DS5 (vA)

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
*Les candidat·es sont invité·es à **encadrer** dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*
*Aucun document n'est autorisé. **L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique** est **interdite**. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*
Si au cours de l'épreuve, un candidat ou une candidate repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

On suppose, et c'est valable pour toute l'épreuve, que la librairie suivante est importée sous son alias habituel :

- `import numpy.random as rd`

Exercice 1

Notations et objectifs

On considère deux variables aléatoires X et Y, définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$, et indépendantes.

On suppose que X est une variable à densité et on note F_X sa fonction de répartition.

On suppose par ailleurs que la loi de Y est donnée par $\mathbb{P}\big([Y=1]\big) = \mathbb{P}\big([Y=-1]\big) = \dfrac{1}{2}$.

L'indépendance de X et Y se traduit par les égalités suivantes, valables pour tout réel x :

$$\mathbb{P}\big([X \leqslant x] \cap [Y=1]\big) = \mathbb{P}\big([X \leqslant x]\big)\, \mathbb{P}\big([Y=1]\big) \text{ et } \mathbb{P}\big([X \leqslant x] \cap [Y=-1]\big) = \mathbb{P}\big([X \leqslant x]\big)\, \mathbb{P}\big([Y=-1]\big)$$

On pose $Z = XY$ et on admet que Z est, elle-aussi, une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.

On se propose d'établir deux résultats utiles pour la suite dans la partie 1, puis d'en déduire la loi de la variable aléatoire Z en fonction de la loi de X dans les parties 2 et 3.

Partie 1 : expression de la fonction de répartition de Z en fonction de celle de X

1. Rappeler l'expression des fonctions de répartition d'une variable aléatoire suivant une loi uniforme sur $[a,b]$ (avec $a<b$) et d'une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre λ (avec $\lambda > 0$).

2. En utilisant le système complet d'événements $([Y=1], [Y=-1])$, montrer que la fonction de répartition F_Z de la variable aléatoire Z est donnée par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F_Z(x) = \frac{1}{2}\ \left(F_X(x) - F_X(-x) + 1\right)$$

Partie 2 : Étude de deux premiers exemples

3. On suppose que la loi de X est la loi normale centrée réduite.
Reconnaître la loi de Z.

4. On suppose que la loi de X est la loi uniforme sur $[0,1]$.

a) Déterminer l'expression de $F_X(-x)$ selon les valeurs prises par x.

b) Déterminer $F_Z(x)$ pour tout réel x, puis reconnaître la loi de Z.

Partie 3 : Étude du cas où la loi de X est la loi exponentielle de paramètre 1

5. a) Montrer que la fonction de répartition F_Z de la variable aléatoire Z est définie par :

$$F_Z : x \mapsto \begin{cases} 1 - \dfrac{1}{2}\, \mathrm{e}^{-x} & \text{si } x \geqslant 0 \\[2mm] \dfrac{1}{2}\, \mathrm{e}^{x} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

b) En déduire que Z est une variable aléatoire à densité.

c) Établir alors qu'une densité de Z est la fonction f_Z définie pour tout réel x par :

$$f_Z(x) = \frac{1}{2}\, \mathrm{e}^{-|x|}$$

6. ***a)*** Donner la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} x\,\mathrm{e}^{-x}\,dx$.

b) Montrer que f_Z est une fonction paire et en déduire l'existence et la valeur de $\mathbb{E}(Z)$.

7. ***a)*** Donner la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^2\,\mathrm{e}^{-x}\,dx$.

b) En déduire l'existence et la valeur de $\mathbb{E}(Z^2)$, puis donner la valeur de la variance de Z.

8. ***a)*** Déterminer $\mathbb{E}(X)\,\mathbb{E}(Y)$ et comparer avec $\mathbb{E}(Z)$. Quel résultat retrouve-t-on ainsi ?

b) Exprimer Z^2 en fonction de X, puis en déduire de nouveau la variance de Z.

