DS4 (vB) - Barème

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidat·es sont invité·es à ***encadrer*** *dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*
Aucun document n'est autorisé. ***L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique*** *est* ***interdite****. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*
Si au cours de l'épreuve, un candidat ou une candidate repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

On suppose, et c'est valable pour toute l'épreuve, que la librairie suivante est importée sous son alias habituel :

- `import numpy as np`
- `import numpy.linalg as al`
- `import numpy.random as rd`

Exercice (inspiré d'un oral ESCP voie S)

1. *a)* Montrer que, pour tout $\alpha > 0$, l'intégrale $I(\alpha) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t\mathrm{e}^{-\alpha t}\mathrm{d}t$ converge et calculer sa valeur.

- **1 pt : la fonction $t \mapsto t\mathrm{e}^{-\alpha t}$ est continue sur $[0, +\infty[$ donc l'intégrale $I(\alpha)$ est impropre en $+\infty$**
- **1 pt : IPP correcte sur un segment**
- **1 pt : croissances comparées citées**
- **1 pt : $I(\alpha) = \dfrac{1}{\alpha^2}$**

b) Montrer que, pour tout $x > 0$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t}{1 + x\,\mathrm{e}^t}\mathrm{d}t$ converge.

- **1 pt : la fonction $t \mapsto \dfrac{t}{1 + x\,\mathbf{e}^t}$ est continue sur $[0, +\infty[$ donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t}{1 + x\,\mathbf{e}^t}\mathbf{d}t$ est impropre en $+\infty$**
- **1 pt : $\dfrac{t}{1 + x\,\mathbf{e}^t} \underset{t\to+\infty}{\sim} \dfrac{t}{x\,\mathbf{e}^t} = \dfrac{1}{x}t\mathbf{e}^{-t}$**
- **1 pt : pour tout $t \geqslant 0$, $\dfrac{t}{1 + x\,\mathbf{e}^t} \geqslant 0$ et $\dfrac{1}{x}t\mathbf{e}^{-t} \geqslant 0$**
- **1 pt : reconnaissance de $I(1)$**

On définit la fonction f sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$\forall x > 0,\ f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t}{1 + x\,\mathrm{e}^t}\mathrm{d}t$$

2. Montrer que f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

- **1 pt : $f(x) - f(y) = (y - x)\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t\mathbf{e}^t}{(1 + x\,\mathbf{e}^t)(1 + y\,\mathbf{e}^t)}\mathbf{d}t$**
- **1 pt : linéarité citée**
- **2 pt : la fonction $t \mapsto \dfrac{t\mathbf{e}^t}{(1 + x\,\mathbf{e}^t)(1 + y\,\mathbf{e}^t)}$ est continue et positive sur $[0, +\infty[$. De plus cette fonction n'est pas identiquement nulle. On en déduit que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t\mathbf{e}^t}{(1 + x\,\mathbf{e}^t)(1 + y\,\mathbf{e}^t)}\mathbf{d}t > 0$ par positivité de l'intégrale (les bornes étant rangées dans l'ordre croissant)**

3. *a)* Montrer que, pour tout $x > 0$:

$$0 \leqslant f(x) \leqslant \frac{1}{x}$$

- **1 pt : $0 \leqslant \dfrac{t}{1 + x\mathbf{e}^t} \leqslant \dfrac{t}{x\mathbf{e}^t} = \dfrac{1}{x}t\mathbf{e}^{-t}$**
- **1 pt : par croissance de l'intégrale, les bornes étant rangées dans l'ordre croissant**
- **1 pt : $0 \leqslant f(x) \leqslant \dfrac{1}{x}$**

b) En déduire la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

- **1 pt : théorème d'encadrement**
- **1 pt : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$**

c) Démontrer que :

$$\frac{1}{x} - f(x) = \underset{x\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{x}\right)$$

- **2 pt :** $\dfrac{1}{x} - f(x) = \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t}{\mathbf{e}^t(1+x\mathbf{e}^t)}\mathbf{d}t$
- **2 pt :** $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{t}{\mathbf{e}^t(1+x\mathbf{e}^t)}\mathbf{d}t = 0$
- **1 pt : par croissance de l'intégrale, les bornes étant rangées dans l'ordre croissant**
- **1 pt :** $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x} - f(x)}{\frac{1}{x}} = 0$

d) En déduire un équivalent simple de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

- **1 pt :** $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{x}$

4. a) Montrer que, pour tout $x \in]0,1[$:

$$f(x) \geqslant \int_0^{-\ln(x)} \frac{t}{1+x\,\mathrm{e}^t}\mathrm{d}t$$

- **1 pt :** $-\ln(x) > 0$
- **1 pt : relation de Chasles citée**
- **1 pt : par positivité de l'intégrale, les bornes étant rangées dans l'ordre croissant :**

$$\int_{-\ln(x)}^{+\infty} \frac{t}{1+x\,\mathbf{e}^t}\mathbf{d}t \geqslant 0$$

b) En déduire que, pour tout $x \in]0,1[$:

$$f(x) \geqslant \frac{\ln(x)^2}{4}$$

- **1 pt : obtention de** $\dfrac{t}{1+x\,\mathbf{e}^t} \geqslant \dfrac{t}{2}$
- **1 pt : par croissance de l'intégrale, les bornes étant rangées dans l'ordre croissant :**

$$\int_0^{-\ln(x)} \frac{t}{1+x\,\mathbf{e}^t}\mathbf{d}t \geqslant \int_0^{-\ln(x)} \frac{t}{2}\mathbf{d}t$$

