# DS4 (vA) - Barème

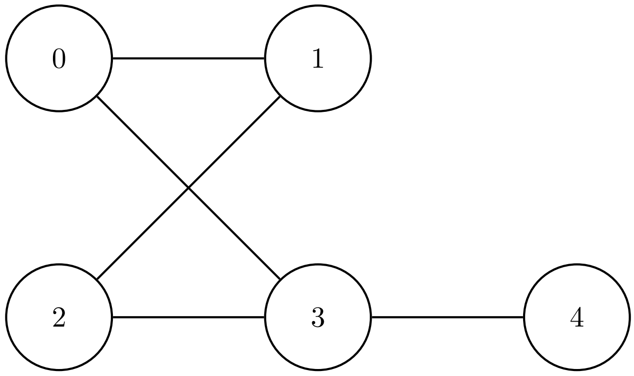
*La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.*
*Les candidat·es sont invité·es à* ***encadrer*** *dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*
*Aucun document n'est autorisé.* ***L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique*** *est* ***interdite****. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*
*Si au cours de l'épreuve, un candidat ou une candidate repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.*

On suppose, et c'est valable pour toute l'épreuve, que les librairies suivantes sont importées sous leurs alias habituels :

- `import numpy as np`
- `import numpy.linalg as al`
- `import numpy.random as rd`
- `import matplotlib.pyplot as plt`

## Exercice 1 (EDHEC 2023)

On considère le graphe $G$ suivant et on note $A$ la matrice d'adjacence de $G$.




*1.* Déterminer la matrice $A$ en expliquant sa construction.

- **1 pt : dans la matrice d'adjacence** $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant 5} \in \mathcal{M}_5(\mathbb{R})$ **(car le graphe comporte** $5$ **sommets), on met un** $1$ **en position** $(i, j)$ **s'il y a une arête entre les sommets** $i - 1$ **et** $j - 1$ **et un** $0$ **sinon (on prend en compte le fait que les sommets sont numérotés à partir de** $0$**)**
- **1 pt :** $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

*2. a)* Par lecture du graphe, donner (en listant leurs sommets) les chaînes de longueur 3 reliant les sommets 2 et 3. Combien y en a-t-il ?

- **1 pt : les différentes chaînes demandées sont :** $2-1-0-3$, $2-1-2-3$, $2-3-0-3$, $2-3-2-3$ **et** $2-3-4-3$
- **1 pt :** $5$ **chemins de longueur** $3$ **entre les sommets** $2$ **et** $3$

*b)* On considère la fonction **Python** suivante :

```
def f(M,k):
    N=al.matrix_power(M,k)
    return N
```

On suppose que l'on a saisi la matrice $A$ et on considère les instructions :

```
B=f(A,---)
n=B[---]
print(n)
```

Compléter ces instructions pour qu'elles permettent l'affichage du nombre trouvé à la question *2.a)*.

- **1 pt : le nombre de chemins de longueur** $3$ **reliant les sommets** $2$ **et** $3$ **est le coefficient en position** $(3, 4)$ **(3<sup>e</sup> ligne, 4<sup>e</sup> colonne) de la matrice** $A^3$ **(décalage d'indice parce que les sommets sont numérotés à partir de** $0$**)**
- **1 pt :** `B=f(A,3)`
- **1 pt :** `n=B[2,3]`

On note $D$ la matrice diagonale, appelée matrice des degrés de $G$, dont l'élément diagonal situé à la ligne $i$ et à la colonne $i$ est le degré du sommet numéro $i$ (ceci étant valable pour tout $i \in [\![1,5]\!]$).
On définit également la matrice $L$, appelée matrice laplacienne de $G$, en posant $L = D - A$.
On note $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5$ les valeurs propres non nécessairement distinctes de $L$ et on suppose $\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \lambda_3 \leqslant \lambda_4 \leqslant \lambda_5$.

*3.* ***a)*** Déterminer la matrice $D$.

- **1 pt :** $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

***b)*** Vérifier que l'on a $L = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

- **1 pt :** $L = D - A$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

***c)*** Pourquoi la matrice $L$ est-elle diagonalisable ?

- **1 pt : la matrice $L$ est symétrique donc diagonalisable**

*4.* On se propose dans cette question de montrer que les valeurs propres de $L$ sont positives ou nulles et que $\lambda_1 = 0$.