9. Soit U et V des variables aléatoires suivant respectivement la loi de Bernoulli de paramètre $\dfrac{1}{2}$ et la loi uniforme sur $[0,1[$.

a) On pose $Q = -\ln(1-V)$ et on admet que Q est une variable aléatoire. Déterminer la fonction de répartition de Q et en déduire la loi suivie par la variable aléatoire Q.

b) On pose $R = 2U - 1$ et on admet que R est une variable aléatoire. Déterminer $R(\Omega)$ et donner la loi suivie par la variable R.

c) *Informatique.*
En tenant compte des résultats des questions ***9.a)*** et ***9.b)***, écrire en **Python** un programme permettant de simuler la variable aléatoire Z.

Exercice 2

Dans tout l'exercice, $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des matrices carrées d'ordre 3 à coefficients réels. On notera respectivement I_3 et 0_3 la matrice identité et la matrice nulle de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

Soit F l'ensemble des matrices de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ de la forme $\begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$, où a et b sont des réels quelconques.

Soit G l'ensemble des matrices M de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $M^2 = M$.

Partie I - Étude des ensembles F et G

1. F est-il un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$?
Si oui, déterminer une base de F et préciser la dimension de F.

2. G est-il un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$?
Si oui, déterminer une base de G et préciser la dimension de G.

3. On considère dans cette question la matrice $A = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

a) Démontrer que $A \in F \cap G$.

b) En déduire un polynôme annulateur de A.

c) Déterminer les valeurs propres de A, et donner une base de chaque sous-espace propre associé.

d) La matrice A est-elle inversible ? Est-elle diagonalisable ?

Partie II - Réduction d'une matrice à paramètres

Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. On pose $A = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$, $U_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $U_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $U_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

4. Calculer AU_1, AU_2 et AU_3. Que peut-on en déduire ?

5. Démontrer que (U_1, U_2, U_3) est une base de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

6. En déduire que A est diagonalisable et expliciter une matrice $P \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ inversible telle que $A = PDP^{-1}$ où

$$D = \begin{pmatrix} a+2b & 0 & 0 \\ 0 & a-b & 0 \\ 0 & 0 & a-b \end{pmatrix}$$

7. Vérifier que :

$$\mathrm{Sp}(A) \subset \mathbb{R}_- \iff a \leqslant \min(b, -2b)$$

Partie III - Étude d'un système différentiel linéaire à paramètres

Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. On considère dans cette partie le système différentiel linéaire

$$(S) : \left\{ \begin{array}{ccccccc} x' & = & ax & + & by & + & bz \\ y' & = & bx & + & ay & + & bz \\ z' & = & bx & + & by & + & az \end{array} \right.$$

où x, y et z désignent des fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

8. A l'aide des résultats de la partie **II**, donner la forme générale des solutions de (S).

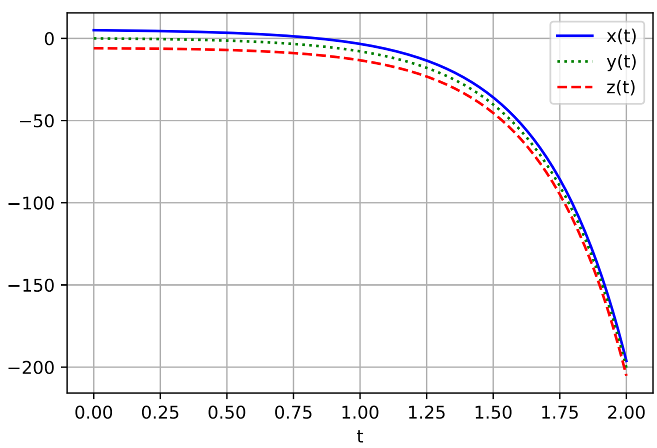
9. Quel résultat permet d'affirmer l'existence d'une unique solution $X_0 : t \mapsto \begin{pmatrix} x_0(t) \\ y_0(t) \\ z_0(t) \end{pmatrix}$ du système différentiel (S) telle que $X_0(0) = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$? Déterminer explicitement cette solution.

10. On suppose dans cette question que $a > 0$.

a) Vérifier que : $a > \min(b, -2b)$.

b) Expliciter une solution de (S) dont la trajectoire est divergente.
(On pourra distinguer des cas selon le signe de b)

11. On suppose dans cette question que $a = -3$ et $b = -1$. Expliquer pourquoi le tracé ci-dessous ne correspond à aucune solution de (S).