- **1 pt :** $\displaystyle\int_0^{-\ln(x)} \frac{t}{2}\mathbf{d}t = \frac{1}{2}\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^{-\ln(x)} = \frac{\ln(x)^2}{4}$

c) En déduire la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers 0.

- **1 pt : par théorème de comparaison :** $\displaystyle\lim_{x\to0} f(x) = +\infty$

5. a) Montrer que l'intégrale $J = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln(u)}{u(1+u)}\mathrm{d}u$ converge.

- **2 pt :** $\dfrac{\ln(u)}{u(1+u)} \underset{u\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{u^{\frac{3}{2}}}\right)$ **(1 pt pour citer les croissances comparées)**
- **1 pt : l'intégrale** $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{u^{\frac{3}{2}}}\mathbf{d}u$ **converge par critère de Riemann**
- **1 pt : argument de continuité et de positivité**

b) En utilisant le changement de variable $u = x\mathrm{e}^t$ que l'on justifiera, montrer que, pour tout $x > 0$:

$$f(x) = \ln(x)^2 - \ln(x)\ln(1+x) + \int_x^{+\infty} \frac{\ln(u)}{u(1+u)}\mathrm{d}u \qquad (*)$$

- **1 pt : le changement de variable est valide car la fonction** $\varphi : u \mapsto \ln(u) - \ln(x)$ **est de classe** $\mathcal{C}^1$ **sur** $[x, x\mathbf{e}^B]$
- **2 pt :** $\displaystyle\int_x^{x\mathbf{e}^B} \frac{\ln(x)}{u(1+u)}\mathbf{d}u = \ln(x)\left(\ln\left(\frac{\mathbf{e}^B}{1+x\mathbf{e}^B}\right) + \ln(1+x)\right)$
- **1 pt :** $\displaystyle\lim_{B\to+\infty} \ln\left(\frac{\mathbf{e}^B}{1+x\mathbf{e}^B}\right) = \ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln(x)$
- **1 pt : D'après la question *5.a)*, l'intégrale** $\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\ln(u)}{u(1+u)}\mathbf{d}u$ **est convergente et**

$$\lim_{B\to+\infty} \int_x^{x\mathbf{e}^B} \frac{\ln(u)}{u(1+u)}\mathbf{d}u = \int_x^{+\infty} \frac{\ln(u)}{u(1+u)}\mathbf{d}u$$

(point donné seulement si le reste du calcul est juste)

c) En déduire que f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et calculer $f'(x)$ pour tout $x > 0$.
Retrouver ainsi le sens de variations de f.

- **1 pt :** $\displaystyle f(x) = \ln(x)^2 - \ln(x)\ln(1+x) - \int_1^x \frac{\ln(u)}{u(1+u)}\mathbf{d}u + J$
- **1 pt : dérivation avec le théorème fondamental de l'analyse ou en passant par une primitive de** $u \mapsto \dfrac{\ln(u)}{u(1+u)}$
- **1 pt :** $f'(x) = \dfrac{\ln(x) - \ln(1+x)}{x}$
- **1 pt :** $f'(x) < 0$

6. *a)* Montrer par encadrement que :

$$\int_x^1 \frac{\ln(u)}{1+u}\mathrm{d}u \underset{x\to0}{=} o\left(\ln(x)^2\right)$$

- **2 pt :** $\displaystyle\int_x^1 \ln(u)\mathbf{d}u \leqslant \int_x^1 \frac{\ln(u)}{1+u}\mathbf{d}u \leqslant \int_x^1 \frac{\ln(u)}{2}\mathbf{d}u$ **(1 pt pour l'idée du bon encadrement et 1 pt pour la rédaction)**
- **1 pt :** $\displaystyle\int_x^1 \ln(u)\mathbf{d}u = \left[\ u\ln(u) - u\ \right]_x^1 = -1 - x\ln(x) + x$
- **1 pt :** $\displaystyle\lim_{x\to0} \frac{-1 - x\ln(x) + x}{\ln(x)^2} = \lim_{x\to0}\ -\frac{1}{\ln(x)^2} - \frac{x}{\ln(x)} + \frac{x}{\ln(x)^2} = 0$
- **1 pt : thm d'encadrement cité**

b) En utilisant $(*)$, montrer que, pour tout $x > 0$:

$$f(x) - \frac{\ln(x)^2}{2} = J - \ln(x)\ln(1+x) - \int_x^1 \frac{\ln(u)}{1+u}\mathrm{d}u$$

