On s'intéresse dans ce DM à une modélisation particulière de la durée de vie d'un composant électronique ou électrique (par exemple d'une ampoule ou d'un pixel d'écran).

Soit X une variable aléatoire à densité. On dit que X suit une loi *sans mémoire* si,

- X est à valeurs positives
- pour tout $t \geqslant 0$ et pour tout $x \geqslant 0$,

$$\mathbb{P}_{[X>t]}([X > t + x]) = \mathbb{P}([X > x])$$

(ce qui sous-entend que $\mathbb{P}([X > t]) > 0$ pour que cela ait un sens)

Interprétation de la formule : si le composant a déjà survécu un temps t, la probabilité qu'il survive un temps x supplémentaire est la même qu'au tout début de son utilisation. Tout se passe comme si le composant avait « oublié » qu'il avait déjà vécu un temps t.

De manière analogue, si X est une variable aléatoire discrète à valeurs entières, on dit que X suit une loi *sans mémoire* si,

- X est à valeurs positives
- pour tout $k \in \mathbb{N}$ et pour tout $j \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}_{[X>k]}([X > k + j]) = \mathbb{P}([X > j])$$

(ce qui sous-entend que $\mathbb{P}([X > k]) > 0$ pour que cela ait un sens)

1. *Question préliminaire.* Soit X une variable aléatoire qui suit une loi sans mémoire. Montrer que $\mathbb{P}([X > 0]) = 1$ puis que $\mathbb{P}([X = 0]) = 0$. *On pourra ainsi considérer que $X(\Omega) \subset]0, +\infty[$ si X suit une loi sans mémoire.*

Partie 1 : Loi géométrique

L'objet de cette partie est de démontrer le théorème suivant.

Théoreme 1. *Soit X une variable aléatoire. Les deux propriétés qui suivent sont équivalentes :*

- $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$ *où* $p \in]0, 1[$.
- *X est discrète à valeurs entières et X suit une loi sans mémoire.*

2. Soit $p \in]0, 1[$ et soit $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$. On pose $q = 1 - p$.
   (a) Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}([X > k]) = q^k$.
   (b) Soit $k \in \mathbb{N}$ et soit $j \in \mathbb{N}$. Montrer que
   $$\mathbb{P}_{[X>k]}([X > k + j]) = \mathbb{P}([X > j])$$
   (c) Conclure.
3. Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs entières et qui suit une loi sans mémoire. On pose $q = \mathbb{P}([X > 1])$ et, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $u_k = \mathbb{P}([X > k])$.
   (a) Justifier : $X(\Omega) \subset \mathbb{N}^*$.
   (b) Justifier : $q > 0$.
   (c) Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $u_{k+1} = qu_k$. En déduire une expression simple de u_k pour tout $k \in \mathbb{N}$.
   (d) Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}([X = k]) = u_{k-1} - u_k$.
   (e) Montrer que $q < 1$. On pourra faire un raisonnement par l'absurde.
   (f) Conclure.
4. De quel nombre l'appel `simul(100000)` donne-t-il une approximation ?

```
def simul(N):
    c = 0
    tirages = 0
    while tirages < N:
        X = rd.geometric(1/2)
        if X > 2:
            tirages = tirages + 1
            if X > 5:
                c = c + 1
    return c / N
```

Partie 2 : Loi exponentielle

L'objet de cette partie est de démontrer le théorème suivant.

Théoreme 2. *Soit X une variable aléatoire. Les deux propriétés qui suivent sont équivalentes :*

- $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$ *où* $\lambda > 0$.
- *X suit une loi sans mémoire et X admet une densité f qui est nulle sur $]-\infty, 0[$, continue et strictement positive sur $]0, +\infty[$ et continue à droite en* 0.

