on obtient `Pile` et 0 sinon). On cherche donc pour quels entiers n on a :
$$\mathbb{P}\left(\left[49\% \leqslant \overline{X_n} \leqslant 51\%\right]\right) \geqslant 95\%$$
On sait que la pièce est équilibrée donc $p = \dfrac{1}{2}$. D'après la question précédente, pour tout $\varepsilon > 0$:
$$\mathbb{P}\left(\left[\left|\overline{X_n} - p\right| > \varepsilon\right]\right) \leqslant \mathbb{P}\left(\left[\left|\overline{X_n} - p\right| \geqslant \varepsilon\right]\right) \leqslant \frac{p(1-p)}{n\varepsilon^2}$$
En passant à l'événement contraire, on obtient :
$$\mathbb{P}\left(\left[\left|\overline{X_n} - p\right| \leqslant \varepsilon\right]\right) \geqslant 1 - \frac{p(1-p)}{n\varepsilon^2}$$
et donc :
$$\mathbb{P}\left(\left[p - \varepsilon \leqslant \overline{X_n} \leqslant p + \varepsilon\right]\right) \geqslant 1 - \frac{p(1-p)}{n\varepsilon^2}$$
d'où, en choisissant $\varepsilon = 1\%$:
$$\mathbb{P}\left(\left[49\% \leqslant \overline{X_n} \leqslant 51\%\right]\right) \geqslant 1 - \frac{1}{4n\left(\dfrac{1}{100}\right)^2} = 1 - \frac{10^4}{4n}$$
Il reste à résoudre l'inéquation :
$$\begin{aligned} 1 - \frac{10^4}{4n} \geqslant 95\% &\iff \frac{10^4}{4n} \leqslant 5\% \\ &\iff \frac{10^4}{4n} \leqslant \frac{5}{10^2} \\ &\iff \frac{10^6}{20} \leqslant n \\ &\iff n \geqslant 50000 \end{aligned}$$
Il faut faire au moins 50000 lancers pour pouvoir affirmer, avec un risque d'erreur inférieur à 5%, que la fréquence d'apparition du `Pile` au cours de ces lancers sera comprise entre 49% et 51%.

□

2 La loi faible des grands nombres (LfGN)

Théoreme 4 (Loi faible des grands nombres). *Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires. On suppose que les v.a.r. X_n :*

- *sont indépendantes*
- *admettent toutes la même espérance m*
- *admettent toutes la même variance σ^2*

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\overline{X_n} = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} X_k$ (moyenne empirique). Alors,
$$\boxed{\forall \varepsilon > 0,\ \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\left[\ \left|\overline{X_n} - m\right| \geqslant \varepsilon\ \right]\right) = 0}$$

Démonstration. Rappelons tout d'abord l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev. Soit Y une v.a.r. discrète admettant une variance $\mathbb{V}(Y)$.
$$\forall \varepsilon > 0, \quad \mathbb{P}(|Y - \mathbb{E}(Y)| \geqslant \varepsilon) \ \leqslant\ \frac{\mathbb{V}(Y)}{\varepsilon^2}$$

On applique l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev à $Y = \overline{X_n} = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} X_k$.

La v.a.r. $\overline{X_n}$ admet une variance car elle est la CL de v.a.r. qui admettent une variance. De plus :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\overline{X_n}) &= \mathbb{E}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k\right) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\mathbb{E}(X_k)\\ &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} m = \frac{1}{n}\, n\times m = m\end{aligned}$$

Par ailleurs, par indépendance des v.a.r. X_i, on a :

$$\begin{aligned}\mathbb{V}(\overline{X_n}) &= \mathbb{V}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k\right) = \frac{1}{n^2}\,\mathbb{V}\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\mathbb{V}(X_k)\\ &= \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\sigma^2 = \frac{1}{n^2}\, n\times\sigma^2 = \frac{1}{n}\,\sigma^2\end{aligned}$$

Soit $\varepsilon > 0$. D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev :

$$\mathbb{P}\left(\left[\left|\overline{X_n} - m\right| \geqslant \varepsilon\right]\right) \leqslant \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}\,\frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

□

Remarque 5. Dans les sujets, on tombera parfois sur un énoncé introduisant une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ telle que les variables X_i :

- sont indépendantes
- sont de même loi
- admettent toutes une espérance et une variance

Ces trois hypothèses sont plus fortes que celles données dans l'énoncé de la LfGN, on pourra donc appliquer le théorème.