- **1 pt :** $\displaystyle f(x) - \frac{\ln(x)^2}{2} = \frac{\ln(x)^2}{2} - \ln(x)\ln(1+x) + \int_x^1 \frac{\ln(u)}{u}\mathbf{d}u - \int_x^1 \frac{\ln(u)}{1+u}\mathbf{d}u + J$
- **1 pt :** $\displaystyle\int_x^1 \frac{\ln(u)}{u}\mathbf{d}u = \int_x^1 \frac{1}{u}\ln(u)\mathbf{d}u = \left[\ \frac{\ln(u)^2}{2}\ \right]_x^1 = -\frac{\ln(x)^2}{2}$

c) En déduire un équivalent simple de $f(x)$ lorsque x tend vers 0.

- **2 pt :** $f(x) \underset{x\to0}{\sim} \dfrac{\ln(x)^2}{2}$ **(1 point pour les justifications)**

Problème 1 (sujet maison)

Partie 1 : Réduction d'une matrice

Soit n un entier naturel non nul fixé.
On note J_n la matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1.

1. Calculer J_n^2. En déduire les valeurs propres possibles de J_n.

- **1 pt :** $J_n^2 = nJ_n$
- **1 pt : le polynôme** $P(x) = x^2 - nx = x(x-n)$ **est un polynôme annulateur de** J_n
- **1 pt : les valeurs propres possibles de** J_n **sont** 0 **et** n

Dans la suite de l'énoncé, on note λ_1 (resp. λ_2) la plus petite (resp. la plus grande) des deux valeurs propres possibles de J_n. Ainsi, $\lambda_1 < \lambda_2$.

2. Calculer $\text{rg}(J_n)$. En déduire la dimension de $E_{\lambda_1}(J_n)$.

- **1 pt : toutes les colonnes de** J_n **sont égales et** J_n **n'est pas la matrice nulle donc** $\text{rg}(J_n) = 1$
- **1 pt :** $\dim(E_{\lambda_1}(J_n)) = \dim(E_0(J_n)) = n - 1$ **par théorème du rang matriciel**

3. ***a)*** Montrer que $E_{\lambda_2}(J_n) \neq \{0_{\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})}\}$ en exhibant un vecteur particulier.

- **1 pt :** $J_nU = \begin{pmatrix} n \\ \vdots \\ n \end{pmatrix} = nU$ **où** $U = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$
- **1 pt :** $U \neq 0_{\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$

b) En déduire que : $\dim(E_{\lambda_2}(J_n)) = 1$.

- **1 pt :** $\dim(E_{\lambda_2}(J_n)) \geqslant 1$
- **1 pt :** $\dim(E_{\lambda_2}(J_n)) \leqslant 1$ **par l'absurde**
- **1 pt : thm de concaténation cité**

4. Que peut-on conclure sur le spectre de J_n ?

- **1 pt :** $\text{Sp}(J_n) = \{0, n\}$
- **1 pt : explications**

5. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Soit $a \in \mathbb{R}$.

a) Montrer que :

$$\text{Sp}(A - aI_n) = \{\lambda - a \mid \lambda \in \text{Sp}(A)\}$$

- **2 pt : raisonnement par équivalence bien mené (1 pt pour le quantificateur existenciel)**

b) Montrer que, pour tout $\lambda \in \text{Sp}(A)$:

$$E_{\lambda-a}(A - aI_n) = E_\lambda(A)$$

- **1 pt : équivalence** $U \in E_{\lambda-a}(A - aI_n) \iff U \in E_\lambda(A)$

6. ***a)*** Déterminer le spectre de la matrice $J_n - I_n$.

- **1 pt :** $\text{Sp}(J_n - I_n) = \{-1, n-1\}$

b) Déterminer les dimensions des sous-espaces propres de la matrice $J_n - I_n$.

- **1 pt :** $\dim(E_{-1}(J_n - I_n)) = n - 1$ **et** $\dim(E_{n-1}(J_n - I_n)) = 1$

Partie 2 : Quelques exemples de graphes réguliers

On fixe un entier n supérieur ou égal à 2.
Dans cette partie et la suivante, on ne considérera que des graphes non orientés et sans boucle.
On dit qu'un graphe G est *régulier* si tous ses sommets ont le même degré. Plus précisément, on dira que G est *d-régulier* si tous ses sommets ont un degré égal à d (où $d \in [\![0, n-1]\!]$ est appelé le *degré de régularité* du graphe G).

7. Soit $d \in [\![0, n-1]\!]$. On considère dans cette question un graphe G à n sommets et d-régulier.
On note a le nombre d'arêtes de G. Exprimer a en fonction de d et n.

- **1 pt : formule d'Euler :**
$$\sum_{s \in S} \deg(s) = 2a$$
- **1 pt :** $a = \dfrac{dn}{2}$

8. On considère dans cette question un graphe G à n sommets et 0-régulier.

a) Quelle est la matrice d'adjacence A du graphe G ?