Soit $X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{pmatrix}$ et $U = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

***a)*** On identifie une matrice de $\mathscr{M}_1(\mathbb{R})$ à un réel. À quel ensemble appartient la quantité ${}^tXLX$ ?

- **1 pt : c'est une matrice à une ligne et une colonne, identifiée à un réel comme rappelé en début de question, d'où ${}^tXLX \in \mathbb{R}$**

***b)*** Exprimer ${}^tXLX$ en fonction de $a$, $b$, $c$, $d$ et $e$ puis montrer que l'on a :

$${}^tXLX = (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-d)^2 + (d-a)^2 + (e-d)^2$$

- **1 pt :** $LX = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a - b - d \\ -a + 2b - c \\ -b + 2c - d \\ -a - c + 3d - e \\ -d + e \end{pmatrix}$
- **1 pt :** ${}^tXLX = 2a^2 + 2b^2 + 2c^2 + 3d^2 + e^2 - 2ab - 2bc - 2ad - 2cd - 2de$

***c)*** On suppose que $X$ est un vecteur propre de $L$ associé à une certaine valeur propre $\lambda$. Déterminer $LX$ puis ${}^tXLX$ en fonction de $\lambda$, $a$, $b$, $c$, $d$ et $e$. En déduire que les valeurs propres de $L$ sont positives ou nulles.

- **1 pt :** $LX = \lambda X$
- **1 pt :** ${}^tXLX = \lambda\, {}^tXX = \lambda\left(a^2+b^2+c^2+d^2+e^2\right)$
- **1 pt : $X$ étant un vecteur propre, on a nécessairement $X \neq 0_{\mathscr{M}_{5,1}(\mathbb{R})}$ et donc $a^2+b^2+c^2+d^2+e^2>0$**
- **1 pt :** $\lambda = \dfrac{(a-b)^2+(b-c)^2+(a-d)^2+(c-d)^2+(d-e)^2}{a^2+b^2+c^2+d^2+e^2} \geqslant 0$

***d)*** Déterminer $LU$ et en déduire que $\lambda_1 = 0$.

- **1 pt :** $LU = 0_{\mathscr{M}_{5,1}(\mathbb{R})}$
- **1 pt :** $U \neq 0_{\mathscr{M}_{5,1}(\mathbb{R})}$ **donc $0$ est valeur propre de $L$**
- **1 pt : puisque toutes les valeurs propres de $L$ sont positives ou nulles d'après la question précédente et qu'on les a listées par ordre croissant, on a bien $\lambda_1 = 0$**

***5. a)*** À l'aide de la question ***3.b)***, montrer l'équivalence :

$$LX = 0 \iff X \in \operatorname{Vect}(U)$$

- **1 pt :** $\left\{\begin{array}{rcrcrcrcrcl} 2a & - & b & & & - & d & & & = & 0 \\ -a & + & 2b & - & c & & & & & = & 0 \\ & - & b & + & 2c & - & d & & & = & 0 \\ -a & & & - & c & + & 3d & - & e & = & 0 \\ & & & & & - & d & + & e & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} 2a & - & b & & & = & d \\ & & 3b & - & 2c & = & d \\ & & & & c & = & d \\ & & & & e & = & d \end{array}\right.$
- **1 pt :** $\left\{\begin{array}{rcrcrcrcrcl} 2a & - & b & & & - & d & & & = & 0 \\ -a & + & 2b & - & c & & & & & = & 0 \\ & - & b & + & 2c & - & d & & & = & 0 \\ -a & & & - & c & + & 3d & - & e & = & 0 \\ & & & & & - & d & + & e & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{llll} a & & & = d \\ & b & & = d \\ & & c & = d \\ & & & e = d \end{array}\right.$
- **1 pt :** $LX = 0 \iff X \in \operatorname{Vect}(U)$

***b)*** Conclure que $\lambda_2$, $\lambda_3$, $\lambda_4$ et $\lambda_5$ sont des réels strictement positifs.

- **1 pt :** $E_0(L) = \operatorname{Vect}(U)$
- **1 pt :** $\mathcal{F} = (U)$ **est une base de** $E_0(L)$
- **1 pt :** $\dim(E_0(L)) = 1$ **donc les valeurs propres $\lambda_2$, $\lambda_3$, $\lambda_4$ et $\lambda_5$ sont distinctes de $\lambda_1 = 0$ et donc sont non nulles**