Remarque 6. Dans la grande majorité des cas, ce théorème est utilisé dans les questions d'informatique, pour trouver une valeur approchée de l'espérance d'une variable aléatoire ou de la probabilité d'un événement (cf TP).

Exercice 4 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère une urne contenant n boules, numérotées de 1 à n. On effectue un unique tirage aléatoire équiprobable d'une boule dans cette urne et on note X la variable aléatoire égale au numéro de la boule obtenue. Si X prend la valeur k, on coupe alors en deux un ruban long de k centimètres, en choisissant aléatoirement et de manière uniforme le point de découpe. On note Z la variable aléatoire égale à la longueur (en cm) du plus petit des deux rubans ainsi obtenus.

1. Ecrire une fonction **Python** `simulZ(n)` qui simule cette expérience et qui renvoie la valeur prise par Z.
2. Ecrire une fonction **Python** `approxEsp(n)` qui renvoie une approximation de l'espérance de Z (on admet qu'elle en admet une).

3 Convergence en loi d'une suite de v.a.r.

3.1 Limite simple d'une suite de fonctions (Hors-programme)

Definition 1 (Hors programme)**.** Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions (pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$) et soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction. Soit D une partie de $\mathbb{R}$. On dit que la suite (f_n) *converge simplement* vers f sur D si :

$$\forall x \in D, \quad f_n(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(x)$$

Remarque 7. Attention à ne pas confondre les objets :

- (f_n) est une suite de fonctions
- si n est fixé, alors f_n est une fonction
- si x est fixé, alors $(f_n(x))$ est une suite de réels

Il s'agit donc dans cette définition de la « convergence simple » de vérifier la convergence de beaucoup de suites de réels (toutes les suites $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ pour $x \in D$ fixé). Il faut commencer par fixer x puis faire tendre n vers $+\infty$.

Méthode. Pour montrer que : « $\forall x \in D, \quad f_n(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(x)$ », il faut en général distinguer des cas selon la valeur de x (car f_n est définie par morceaux). Il est très important de fixer x dans un intervalle qui `NE DEPEND PAS` de n dans chaque cas.

Exercice 5 : *(Un exemple où les intervalles de définition de f_n ne dépendent pas de n)*

Soit (f_n) la suite de fonctions définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R},\ f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x^n & \text{si } 0 \leqslant x < 1 \\ 1 & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}$$

Calculer, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \overset{\text{def}}{=} \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x)$.

Exercice 6 : *(Un exemple où les intervalles de définition de f_n dépendent de n)*

Soit $a > 0$. Soit (f_n) la suite de fonctions définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R},\ f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - \mathrm{e}^{-ax-\frac{x^2}{2n}} & \text{si } 0 \leqslant x < 2n \\ 1 & \text{si } x \geqslant 2n \end{cases}$$

Calculer, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \overset{\text{def}}{=} \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x)$.

Exercice 7 : *(Un exemple où les intervalles de définition de f_n dépendent de n)*

Soit (f_n) la suite de fonctions définie par :

$$\forall n \geqslant 3, \forall x \in \mathbb{R},\ f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < \frac{1}{n} \\ \frac{nx-1}{n-2} & \text{si } \frac{1}{n} \leqslant x \leqslant 1 - \frac{1}{n} \\ 1 & \text{si } x > 1 - \frac{1}{n} \end{cases}$$

Calculer, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \overset{\text{def}}{=} \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x)$.