- **1 pt : la matrice d'adjacence A est la matrice nulle de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$**

b) Déterminer le spectre de A.

- **1 pt : La matrice nulle est diagonale donc ses valeurs propres sont exactement ses coefficients diagonaux**
- **1 pt :** $\mathrm{Sp}(A) = \{0\}$

9. On considère dans cette question un graphe G à n sommets et $(n-1)$-régulier.

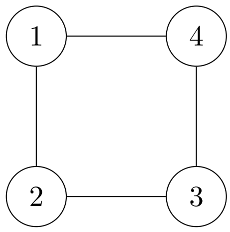
a) Exprimer la matrice d'adjacence A du graphe G à l'aide des notations de la partie 1.

- **1 pt :** $A = J_n - I_n$

b) En déduire le spectre de A.

- **1 pt :** $\mathrm{Sp}(A) = \{-1, n-1\}$

10. On considère dans cette question le graphe G suivant :



a) Le graphe G est-il régulier ? Si oui, préciser son degré de régularité.

- **1 pt : le graphe G est 2-régulier**

b) Expliciter la matrice d'adjacence A du graphe G sous forme de tableau matriciel.

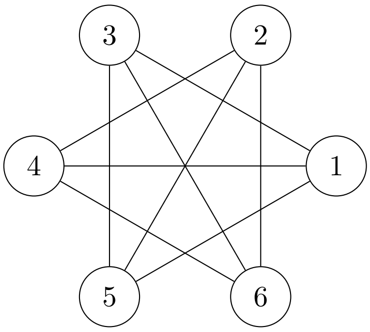
- **1 pt :** $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

c) Déterminer le spectre de A.

- **3 pt :** $\mathrm{rg}(A - \lambda I_4) = \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -\lambda \\ 0 & 1 & -\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 2\lambda & -\lambda^2 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda(\lambda-2)(\lambda+2) \end{pmatrix}\right)$

- **2 pt :** $\mathrm{Sp}(A) = \{-2, 0, 2\}$ **(1 pt pour la qualité de la rédaction)**

11. On considère dans cette question le graphe G suivant :



a) Le graphe G est-il régulier ? Si oui, préciser son degré de régularité.

- **1 pt : le graphe G est 3-régulier**

b) Expliciter la matrice d'adjacence A du graphe G sous forme de tableau matriciel.

- **1 pt :** $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

c) On suppose que la matrice A est définie en **Python** sous la variable `A`. Le script suivant

```
I = np.eye(6)
print(al.matrix_rank(A-3*I))
print(al.matrix_rank(A-I))
print(al.matrix_rank(A+2*I))
print(al.matrix_rank(A))
```

renvoie les nombres (dans cet ordre) : `5, 5, 4, 4`.
En déduire le spectre de A.

- **1 pt : traduction mathématique en terme de rang**
- **1 pt :** $\{-2, 0, 1, 3\} \subset \mathrm{Sp}(A)$
- **1 pt : thm du rang matriciel pour trouver les dimensions des sous-espaces propres**

$$\dim(E_{-2}(A)) = 2,\ \dim(E_0(A)) = 2,\ \dim(E_1(A)) = 1,\ \dim(E_3(A)) = 1$$

- **1 pt : raisonnement par l'absurde avec le thm de concaténation pour mq il n'y a pas d'autre valeur propre**

12. Au vu des différents exemples étudiés dans cette partie, quelle conjecture pouvez-vous faire sur la plus grande valeur propre de la matrice d'adjacence d'un graphe d-régulier ?

- **2 pt : on conjecture que la plus grande valeur propre de A est toujours égale à d, le degré de régularité du graphe régulier considéré**

Partie 3 : Un résultat général sur les graphes réguliers

Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Soit $d \in [\![0, n-1]\!]$.
Soit G un graphe à n sommets et d-régulier.
On note $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant n}}$ la matrice d'adjacence du graphe G.

13. Soit $i \in [\![1,n]\!]$. Que vaut la somme $\sum\limits_{j=1}^{n} a_{i,j}$?

En déduire une valeur propre de A. On explicitera un vecteur propre associé à cette valeur propre.

- **1 pt :** $\sum\limits_{j=1}^{n} a_{i,j} = d$
- **1 pt :** $AU = \begin{pmatrix} \sum\limits_{j=1}^{n} a_{1,j} \\ \vdots \\ \sum\limits_{j=1}^{n} a_{n,j} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d \\ \vdots \\ d \end{pmatrix} = dU$ **où** $U = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ **et** $U \neq 0_{\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$
- **1 pt :** d **est une valeur propre de** A **et** U **est un vecteur propre de** A **associé à la valeur propre** d

14. Soit λ une valeur propre de A. Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0_{\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})}\}$ tel que :

$$AX = \lambda X \quad (*)$$

On fixe $i_0 \in [\![1,n]\!]$ tel que :

$$|x_{i_0}| = \max_{i \in [\![1,n]\!]} |x_i|$$

a) En utilisant $(*)$, montrer que : $|\lambda|\,|x_{i_0}| \leqslant d\,|x_{i_0}|$.