## Exercice 2 (`EDHEC 2020`)

Soit $n$ un entier naturel non nul et $p$ un réel de $]0,1[$. On pose $q = 1-p$.
On dispose de deux urnes, l'urne $U$ qui contient $n$ boules numérotées de 1 à $n$ et l'urne $V$ qui contient des boules blanches en proportion $p$.
On pioche une boule au hasard dans $U$ et on note $X$ la variable aléatoire égale au numéro de la boule tirée.
Si $X$ prend la valeur $k$, on pioche $k$ boules dans $V$, une par une, avec remise à chaque fois de la boule tirée, et on appelle $Y$ la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches obtenues.

***1.*** Dans le cas où $n = 1$, reconnaître la loi de $Y$.

- **1 pt : description de l'expérience**
- **1 pt : description de la v.a.r.** $Y$
- **1 pt :** $Y \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$

*On revient au cas général*

*2.* Reconnaître la loi de $X$ et donner son espérance et sa variance.

- **3 pts :**
  - $\times$ **1 pt : description de l'expérience**
  - $\times$ **1 pt : description de la v.a.r.** $X$
  - $\times$ **1 pt :** $X \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 1, n \rrbracket)$
- **1 pt :** $\mathbb{E}(X) = \dfrac{n+1}{2}$ **et** $\mathbb{V}(X) = \dfrac{n^2-1}{12}$

*3.* Soit $k$ un élément de $\llbracket 1, n \rrbracket$. Reconnaître la loi de $Y$, conditionnellement à l'événement $[X = k]$, et en déduire, en distinguant les cas $0 \leqslant i \leqslant k$ et $k < i$, la probabilité $\mathbb{P}_{[X=k]}(\,[Y = i]\,)$.

- **3 pts : la loi conditionnelle de** $Y$ **sachant** $[X = k]$ **est la loi** $\mathcal{B}(k, p)$
  - $\times$ **1 pt : Si l'événement** $[X = k]$ **est réalisé, c'est que...**
    **0 à la moindre confusion d'objets**
  - $\times$ **1 pt : description expérience**
  - $\times$ **1 pt : description v.a.r.** $Y$

  **-2 si non-sens (par exemple** $\cancel{{}_{[X=k]}Y}$ **ou** $\cancel{Y \hookrightarrow \mathcal{B}(k,p)}$**)**
- **1 pt :** $\forall i \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}_{[X=k]}([Y = i]) = \begin{cases} \dbinom{k}{i} \, p^i \, (1-p)^{k-i} & \textbf{si } 0 \leqslant i \leqslant k \\ \\ 0 & \textbf{si } i > k \end{cases}$

*4.* On rappelle les commandes **Python** suivantes qui permettent de simuler des variables usuelles discrètes :

- `rd.randint(a, b+1)` simule une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $\llbracket a, b \rrbracket$,
- `rd.binomial(n, p)` simule une variable aléatoire suivant la loi binomiale de paramètres $n$, $p$,
- `rd.geometric(p)` simule une variable aléatoire suivant la loi géométrique de paramètre $p$,
- `rd.poisson(a)` simule une variable aléatoire suivant la loi de Poisson de paramètre $a$.

Compléter le script **Python** suivant afin qu'il permette de simuler les variables $X$ et $Y$.

```
n = int(input('entrez la valeur de n :'))
p = float(input('entrez la valeur de p : '))
X = ------
Y = ------
```

- **1 pt :** `X = rd.randint(1, n+1)`
- **2 pts :** `Y = rd.binomial(X, p)`

*5.* ***a)*** Justifier que l'ensemble $Y(\Omega)$ des valeurs prises par $Y$ est égal à $\llbracket 0, n \rrbracket$, puis démontrer :

$$\mathbb{P}(\,[Y = 0]\,) \;=\; \frac{q\,(1-q^n)}{n\,(1-q)}$$

- **1 pt : justification** $Y(\Omega) = [\![0,n]\!]$
- **4 pts :** $\mathbb{P}(\,[Y=0]\,) \;=\; \dfrac{q\,(1-q^n)}{n\,(1-q)}$
  × **1 pt :** $(\ [X=k]\ )_{k\in[\![1,n]\!]}$ **est un SCE**
  × **1 pt : FPT**
  × **1 pt :** $\mathbb{P}([X=k]) \neq 0$
  × **1 pt : fin du calcul**

*b)* Écrire, pour tout $i$ de $[\![1,n]\!]$, la probabilité $\mathbb{P}(\,[Y=i]\,)$ sous forme d'une somme de $n-i+1$ termes que l'on ne cherchera pas à simplifier.