Exercice 8 : `(inspiré de HEC 2015)`

Soit $\lambda > 0$. On considère la fonction $f : x \mapsto \begin{cases} 1 - \mathrm{e}^{-\lambda x} & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ et on définit la suite de fonctions $(g_n)_{n\geqslant 1}$ par :

$$\forall n \geqslant 1, \forall x \in \mathbb{R},\ g_n(x) = \left(f\left(x + \frac{1}{\lambda}\ln(n) \right) \right)^n$$

1. Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé.
   (a) Déterminer le plus petit entier N_x (qui dépend de x) qui vérifie :
   $$\forall n \geqslant N_x,\ x + \frac{1}{\lambda}\ln(n) > 0$$
   (b) En déduire que, pour tout entier $n \geqslant N_x$, on a : $f\left(x + \frac{1}{\lambda}\ln(n)\right) = 1 - \frac{\mathrm{e}^{-\lambda x}}{n}$.
2. Montrer que, pour tout réel x, on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} g_n(x) = \mathrm{e}^{-\mathrm{e}^{-\lambda x}}$.

3.2 Convergence en loi

Definition 2. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de v.a.r. et soit X une v.a.r. . On dit que la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *converge en loi* vers la variable X si

$$\lim_{n\to+\infty} F_{X_n}(x) = F_X(x)$$

en tout point de continuité x de la fonction F_X. Lorsque c'est le cas, on note $X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathscr{L}} X$.

Remarque 8. Considérons une suite de v.a.r. $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ telle que : $X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathscr{L}} X$. On a alors, pour tout $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ où a et b sont des points de continuité de F_X tels que $a \leqslant b$:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{P}\big(\,[a < X_n \leqslant b]\,\big) & \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} & \mathbb{P}\big(\,[a < X \leqslant b]\,\big) \\ \shortparallel & & \shortparallel \\ F_{X_n}(b) - F_{X_n}(a) & \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} & F_X(b) - F_X(a) \end{array}$$

3.3 Cas particuliers

Cas particulier des v.a.r. à densité. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de v.a.r. . Soit X une v.a.r. à densité.

Comme X est à densité, sa fonction de répartition F_X est continue sur $\mathbb{R}$. On peut alors reformuler la définition de convergence en loi :

$$\boxed{X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathscr{L}} X \quad \Leftrightarrow \quad \forall x\in\mathbb{R},\ \lim_{n\to+\infty} F_{X_n}(x) = F_X(x)}$$

Cas des v.a.r. discrètes. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de v.a.r. discrètes à valeurs dans $\mathbb{Z}$. Soit X une v.a.r. discrète à valeurs dans $\mathbb{Z}$.

On a alors :

$$\boxed{X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathscr{L}} X \quad \Leftrightarrow \quad \forall k\in\mathbb{Z},\ \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}([X_n = k]) = \mathbb{P}([X = k])}$$

Exemple 2. Dans le sujet 0 EML 2022 (exo 7 TD chaîne de Markov), on étudie une chaîne de Markov (X_n) telle que, pour tout $n\in\mathbb{N}$:

$$\mathbb{P}([X_n = 1]) = \frac{1}{3}\left(1 + \frac{2}{4^n}\right), \qquad \mathbb{P}([X_n = 2]) = \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{4^n}\right), \qquad \mathbb{P}([X_n = 3]) = \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{4^n}\right)$$

On vérifie alors que :

$$X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathscr{L}} X$$

où $X \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 1,3\rrbracket)$.

3.4 Illustration sur des exemples

3.4.1 Cas d'une suite de v.a.r. discrètes convergeant en loi vers une v.a.r. discrète

Théoreme 5. *Soit* $\lambda > 0$. *Soit* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *une suite de v.a.r. . On suppose que :* $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ X_n \hookrightarrow \mathcal{B}\left(n, \frac{\lambda}{n}\right)$. *Alors :* $X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathscr{L}} X$ *où* $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$.

Démonstration. On est dans le cas où :

1. $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de v.a.r. discrètes à valeurs dans $\mathbb{N}$.
2. X est une v.a.r. discrète à valeurs dans $\mathbb{N}$.

Il s'agit alors de démontrer :

$$\forall k\in\mathbb{N},\ \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}([X_n = k]) = \mathbb{P}([X = k])$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $k \in \mathbb{N}$.
Comme on s'intéresse à un résultat lorsque $n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, on peut considérer n aussi grand que souhaité. En particulier : $k \in [\![0, n]\!]$. On a alors :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}([X_n = k]) &= \binom{n}{k} \times \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \times \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} \\ &= \frac{n!}{k!(n-k)!}\ \frac{\lambda^k}{n^k}\ \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-k} \\ &= \frac{\lambda^k}{k!}\ \frac{\frac{n!}{(n-k)!}}{n^k}\ \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-k}\end{aligned}$$

Intéressons-nous aux termes de ce produit.