- **1 pt : en ne gardant que la ligne** i_0**, on obtient :**

$$\sum_{j=1}^{n} a_{i_0,j} x_j = \lambda x_{i_0}$$

- **2 pt :** $|\lambda x_{i_0}| \leqslant |x_{i_0}|\, d$ **(1 pt pour la qualité de la rédaction)**
- **1 pt : inégalité triangulaire citée**

b) Conclure que : $|\lambda| \leqslant d$.

- **1 pt :** $|x_{i_0}| > 0$ **par l'absurde**

Problème 2 (ESCP 2004)

Dans tout le problème, r désigne un entier naturel vérifiant $1 \leqslant r \leqslant 10$. Une urne contient 10 boules distinctes B_1, B_2, ... , B_{10}. Une expérience aléatoire consiste à y effectuer une suite de tirages d'une boule **avec remise**, chaque boule ayant la même probabilité de sortir à chaque tirage.
Cette expérience est modélisée par un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.

Partie I : Etude du nombre de tirages nécessaires pour obtenir au moins une fois chacune des boules $B_1, \ldots, B_r$

On suppose que le nombre de tirages nécessaires pour obtenir au moins une fois chacune des boules $B_1, \ldots, B_r$ définit une variable aléatoire Y_r sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.

1. Cas particulier $r = 1$.
Montrer que la variable aléatoire Y_1 suit une loi géométrique ; préciser son paramètre, son espérance et sa variance.

- **2 pts :** $Y_1 \hookrightarrow \mathcal{G}\left(\frac{1}{10}\right)$
  - × **1 pt : description expérience**
  - × **1 pt : description v.a.r.**
- **1 pt :** $\mathbb{E}(Y_1) = 10$ **et** $\mathbb{V}(Y_1) = 90$

2. On suppose que r est supérieur ou égal à 2.

a) Calculer la probabilité pour que les r boules $B_1, B_2, \ldots, B_r$ sortent dans cet ordre aux r premiers tirages.

- **1 pt :** $A = [T_1 = 1] \cap [T_2 = 2] \cap \cdots \cap [T_r = r]$
- **1 pt :** $\mathbb{P}(A) = \left(\frac{1}{10}\right)^r$ **par indépendance des tirages**

b) En déduire la probabilité $\mathbb{P}([Y_r = r])$.

- **2 pts :** $\mathbb{P}(\ [Y_r = r]\ ) = \dfrac{r!}{10^r}$

c) Préciser l'ensemble des valeurs que peut prendre la variable aléatoire Y_r.

- **1 pt :** $Y_r(\Omega) = [\![r, +\infty[\![$

d) Compléter la fonction **Python** `simulY(r)` pour qu'elle simule la variable aléatoire Y_r.

```
def simulY(r):
    rang = 0
    tab = np.zeros(r)
    while np.sum(tab) < r :
        rang += 1
        tirage = rd.randint(1, 11)
        if tirage <= r:
            if tab[tirage-1] == 0 :
                tab[tirage-1] += 1
    return rang
```

- **5 pt : 1 pt par ligne**

3. On suppose encore que r est supérieur ou égal à 2. Pour tout entier i vérifiant $1 \leqslant i \leqslant r$, on désigne par W_i la variable aléatoire représentant le nombre de tirages nécessaires pour que, pour la première fois, i boules distinctes parmi les boules B_1, B_2, ... , B_r soient sorties (en particulier, on a : $W_r = Y_r$). On pose :

$$\left\{ \begin{array}{l} X_1 = W_1 \\ \forall i \in [\![2, r]\!], \ X_i = W_i - W_{i-1} \end{array} \right.$$

On admet que les variables aléatoires X_1, ..., X_r sont indépendantes.

a) Exprimer la variable aléatoire Y_r à l'aide des variables aléatoires X_1, ..., X_r.

- **2 pts :** $Y_r = \sum\limits_{i=1}^{r} X_i$ **(dont 1 pt pour le télescopage)**

b) Interpréter concrètement la variable aléatoire X_i pour tout i vérifiant $1 \leqslant i \leqslant r$.

- **1 pt :** X_i **est la v.a.r. correspondant au nombre de tirages nécessaires pour obtenir une** $i^{\text{ème}}$ **boule non encore obtenue**

c) Montrer que, pour tout i vérifiant $1 \leqslant i \leqslant r$, la variable aléatoire X_i suit une loi géométrique ; préciser son espérance et sa variance.