- **1 pt : FPT sur le SCE** $(\ [X=k]\ )_{k\in[\![1,n]\!]}$
- **1 pt :** $\mathbb{P}([Y=i]) = \dfrac{1}{n}\left(\cancel{\displaystyle\sum_{k=1}^{i-1} \mathbb{P}_{[X=k]}([Y=i])} + \displaystyle\sum_{k=i}^{n} \mathbb{P}_{[X=k]}([Y=i])\right)$
- **1 pt : reste du calcul :** $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $\mathbb{P}([Y=i]) = \dfrac{1}{n}\, p^i \displaystyle\sum_{k=i}^{n} \binom{k}{i}\,(1-p)^{k-i}$

***6.*** *a)* Soit $i$ et $k$ deux entiers naturels tels que $1 \leqslant i \leqslant k \leqslant n$. Démontrer : $i\dbinom{k}{i} = k\dbinom{k-1}{i-1}$.

- **2 pts**

*b)* Établir ensuite que $Y$ possède une espérance et que celle-ci est donnée par :

$$\mathbb{E}(Y) \;=\; \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(k\sum_{i=1}^{k}\binom{k-1}{i-1}\,p^i\,q^{k-i}\right)$$

- **1 pt :** $Y$ **admet une espérance car c'est une v.a.r. finie**
- **1 pt :** $\mathbb{E}(Y) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} i\,\mathbb{P}([Y=i])$
- **1 pt : interversion sommes** $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=i}^{n} = \sum_{1\leqslant i\leqslant k\leqslant n} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{k}$
- **1 pt : utilisation qst précédente**

*c)* En déduire : $\mathbb{E}(Y) = \dfrac{(n+1)\,p}{2}$.

- **1 pt : décalage d'indice**
- **1 pt : binôme de Newton**
- **1 pt : reste du calcul**

***7.*** *a)* Établir :

$$\forall n \geqslant 1,\quad \mathbb{E}\big(Y\,(Y-1)\big) \;=\; \frac{1}{n}\sum_{k=2}^{n}\left(k\,(k-1)\sum_{i=2}^{k}\binom{k-2}{i-2}\,p^i\,q^{k-i}\right)$$

- **1 pt :** $Y(Y-1)$ **admet une espérance car c'est une v.a.r. finie**
- **1 pt : théorème de transfert**
- **1 pt : échange de somme**
- **1 pt : utilisations de *6.a)***

*b)* Montrer que l'on a :

$$\forall n \geqslant 2,\quad \mathbb{E}\big(Y\,(Y-1)\big) \;=\; \frac{(n^2-1)\,p^2}{3}$$

- **1 pt : formule du binôme de Newton**
- **2 pts : reste du calcul**

*c)* Vérifier que cette expression reste valable pour $n = 1$.

- **1 pt**
  **0 si erreur de logique**

*d)* Exprimer, sans chercher à la calculer, la variance de $Y$ en fonction de $\mathbb{E}\big(Y\,(Y-1)\big)$ et $\mathbb{E}(Y)$.

- **1 pt : formule de Koenig-Huygens**
- **1 pt : reste ($Y^2 = Y(Y-1) + Y$ et linéarité de l'espérance)**

## Exercice 3 (`EDHEC 2024`)

Dans tout l'exercice, la lettre $n$ désigne un entier naturel.
On pose $u_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{4-x^2}\,dx$ et on a en particulier $u_0 = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{4-x^2}\,dx$.

*1. a)* Déterminer les réels $a$ et $b$ tels que :

$$\forall x \in [0,1],\ \frac{1}{4-x^2} = \frac{a}{2-x} + \frac{b}{2+x}$$

- **1 pt : existence d'une solution $(a,b) = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$ convient**
- **2 pt : unicité de la solution (1 pt pour la gestion correcte des quantificateurs)**

*b)* En déduire que $u_0 = \frac{1}{4}\ln(3)$.