1. Tout d'abord :
$$\frac{\frac{n!}{(n-k)!}}{n^k} = \frac{n(n-1)\dots(n-(k-1))}{n^k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^k}{n^k} = 1$$
En effet, le numérateur apparaît comme produit de k éléments qui sont tous équivalents, lorsque n tend vers $+\infty$, à n.
2. Notons $u_n = \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n$. Alors : $u_n = \exp\left(n \ln\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)\right)$.
Or :
$$\ln(u_n) = n \ln\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} n\ \frac{-\lambda}{n} = -\lambda$$
On en déduit : $\ln(u_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\lambda$ et $u_n = \mathrm{e}^{\ln(u_n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathrm{e}^{-\lambda}$.
3. Enfin, comme : $1 - \frac{\lambda}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$, on a :
$$\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-k} = \frac{1}{\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^k} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{1} = 1$$

En conclusion :

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}([X_n = k]) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathrm{e}^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} = \mathbb{P}([X = k])}$$

où X est une v.a.r. telle que $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$.

□

Remarque 9. La loi de Poisson apparaît comme la limite de lois binomiales $\mathcal{B}\left(n, \frac{\lambda}{n}\right)$. Ainsi, si n grand (et donc $\frac{\lambda}{n}$ proche de 0) la loi $\mathcal{P}(\lambda)$ est une bonne approximation de la loi $\mathcal{B}\left(n, \frac{\lambda}{n}\right)$.

Dans la pratique, on considère qu'on peut approcher la loi $\mathcal{B}(n, p)$ par la loi $\mathcal{P}(np)$ lorsque $n \geqslant 30$ et $p \leq 0,1$ (mais l'énoncé doit fournir les indications pour justifier les approximations, ce n'est pas exigible).

Si $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$ et si $n \geqslant 30$ et $p \leq 0,1$, on utilise alors l'approximation :

$$\forall k \in [\![0, n]\!],\ \mathbb{P}([X = k]) \simeq \mathrm{e}^{-np} \frac{(np)^k}{k!}$$

Illustrons enfin ce résultat sur un exemple. Notons X une v.a.r. telle que : $X \hookrightarrow \mathcal{B}(100, 0.05)$. Par définition de la loi binomiale :

$$\mathbb{P}([X = 2]) = \binom{100}{2} \left(\frac{1}{20}\right)^2 \left(\frac{19}{20}\right)^{98} \simeq 0.0812$$

Comme $n \geqslant 30$ et $p = 0.05 \leqslant 0.1$, on peut approcher la loi de X par la loi de Poisson $\mathcal{P}(5)$. On obtient alors :

$$\mathbb{P}([X = 2]) \simeq \frac{5^2}{2!} \mathrm{e}^{-5} \simeq 0.0842$$

3.4.2 Cas d'une suite de v.a.r. à densité convergeant en loi vers une v.a.r. discrète

Exercice 9 : `(d'après ESCP 1987)` Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de v.a.r. à densité telle que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction de répartition de X_n est définie par :

$$F_{X_n} : x \mapsto \begin{cases} \dfrac{1}{(1-x)^n} & \text{si } x \leqslant 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Montrer que la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une v.a.r. X dont on précisera la loi.

Exercice 10 : Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de v.a.r. à densité telle que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $X_n \hookrightarrow \mathcal{U}([-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}])$. Montrer que la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une v.a.r. X dont on précisera la loi.

3.4.3 Cas d'une suite de v.a.r. discrètes convergeant en loi vers une v.a.r. à densité

Exercice 11 : Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de v.a.r. telle que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$X_n \hookrightarrow \mathcal{U}\left(\left\{\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}, 1\right\}\right)$$

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que pour tout réel x :

$$F_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < \frac{1}{n} \\ \dfrac{\lfloor nx \rfloor}{n} & \text{si } \frac{1}{n} \leqslant x < 1 \\ 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

2. Montrer l'équivalent : $\lfloor x \rfloor \underset{x\to+\infty}{\sim} x$.
3. Montrer que la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une v.a.r. X telle que : $X \hookrightarrow \mathcal{U}([0,1])$.