5. Soit $\lambda > 0$ et soit $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$.
   (a) On note f la densité usuelle de X. Rappeler l'expression de $f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
   (b) Vérifier que f est nulle sur $]-\infty, 0[$, continue et strictement positive sur $]0, +\infty[$ et continue à droite en 0.
   (c) Montrer que, pour tout $t \geqslant 0$, $\mathbb{P}([X > t]) = \mathrm{e}^{-\lambda t}$.
   (d) Conclure.
6. Soit X une variable aléatoire suivant une loi sans mémoire et admettant une densité f qui est nulle sur $]-\infty, 0[$, continue et strictement positive sur $]0, +\infty[$ et continue à droite en 0. On note $G : x \mapsto \mathbb{P}([X > x])$ (on appelle G la fonction de *survie* de X). On pose $\lambda = f(0)$.
   (a) Donner la valeur de $F_X(x)$ pour $x \leqslant 0$. Rappeler la valeur de $G(0)$.
   (b) Justifier que G est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$.
   (c) i. Montrer que, pour tout $t \geqslant 0$ et pour tout $x \geqslant 0$,
   $$G(t+x) = G(t)G(x)$$
   ii. Montrer que, pour tout $t > 0$ et pour tout $x > 0$,
   $$G'(t+x) = G(t)G'(x)$$
   iii. En déduire que, pour tout $t > 0$,
   $$G'(t) = -\lambda G(t)$$
   (on fera le lien entre la fonction G' et la fonction f)
   iv. Justifier que $\lambda \geqslant 0$ puis montrer que $\lambda > 0$. On pourra faire un raisonnement par l'absurde pour la deuxième inégalité.
   v. Montrer qu'il existe une constante $C \in \mathbb{R}$ telle que, pour tout $t > 0$, $G(t) = C\mathrm{e}^{-\lambda t}$, puis déterminer la valeur de C.
   (d) Conclure.

Partie 3 : De la loi exponentielle à la loi géométrique

L'objet de cette partie est de démontrer le théorème suivant.

Théoreme 3. *Soit $\lambda > 0$ et soit $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$. On pose $Y = \lfloor X \rfloor + 1$. Alors $Y \hookrightarrow \mathcal{G}\left(1 - e^{-\lambda}\right)$.*

7. On pose $Z = \lfloor X \rfloor$.
   (a) Déterminer $Z(\Omega)$.
   (b) Calculer, pour tout $k \in Z(\Omega)$, $\mathbb{P}([Z = k])$.
8. Conclure.
9. (a) Ecrire une fonction **Python**, nommée `partieEnt(x)`, qui prend en paramètre un réel $x \geqslant 0$ et renvoie $\lfloor x \rfloor$.
   (b) Compléter le programme **Python** suivant pour qu'il simule la variable aléatoire Y (on note `lam` le réel λ).

```
def simulY(lam):
    X = ______________________________
    return _____________________
```

Partie 4 : De la loi géométrique à la loi exponentielle

L'objet de cette partie est de démontrer le théorème suivant.

Théoreme 4. *Soit* $\lambda > 0$ *et soit* $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$. *Soit* $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *une suite de réels dans* $]0,1[$ *qui vérifie :* $\lim_{n\to+\infty} np_n = \lambda$. *Soit* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *une suite de variables aléatoires telle que, pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$, $X_n \hookrightarrow \mathcal{G}(p_n)$. *Alors la suite de variables aléatoires* $\left(\dfrac{X_n}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *converge en loi vers* X.

Notons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $Y_n = \dfrac{X_n}{n}$. Il s'agit de démontrer :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \lim_{n\to+\infty} F_{Y_n}(x) = F_X(x)$$

10. Soit $x \leqslant 0$. Donner la valeur de $F_{Y_n}(x)$.
11. Soit $x > 0$.
    (a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $F_{Y_n}(x) = 1 - (1 - p_n)^{\lfloor nx \rfloor}$.
    (b) Montrer que $\lfloor nx \rfloor \underset{n\to+\infty}{\sim} nx$.
    (c) Calculer $\lim_{n\to+\infty} F_{Y_n}(x)$.
12. Conclure.