- **1 pt : pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $x \mapsto \dfrac{x^n}{4-x^2}$ est continue sur $[0,1]$ et donc $u_n$ est bien défini**
- **1 pt : linéarité de l'intégrale**
- **1 pt : $u_0 = \frac{1}{4}\ln(3)$**

*2.* Calculer $u_1$.

- **1 pt : $u_1 = \displaystyle\int_0^1 \frac{x}{4-x^2}\,dx = -\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{-2x}{4-x^2}\,dx = -\frac{1}{2}\Big[\ \ln(|4-x^2|)\ \Big]_0^1$**
- **1 pt : $u_1 = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{4}{3}\right) = \ln\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$**

*3. a)* Pour tout entier naturel $n$, exprimer $4u_n - u_{n+2}$ explicitement en fonction de $n$.

- **1 pt : $4u_n - u_{n+2} = \displaystyle\int_0^1 x^n\,dx$**
- **1 pt : $\displaystyle\int_0^1 x^n\,dx = \frac{1}{n+1}$**

*b)* Compléter la fonction **Python** ci-dessous afin qu'elle renvoie la valeur de $u_n$ à l'appel de `suite(n)`.

```
def suite(n):
    if (-1)**n==1:
        u=np.log(3)/4
        for k in range(2,n+1,2):
            u=4*u-...
    else:
        u=np.log(2/np.sqrt(3))
        for k in range(3,n+1,2):
            u=4*u-...
    return u
```

- **2 pt :** `u=4*u - 1/(k-1)`
- **1 pt : bonus si explications pertinentes**

*4. a)* Utiliser la définition de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour établir l'encadrement suivant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ \frac{1}{4(n+1)} \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{3(n+1)}$$

- **2 pt :** $\dfrac{x^n}{4} \leqslant \dfrac{x^n}{4-x^2} \leqslant \dfrac{x^n}{3}$ **(1 pt pour la qualité de la rédaction)**
- **1 pt : par croissance de l'intégrale, les bornes étant rangées dans l'ordre croissant**

*b)* En déduire la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ainsi que la valeur de $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

- **1 pt :** $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge vers** $0$
- **1 pt : thm d'encadrement cité**

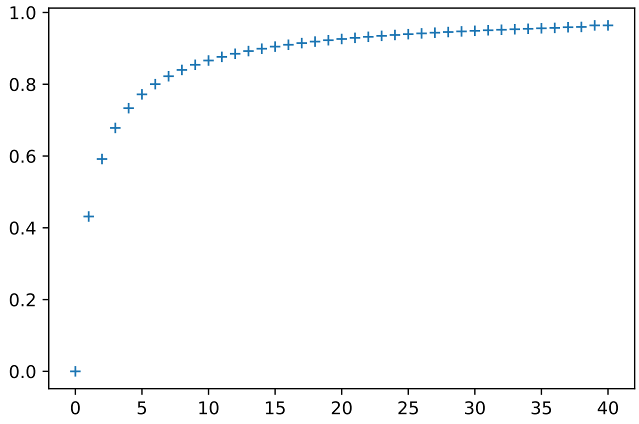
*c)* La série de terme général $u_n$ est-elle convergente ou divergente ? Pour quelle raison ?

- **2 pt : la série** $\sum \dfrac{1}{4(n+1)}$ **diverge (1 pt pour la justification)**
- **1 pt : pour tout** $n \geqslant 0$, $0 \leqslant \dfrac{1}{4(n+1)} \leqslant u_n$
- **1 pt : par critère de comparaison pour les séries à termes positifs, la série** $\sum u_n$ **diverge**

*5. a)* On considère le script suivant qui utilise la fonction déclarée plus haut :

```
x=np.arange(0,41)
u=[] # liste vide
for n in range(41):
    u.append(3*n*suite(n))
plt.plot(x,u,'+')
plt.show()
```

Ce script renvoie le graphique suivant :




Laquelle des quatre conjectures suivantes peut-on émettre quant au comportement de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ au voisinage de $+\infty$ ?

❶ $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} 3n$. ❷ $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$. ❸ $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{3n}$. ❹ $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$.