3.4.4 Cas d'une suite de v.a.r. à densité convergeant en loi vers une v.a.r. à densité

Exercice 12 : Soit X une v.a.r. à densité. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $X_n = \mathrm{e}^{\frac{1}{n}} X$. Montrer que (X_n) converge en loi vers X.

Exercice 13 : Soit (X_n) une suite de v.a.r. telle que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, $X_n \hookrightarrow \mathcal{E}\left(1 + \frac{1}{n}\right)$. Montrer que (X_n) converge en loi vers une v.a.r. X dont on précisera la loi.

4 Approximation de v.a.r. par le TCL

4.1 Théorème central limite

Théoreme 6 (Théorème central limite)**.** *Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de v.a.r. :*

1. *indépendantes*
2. *de même loi*
3. *qui admettent une même espérance m et une même variance $\sigma^2 \neq 0$*

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note :

- $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ *et* $S_n^* = \dfrac{S_n - nm}{\sigma\sqrt{n}} = \dfrac{S_n - \mathbb{E}(S_n)}{\sqrt{\mathbb{V}(S_n)}}$

- $\overline{X}_n = \dfrac{X_1 + \dots + X_n}{n} = \dfrac{S_n}{n}$ *et* $\overline{X}_n^* = \dfrac{\overline{X}_n - m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \dfrac{\overline{X}_n - \mathbb{E}(\overline{X}_n)}{\sqrt{\mathbb{V}(\overline{X}_n)}}$

Alors, $S_n^* = \overline{X}_n^*$ *et*

$$\overline{X}_n^* \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathscr{L}} Z \quad \text{où} \quad Z \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$$

Autrement dit, la suite $(\overline{X}_n^*)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *converge en loi vers une v.a.r. de loi normale centrée réduite* $\mathcal{N}(0,1)$. *En particulier, pour tout* $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ *avec* $a \leqslant b$ *:*

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\left[a < \overline{X}_n^* \leqslant b\right]\right) = \mathbb{P}([a < Z \leqslant b]) = \mathbb{P}([a \leqslant Z \leqslant b]) = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}t^2} \, \mathrm{d}t}$$

Remarque 10. Le TCL peut s'exprimer à l'aide de S_n^* (exo « approximation de loi ») ou $\overline{X_n}^*$ (exo « estimation »).

Remarque 11. En pratique, on considère que l'on peut approcher la loi de $\overline{X}_n^*$ par la loi normale centrée réduite dès que : $\boxed{n \geqslant 30}$.

Remarque 12. Ce théorème peut être interprété comme une précision de la loi faible des grands nombres. Celle-ci stipule que la moyenne empirique converge vers la moyenne théorique. Le théorème central limite précise que, grosso-modo, la convergence a lieu à la vitesse de $\frac{1}{\sqrt{n}}$.

4.2 Idée générale de l'approximation de lois par TCL

On se place dans le cadre d'utilisation du théorème précédent. On a alors :

$$S_n^* \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathscr{L}} Z \quad \text{où} \quad Z \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$$

Question : quelle est la loi de S_n ? Déterminons F_{S_n} pour y répondre.

Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
F_{S_n}(x) &= \mathbb{P}\big(\,[S_n \leqslant x]\,\big) \\
&= \mathbb{P}\big(\,[S_n - nm \leqslant x - nm]\,\big) \\
&= \mathbb{P}\left(\left[\frac{S_n - nm}{\sigma\sqrt{n}} \leqslant \frac{x - nm}{\sigma\sqrt{n}}\right]\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\left[S_n^* \leqslant \frac{x - nm}{\sigma\sqrt{n}}\right]\right) \\
&\simeq \mathbb{P}\left(\left[Z \leqslant \frac{x - nm}{\sigma\sqrt{n}}\right]\right) && \text{(pour une valeur de } n \text{ suffisamment grande)} \\
&= \mathbb{P}\left(\left[\sigma\sqrt{n}\, Z + nm \leqslant x\right]\right) \\
&= F_{\sigma\sqrt{n}\, Z+nm}(x)
\end{aligned}$$