- **2 pts :** $X_i \hookrightarrow \mathcal{G}\left(\dfrac{r-i+1}{10}\right)$
  - × **1 pt : description expérience**
  - × **1 pt : description v.a.r.**
- **1 pt :** $\mathbb{E}(X_i) = \dfrac{10}{r-i+1}$ **et** $\mathbb{V}(X_i) = 10 \ \dfrac{10-r+i-1}{(r-i+1)^2}$

d) On pose : $S_1(r) = \sum\limits_{k=1}^{r} \dfrac{1}{k}$ et $S_2(r) = \sum\limits_{k=1}^{r} \dfrac{1}{k^2}$.
Exprimer l'espérance $\mathbb{E}(Y_r)$ et la variance $\mathbb{V}(Y_r)$ de Y_r à l'aide de $S_1(r)$ et de $S_2(r)$.

- **1 pt :** $\mathbb{E}(Y_r) = 10\, S_1(r)$ **(par linéarité de l'espérance)**
- **2 pts :** $\mathbb{V}(Y_r) = 100\, S_2(r) - 10\, S_1(r)$ **(dont 1 pt pour citer l'indépendance de** $X_1, \cdots, X_r$**)**

4. ***a)*** Soit k un entier naturel non nul. Donner un encadrement de l'intégrale $\displaystyle\int_k^{k+1} \frac{1}{t}\, dt$.

- **1 pt :** $\dfrac{1}{k} \geqslant \dfrac{1}{t} \geqslant \dfrac{1}{k+1}$
- **1 pt : croissance de l'intégrale, les bornes étant dans l'ordre croissant**
- **1 pt :** $\dfrac{1}{k+1} \ \leqslant \ \displaystyle\int_k^{k+1} \frac{1}{t}\, dt \ \leqslant \ \frac{1}{k}$

b) Si r est supérieur ou égal à 2, donner un encadrement de $S_1(r)$ et en déduire la double inégalité :

$$10 \ln(r+1) \ \leqslant \ \mathbb{E}(Y_r) \ \leqslant \ 10 \left(\ln(r) + 1\right)$$

- **1 pt : sommation inégalité de droite de** 1 **à** r **et relation de Chasles**
- **1 pt :** $S_1(r) \geqslant \ln(r+1)$
- **1 pt : sommation inégalité de gauche de** 1 **à** $(r-1)$
- **1 pt :** $S_1(r) \leqslant \ln(r) + 1$
- **1 pt :** $10 \ln(r+1) \leqslant \mathbb{E}(Y_r) \leqslant 10 \left(\ln(r) + 1\right)$

c) Si r supérieur ou égal à 2, établir par une méthode analogue à celle de la question précédente, la double inégalité :

$$1 - \frac{1}{r+1} \ \leqslant \ S_2(r) \ \leqslant \ 2 - \frac{1}{r}$$

En déduire un encadrement de $\mathbb{V}(Y_r)$.

- **1 pt :** $\dfrac{1}{k^2} \geqslant \dfrac{1}{t^2} \geqslant \dfrac{1}{(k+1)^2}$
- **1 pt : croissance de l'intégrale, les bornes étant dans l'ordre croissant**
- **1 pt :** $1 - \dfrac{1}{r+1} \leqslant S_2(r)$
- **1 pt :** $S_2(r) \leqslant 2 - \dfrac{1}{r}$
- **1 pt :** $100 \left(1 - \dfrac{1}{r+1}\right) - 10 \left(\ln(r) + 1\right) \leqslant \mathbb{V}(Y_r) \leqslant 100 \left(2 - \dfrac{1}{r}\right) - 10 \ln(r+1)$

Partie II : Etude du nombre de boules distinctes parmi les boules B_1, B_2, ..., B_r tirées au moins une fois au cours des n premiers tirages

Pour tout entier n supérieur ou égal à 1, on suppose que le nombre de boules distinctes parmi les boules B_1, B_2, ..., B_r tirées au moins une fois au cours des n premiers tirages, définit une variable aléatoire Z_n sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$. On note $\mathbb{E}(Z_n)$ l'espérance de Z_n et on pose $Z_0 = 0$.
Pour tout entier naturel n non nul et pour tout entier naturel k, on note $p_{n,k}$ la probabilité de l'événement $[Z_n = k]$ et on pose : $p_{n,-1} = 0$.

5. Étude des cas particuliers $n = 1$ et $n = 2$.

a) Déterminer la loi de Z_1 et donner son espérance.

- **1 pt :** $Z_1(\Omega) = \{0, 1\}$
- **1 pt :** $Z_1 \hookrightarrow \mathcal{B}\left(\mathbb{P}([Z_1 = 1])\right)$
- **1 pt :** $\mathbb{P}([Z_1 = 1]) = \dfrac{r}{10}$

b) On suppose, dans cette question, que r est supérieur ou égal à 2.
Déterminer la loi de Z_2 et montrer que son espérance est donnée par : $\mathbb{E}(Z_2) = \dfrac{19\, r}{100}$.