- **1 pt : ce script Python permet de tracer les** $40$ **premiers termes de la suite** $(3nu_n)_{n\in\mathbb{N}}$
- **1 pt : on conjecture que** $\lim\limits_{n\to+\infty} 3nu_n = 1$
- **1 pt : on conjecture que** $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{3n}$

***b)*** Établir, grâce à une intégration par parties, l'égalité suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \frac{1}{3(n+1)} - \frac{2}{n+1}\int_0^1 \frac{x^{n+2}}{(4-x^2)^2}\, dx$$

- **1 pt : procédons par intégration par parties en posant :**

$$\left| \begin{array}{ll} v'(x) = x^n & v(x) = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} \\ w(x) = \dfrac{1}{4-x^2} & w'(x) = \dfrac{2x}{(4-x^2)^2} \end{array} \right.$$

- **1 pt : cette intégration par parties est valide car** $v$ **et** $w$ **sont de classe** $\mathcal{C}^1$ **sur** $[0,1]$

***c)*** Montrer par encadrement que :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \frac{x^{n+2}}{(4-x^2)^2}\, dx = 0$$

- **3 pt :** $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^{n+2}}{16}\, dx \leqslant \int_0^1 \frac{x^{n+2}}{(4-x^2)^2}\, dx \leqslant \int_0^1 \frac{x^{n+2}}{9}\, dx$ **(1 pt pour les bornes dans l'ordre croissant, 1 pt pour les autres justifications)**
- **1 pt :** $\displaystyle\int_0^1 x^{n+2}\, dx = \frac{1}{n+3}$
- **1 pt : thm d'encadrement**

***d)*** Vérifier la conjecture établie à la question ***5.a)***.

- **1 pt :** $3nu_n = \dfrac{n}{n+1} - 6\dfrac{n}{n+1}\varepsilon_n$ **où** $\varepsilon_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$
- **1 pt :** $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{3n}$

## Exercice 4 (extrait de ECRICOME 2018)

Soit $A$ la matrice de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ donnée par : $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$.

*1.* Calculer $A^2 - 7A$.

- **1 pt :** $A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 7 & -14 \\ 0 & 9 & 0 \\ 7 & -7 & 23 \end{pmatrix}$
- **1 pt :** $A^2 - 7A = -12 I_3$

*2.* En déduire que les seuls réels susceptibles d'être valeurs propres de $A$ sont les réels 3 et 4.

- **1 pt : le polynôme $P(X) = X^2 - 7X + 12 = (X-3)(X-4)$ est un polynôme annulateur de la matrice $A$**
- **1 pt :** $\mathrm{Sp}(A) \subset \{3, 4\}$**, les seuls réels susceptibles d'être valeurs propres de $A$ sont** 3 **et** 4

*3.* Trouver alors toutes les valeurs propres de $A$, et pour chacune d'entre elles, donner une base du sous-espace propre associé.

- **1 pt :** $E_3(A) = \mathrm{Vect}\left( \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$
- **1 pt : comme $E_3(A) \neq \{0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})}\}$, 3 est bien valeur propre de $A$**
- **1 pt : La famille $\mathcal{F}_3 = \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ :**

  × **engendre $E_3(A)$,**

  × **est libre car constituée de deux vecteurs non colinéaires.**

  **Ainsi, $\mathcal{F}_3$ est une base de $E_3(A)$.**
- **1 pt :** $E_4(A) = \mathrm{Vect}\left( \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$
- **1 pt : comme $E_4(A) \neq \{0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})}\}$, 4 est bien valeur propre de $A$**
- **1 pt : La famille $\mathcal{F}_4 = \left( \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ :**

  × **engendre $E_4(A)$,**

  × **est libre car constituée d'un unique vecteur non nul.**

  **Ainsi, $\mathcal{F}_4$ est une base de $E_4(A)$.**

*4.* La matrice $A$ est-elle inversible ?

- **1 pt :** 0 **n'est pas valeur propre de $A$ donc $A$ est inversible**

*5.* La matrice $A$ est-elle diagonalisable ?

- **1 pt : par théorème de concaténation, la famille $\mathcal{F} = \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est libre**
- **1 pt :** $\mathrm{Card}(\mathcal{F}) = 3 = \dim(\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}))$
- **1 pt : $\mathcal{F}$ est une base de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ formée de vecteurs propres de $A$ donc $A$ est diagonalisable**