On peut donc considérer que, pour n suffisamment grand, les v.a.r. S_n et $Z_n = \sigma\sqrt{n}\, Z + nm$ ont même loi. Mais quelle est la loi de $Z_n = \sigma\sqrt{n}\, Z + nm$? Comme Z_n est une transformée affine de la v.a.r. Z qui suit une loi normale, Z_n suit une loi normale. On détermine les caractéristiques de cette loi normale en déterminant l'espérance et la variance de Z_n :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(Z_n) &= \mathbb{E}(\sigma\sqrt{n}\, Z + nm) = \sigma\sqrt{n}\, \mathbb{E}(Z) + nm = nm \\
\mathbb{V}(Z_n) &= \mathbb{V}(\sigma\sqrt{n}\, Z + nm) = (\sigma\sqrt{n})^2\, \mathbb{V}(Z) = n\sigma^2
\end{aligned}$$

Il faut savoir retrouver le résultat suivant :

$$\boxed{\text{Pour } n \text{ suffisamment grand, la v.a.r. } S_n \text{ suit approximativement la loi } \mathcal{N}\left(nm, n\sigma^2\right).}$$

4.3 Illustration sur des exemples

4.3.1 Approximation d'une loi binomiale par une loi normale

Théoreme 7 (A savoir retrouver via le TCL)**.** *Soit $p \in \,]0,1[$. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de v.a.r. indépendantes telle que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $X_n \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$. Alors,*

1. *pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $S_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$.*
2. $\boxed{S_n^* = \dfrac{S_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathscr{L}} Z, \quad \text{où } Z \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)}$
3. *Pour n suffisamment grand, la v.a.r. S_n suit approximativement la loi $\mathcal{N}(np, np(1-p))$*

Démonstration.

1. Déjà vu lors du chapitre sur les couples de v.a.r.
2. C'est une application directe du TCL.
3. Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
F_{S_n}(x) &= \mathbb{P}\big(\,[S_n \leqslant x]\,\big)\\
&= \mathbb{P}\big(\,[S_n - np \leqslant x - np]\,\big)\\
&= \mathbb{P}\left(\left[\frac{S_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \leq \frac{x-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right]\right)\\
&= \mathbb{P}\left(\left[S_n^* \leqslant \frac{x-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right]\right)\\
&\simeq \mathbb{P}\left(\left[Z \leqslant \frac{x-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right]\right) && \text{(pour une valeur de } n \text{ suffisamment grande)}\\
&= \mathbb{P}\Big(\Big[\sqrt{np(1-p)}\; Z + np \leqslant x\Big]\Big)\\
&= F_{\sqrt{np(1-p)}\; Z+np}(x)
\end{aligned}$$

Ainsi, les v.a.r. S_n et $Z_n = \sqrt{np(1-p)}\; Z + np$ suivent approximativement la même loi pour n suffisamment grand.
Comme Z_n est une transformée affine de la v.a.r. Z qui suit une loi normale, Z_n suit une loi normale. On détermine les caractéristiques de cette loi normale en déterminant espérance et variance de Z_n :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(Z_n) = \mathbb{E}(\sqrt{np(1-p)}\; Z + np) &= \sqrt{np(1-p)}\,\mathbb{E}(Z) + np = np\\
\mathbb{V}(Z_n) = \mathbb{V}(\sqrt{np(1-p)}\; Z + np) &= (\sqrt{np(1-p)})^2\;\mathbb{V}(Z) = np(1-p)
\end{aligned}$$

Ainsi, pour n suffisamment grand, la v.a.r. S_n suit approximativement la loi $\mathcal{N}(np, np(1-p))$.

□

Remarque 13. Considérons n et p définis de telle sorte qu'on peut approcher la v.a.r. S_n (où $S_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$) par la v.a.r. Z_n (avec $Z_n \hookrightarrow \mathcal{N}(np, np(1-p))$).
On aurait envie écrire :

$$\forall k \in [\![0,n]\!],\ \mathbb{P}([S_n = k]) \simeq \mathbb{P}([Z_n = k])$$

Or, comme Z_n est une v.a.r. à densité, on a : $\mathbb{P}([Z_n = k]) = 0$. Ainsi, l'approximation ci-dessus n'est pas bonne. On écrira plutôt :

$$\mathbb{P}([S_n = k]) = \mathbb{P}([k - 0,5 < S_n < k + 0,5]) \simeq \mathbb{P}([k - 0,5 < Z_n < k + 0,5])$$

On appelle cela utiliser la *correction de continuité*.