- **1 pt :** $Z_2(\Omega) = \{0, 1, 2\}$
- **3 pts :** $\mathbb{P}([Z_2 = 0]) = \dfrac{(10-r)^2}{100}$
  - × **1 pt : énoncé FPT** $\mathbb{P}([Z_2 = 0]) = \sum\limits_{i=0}^{1} \mathbb{P}([Z_1 = i] \cap [Z_2 = 0]) = \sum\limits_{i=0}^{1} \mathbb{P}([Z_1 = i])\ \mathbb{P}_{[Z_1=i]}([Z_2 = 0])$
  - × **1 pt :** $\mathbb{P}_{[Z_1=0]}([Z_2 = 0]) = \dfrac{10-r}{10}$ **et** $\mathbb{P}_{[Z_1=1]}([Z_2 = 0]) = 0$
  - × **1 pt : conclusion**
- **2 pts :** $\mathbb{P}([Z_2 = 2]) = \dfrac{r(r-1)}{100}$
  - × **1 pt : de même** $\mathbb{P}([Z_2 = 2]) = \sum\limits_{i=0}^{1} \mathbb{P}([Z_1 = i])\ \mathbb{P}_{[Z_1=i]}([Z_2 = 2])$
  - × **1 pt :** $\mathbb{P}_{[Z_1=0]}([Z_2 = 2]) = 0$ **et** $\mathbb{P}_{[Z_1=1]}([Z_2 = 2]) = \dfrac{r-1}{10}$ **et conclusion**
- **1 pt :** $\mathbb{P}([Z_2 = 1]) = 1 - \mathbb{P}([Z_2 = 1]) - \mathbb{P}([Z_2 = 0]) = \dfrac{21\, r - 2\, r^2}{100}$ **via SCE** $([Z_2 = i])_{i \in [\![0,2]\!]}$

- **1 pt :** $\mathbb{E}(Z_2) = \dfrac{19\,r}{100}$

6. Établir, pour tout entier naturel n non nul et pour tout entier naturel k au plus égal à r, l'égalité :

$$10\,p_{n,k} \;=\; (10-r+k)\,p_{n-1,k} + (r+1-k)\,p_{n-1,k-1} \qquad (*)$$

Vérifier que cette égalité reste vraie dans le cas où k est supérieur ou égal à $r+1$.

- **2 pts :** $\mathbb{P}([Z_n = k]) = \mathbb{P}([Z_{n-1} = k-1] \cap [Z_n = k]) + \mathbb{P}([Z_{n-1} = k] \cap [Z_n = k])$
  - × **soit par une démo directe :** $[Z_n = k]) = ([Z_{n-1} = k-1] \cap [Z_n = k]) \cup ([Z_{n-1} = k] \cap [Z_n = k])$ **+ incompatibilité**
  - × **soit par la FPT :** $\mathbb{P}([Z_n = k]) = \sum\limits_{i=0}^{r} \mathbb{P}([Z_{n-1} = i] \cap [Z_n = k])$ **+** $[Z_{n-1} = i] \cap [Z_n = k] = \varnothing$ **sauf si** $i = k-1$ **ou** $i = k$
- **1 pt :** $\mathbb{P}_{[Z_{n-1}=k-1]}([Z_n = k]) = \dfrac{r+1-k}{10}$
- **1 pt :** $\mathbb{P}_{[Z_{n-1}=k]}([Z_n = k]) = \dfrac{10-r+k}{10}$
- **1 pt :** $\mathbb{P}(\,[Z_n = k]\,) = \mathbb{P}(\,[Z_{n-1} = k-1]\,)\,\mathbb{P}_{[Z_{n-1}=k-1]}(\,[Z_n = k]\,) + \mathbb{P}(\,[Z_{n-1} = k]\,)\,\mathbb{P}_{[Z_{n-1}=k]}(\,[Z_n = k]\,)$
- **1 pt : conclure**
- **1 pt : égalité toujours vraie si** $k \geqslant r+1$

7. Pour tout entier naturel non nul n, on définit le polynôme Q_n par :

$$\left\{\begin{array}{rcl} Q_0(X) & = & 1 \\ Q_n(X) & = & \sum\limits_{k=0}^{n} p_{n,k}\, x^k \end{array}\right.$$

a) Préciser les polynômes Q_1 et Q_2.

- **1 pt :** $Q_1(X) = \dfrac{10-r}{10} + \dfrac{r}{10}\;X$
- **1 pt :** $Q_2(X) = \dfrac{(10-r)^2}{100} + \dfrac{21\,r - 2\,r^2}{100}\;X + \dfrac{r(r-1)}{100}\;X^2$

b) Calculer $Q_n(1)$ et exprimer $Q_n'(1)$ en fonction de $\mathbb{E}(Z_n)$, où Q_n' désigne la dérivée du polynôme Q_n.