Exercice 3

On désigne par n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On dispose de n urnes, numérotées de 1 à n, contenant chacune n boules. On répète n épreuves, chacune consistant à choisir une urne au hasard et à en extraire une boule au hasard. On suppose que les choix des urnes sont indépendants les uns des autres.

Pour tout i de $\{1, 2, \dots, n\}$, on note X_i la variable aléatoire prenant la valeur 1 si l'urne numérotée i contient toujours n boules au bout de ces n épreuves, et qui prend la valeur 0 sinon.

1. ***a)*** Pour tout i et tout k, éléments de $\{1, 2, \dots, n\}$, on note $U_{i,k}$ l'événement « l'urne numéro i est choisie à la $k^{\text{ème}}$ épreuve ».
Écrire l'événement $[X_i = 1]$ à l'aide de certains des événements $U_{i,k}$, puis montrer que :

$$\forall i \in \{1, 2, \dots, n\},\ \mathbb{P}\big([X_i = 1]\big) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$$

b) Justifier également que, si i et j sont deux entiers distincts, éléments de $\{1, 2, \dots, n\}$, on a :

$$\mathbb{P}\big([X_i = 1] \cap [X_j = 1]\big) = \left(1 - \frac{2}{n}\right)^n$$

c) Comparer $\left(1 - \frac{2}{n}\right)$ et $\left(1 - \frac{1}{n}\right)^2$ et en déduire que, si i et j sont deux entiers distincts, éléments de $\{1, 2, \dots, n\}$, alors les variables X_i et X_j ne sont pas indépendantes.

2. On pose $Y_n = \sum\limits_{k=1}^{n} X_k$.

a) Déterminer l'espérance de Y_n, notée $\mathbb{E}(Y_n)$.

b) En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{\mathbb{E}(Y_n)}{n}$ et donner un équivalent de $\mathbb{E}(Y_n)$ lorsque n est au voisinage de $+\infty$.

3. Pour tout i de $\{1, 2, \dots, n\}$, on note N_i la variable aléatoire égale au nombre de boules manquantes dans l'urne numérotée i à la fin de ces n épreuves.

a) Donner sans calcul la loi de N_i ainsi que la valeur de $\mathbb{E}(N_i)$.

b) Que vaut le produit $N_i X_i$?

c) Les variables N_i et X_i sont-elles indépendantes ?

4. Compléter le programme informatique suivant pour qu'il simule l'expérience décrite au début de cet exercice et affiche les valeurs prises par X_1 et N_1 pour une valeur de n entrée par l'utilisateur.

```
n = int(input('Donnez un entier naturel n supérieur ou égal à 2 : '))
N1 = 0
X1 = 1
for k in range(1,n+1):
    hasard = rd.randint(1,n+1)
    if hasard == 1:
        X1 = _____
        N1 = __________
print(X1)
print(N1)
```

Exercice 4

On se propose de déterminer s'il existe des fonctions f continues sur $\mathbb{R}$ et vérifiant l'égalité :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = 1 + \int_0^x tf(x-t)\mathrm{d}t \qquad (*)$$

1. Montrer que l'égalité $(*)$ est équivalente à l'égalité :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = 1 + \int_0^x (x-u)f(u)\mathrm{d}u \qquad (**)$$

2. On suppose dans cette question qu'une fonction f, continue sur $\mathbb{R}$, est solution de ce problème.

a) Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et que l'on a :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = \int_0^x f(u)\mathrm{d}u$$

b) En déduire que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et que l'on a :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f''(x) = f(x)$$

c) Trouver toutes les solutions de l'équation différentielle obtenue ci-dessus.

d) Déterminer $f(0)$ et $f'(0)$ puis montrer que le problème posé au début de cet exercice a au plus une solution qui est la fonction f définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2}$$

3. Vérifier qu'effectivement la fonction trouvée à la question ***2.d)*** est la seule solution du problème proposé en début d'exercice.

4. On se propose de déterminer maintenant s'il existe des fonctions f continues sur $\mathbb{R}$ et vérifiant l'égalité :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \int_0^x tf(x-t)\mathrm{d}t$$

Sans refaire les calculs faits précédemment, mais en précisant les résultats qui restent valables, montrer que ce nouveau problème possède une seule solution que l'on déterminera.