Exercice 14 : Soit X une v.a.r. qui suit la loi $\mathcal{B}(900, 0.5)$. Donner une valeur approchée de $\mathbb{P}([405 \leqslant X \leqslant 495])$.

4.3.2 Approximation d'une loi de Poisson par une loi normale

Théoreme 8. *Soit $\alpha > 0$. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de v.a.r. indépendantes telle que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $X_n \hookrightarrow \mathcal{P}(\alpha)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$. Alors,*

1. *pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $S_n \hookrightarrow \mathcal{P}(n\,\alpha)$.*
2. $\boxed{S_n^* = \dfrac{S_n - n\alpha}{\sqrt{n\alpha}} \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathscr{L}} Z, \quad \text{où } Z \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)}$.
3. *Pour n suffisamment grand, la v.a.r. S_n suit approximativement la loi $\mathcal{N}(n\alpha, n\alpha)$.*

Démonstration.

1. Déjà vu lors du chapitre sur les couples de v.a.r.
2. C'est une application directe du TCL.
3. Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
F_{S_n}(x) &= \mathbb{P}\big(\,[S_n \leqslant x]\,\big) \\
&= \mathbb{P}\big(\,[S_n - n\alpha \leqslant x - n\alpha]\,\big) \\
&= \mathbb{P}\Big(\Big[\frac{S_n - n\alpha}{\sqrt{n\alpha}} \leq \frac{x - n\alpha}{\sqrt{n\alpha}}\Big]\Big) \\
&= \mathbb{P}\Big(\Big[S_n^* \leqslant \frac{x - n\alpha}{\sqrt{n\alpha}}\Big]\Big) \\
&\simeq \mathbb{P}\Big(\Big[Z \leqslant \frac{x - n\alpha}{\sqrt{n\alpha}}\Big]\Big) && \text{(pour une valeur de } n \text{ suffisamment grande)} \\
&= \mathbb{P}\Big(\big[\sqrt{n\alpha}\ Z + n\alpha \leqslant x\big]\Big) \\
&= F_{\sqrt{n\alpha}\ Z + n\alpha}(x)
\end{aligned}$$

Ainsi, les v.a.r. S_n et $Z_n = \sqrt{n\alpha}\ Z + n\alpha$ suivent approximativement la même loi pour n suffisamment grand. Comme Z_n est une transformée affine de la v.a.r. Z qui suit une loi normale, Z_n suit une loi normale. On détermine les caractéristiques de cette loi normale en déterminant l'espérance et la variance de Z_n :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(Z_n) = \mathbb{E}(\sqrt{n\alpha}\ Z + n\alpha) &= \sqrt{n\alpha}\ \mathbb{E}(Z) + n\alpha = n\alpha \\
\mathbb{V}(Z_n) = \mathbb{V}(\sqrt{n\alpha}\ Z + n\alpha) &= (\sqrt{n\alpha})^2\ \mathbb{V}(Z) = n\alpha
\end{aligned}$$

Ainsi, pour n suffisamment grand, la v.a.r. S_n suit approximativement la loi $\mathcal{N}(n\alpha, n\alpha)$.

□

Exercice 15 : Soit X une v.a.r. qui suit la loi $\mathcal{P}(64)$. Donner une valeur approchée de $\mathbb{P}([X \leqslant 74])$.

Exercice 16 : (d'après `ESSEC 2007 - Maths II`)

Soit X une v.a.r. telle que $X \hookrightarrow \mathcal{P}(5k)$, avec $k \in \mathbb{N}^*$. On note α l'unique réel vérifiant $\Phi(\alpha) = 0,99$. Justifier que $0,01$ est une valeur approchée de $\mathbb{P}\Big(\big[X - 5k > \alpha\sqrt{5k}\big]\Big)$, lorsque k est grand.

Exercice 17 : Soit (S_n) une suite de variables aléatoires telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n \hookrightarrow \mathcal{P}(n)$. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}([S_n \leqslant n]) = \dfrac{1}{2}$.