- **1 pt :** $Q_n(1) = 1$ **car** $([Z_n = k])_{k \in [\![0,n]\!]}$ **est un SCE**
- **2 pts :** $Q_n'(1) = \mathbb{E}(Z_n)$ **dont 1 pt pour** $Z_n(\Omega) = [\![0,r]\!]$

c) En utilisant l'égalité $(*)$, établir, pour tout réel x et pour tout entier naturel n non nul, la relation suivante :

$$10\,Q_n(x) \;=\; (10-r+rx)\,Q_{n-1}(x) + x(1-x)\,Q_{n-1}'(x) \qquad (**)$$

- **1 pt :** $10\,Q_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \big((10-r+k)\,p_{n-1,k} + (r+1-k)\,p_{n-1,k-1}\big)\,x^k$ **(d'après *6.*)**
- **1 pt :** $= (10-r) \sum\limits_{k=0}^{n-1} p_{n-1,k}\,x^k + x \sum\limits_{k=0}^{n-1} k\,p_{n-1,k}\,x^{k-1} + r \sum\limits_{k=1}^{n} p_{n-1,k-1}\,x^k - \sum\limits_{k=1}^{n} (k-1)\,p_{n-1,k-1}\,x^k$ **(car** $p_{n-1,n} = p_{n-1,1} = 0$**)**
- **1 pt :** $= (10-r) \sum\limits_{k=0}^{n-1} p_{n-1,k}\,x^k + x \sum\limits_{k=0}^{n-1} k\,p_{n-1,k}\,x^{k-1} + r \sum\limits_{k=0}^{n-1} p_{n-1,k}\,x^{k+1} - \sum\limits_{k=0}^{n-1} k\,p_{n-1,k}\,x^{k+1}$
- **1 pt :** $= (10-r)\,Q_{n-1}(x) + x\,Q_{n-1}'(x) + x\,r\,Q_{n-1}(x) - x^2\,Q_{n-1}'(x)$

d) En dérivant membre à membre l'égalité $(**)$, former, pour tout entier naturel n non nul, une relation entre les espérances $\mathbb{E}(Z_n)$ et $\mathbb{E}(Z_{n-1})$.
En déduire, pour tout entier naturel n, la valeur de $\mathbb{E}(Z_n)$ en fonction de n et de r.

- **1 pt : dérivation** $(**)$ **:** $10\,Q_n'(x) = r\,Q_{n-1}(x)+(11-r+(r-2)\,x)\,Q_{n-1}'(x)+x\,(1-x)\,Q_{n-1}''(x)$
- **1 pt :** $10\,\mathbb{E}(Z_n) = 9\,\mathbb{E}(Z_{n-1}) + r$ **(d'après *7.b)*)**
- **3 pts :** $\mathbb{E}(Z_n) = r\left(1-\left(\dfrac{9}{10}\right)^n\right)$
  - × **1 pt : résolution de l'équation de point fixe** ($\ell = r$)
  - × **1 pt :** $u_n = \mathbb{E}(Z_n) - r$ **est géométrique de raison** $\dfrac{9}{10}$
  - × **1 pt :** $u_0 = -r$

8. a) Pour tout entier naturel n, le polynôme Q_n'' désigne la dérivée du polynôme Q_n'.
En utilisant une méthode semblable à celle de la question précédente, trouver pour tout entier naturel n non nul, une relation entre $Q_n''(1)$ et $Q_{n-1}''(1)$.
En déduire, pour tout entier naturel n non nul, l'égalité suivante :

$$Q_n''(1) \;=\; r(r-1)\left(1+\left(\frac{8}{10}\right)^n - 2\left(\frac{9}{10}\right)^n\right)$$

- **1 pt : deux dérivations de** $(**)$ **:** $10\,Q_n''(x) = 2\,(r-1)\,Q_{n-1}'(x)+\big(12-r+(r-4)\,x\big)\,Q_{n-1}''(x)+ x\,(1-x)\,Q_{n-1}^{(3)}(x)$
- **1 pt :** $10\,Q_n''(1) = 2\,(r-1)\,Q_{n-1}'(1) + 8\,Q_{n-1}''(1)$
- **3 pts :** $Q_n''(1) = r\,(r-1)\,\left(1+\left(\dfrac{8}{10}\right)^n - 2\,\left(\dfrac{9}{10}\right)^n\right)$
  - × **1 pt : initialisation**
  - × **2 pts : hérédité (dont 1 pt pour utilisation *7.d)*)**

b) Calculer, pour tout entier naturel n, la variance de la variable aléatoire Z_n en fonction de n et de r.

- **1 pt :** $Q_n''(x) = \sum\limits_{k=2}^{n} k\,(k-1)\,p_{n,k}\,x^{k-2}$
- **1 pt :** $Q_n''(1) = \mathbb{E}(Z_n^2) - \mathbb{E}(Z_n)$
- **1 pt :** $\mathbb{V}(Z_n) = Q_n''(1) + Q_n'(1) - \big(Q_n'(1)\big)^2$
- **1 pt :** $\mathbb{V}(Z_n) = r\,(r-1)\,\left(\dfrac{8}{10}\right)^n + r\,\left(\dfrac{9}{10}\right)^n - r^2\,\left(\dfrac{9}{10}\right)^{2n}$ **(d'après *7.d)* et *8.a)*)**