DS5 (vA) - Barème

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidat·es sont invité·es à ***encadrer*** *dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*
Aucun document n'est autorisé. ***L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique*** *est* ***interdite****. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*
Si au cours de l'épreuve, un candidat ou une candidate repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

On suppose, et c'est valable pour toute l'épreuve, que la librairie suivante est importée sous son alias habituel :

- `import numpy.random as rd`

Exercice 1 (EDHEC 2011)

Notations et objectifs

On considère deux variables aléatoires X et Y, définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$, et indépendantes.

On suppose que X est une variable à densité et on note F_X sa fonction de répartition.

On suppose par ailleurs que la loi de Y est donnée par $\mathbb{P}\big([Y=1]\big) = \mathbb{P}\big([Y=-1]\big) = \dfrac{1}{2}$.

L'indépendance de X et Y se traduit par les égalités suivantes, valables pour tout réel x :

$$\mathbb{P}\big([X \leqslant x] \cap [Y=1]\big) = \mathbb{P}\big([X \leqslant x]\big)\, \mathbb{P}\big([Y=1]\big) \text{ et } \mathbb{P}\big([X \leqslant x] \cap [Y=-1]\big) = \mathbb{P}\big([X \leqslant x]\big)\, \mathbb{P}\big([Y=-1]\big)$$

On pose $Z = XY$ et on admet que Z est, elle-aussi, une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.

On se propose d'établir deux résultats utiles pour la suite dans la partie 1, puis d'en déduire la loi de la variable aléatoire Z en fonction de la loi de X dans les parties 2 et 3.

Partie 1 : expression de la fonction de répartition de Z en fonction de celle de X

1. Rappeler l'expression des fonctions de répartition d'une variable aléatoire suivant une loi uniforme sur $[a, b]$ (avec $a < b$) et d'une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre λ (avec $\lambda > 0$).

- **1 pt : Si $X \hookrightarrow \mathcal{U}([a,b])$, alors** $F_X : x \mapsto \begin{cases} 0 & \textbf{si } x < a \\ \dfrac{x-a}{b-a} & \textbf{si } a \leqslant x \leqslant b \\ 1 & \textbf{si } x > b \end{cases}$
- **1 pt : Si $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$, alors** $F_X : x \mapsto \begin{cases} 1 - \mathbf{e}^{-\lambda x} & \textbf{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \textbf{sinon} \end{cases}$

2. En utilisant le système complet d'événements $([Y=1], [Y=-1])$, montrer que la fonction de répartition F_Z de la variable aléatoire Z est donnée par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F_Z(x) = \frac{1}{2}\ (F_X(x) - F_X(-x) + 1)$$

- **1 pt : indépendance utilisée au bon moment**
- **1 pt : X est à densité utilisé au bon moment**
- **1 pt :** $F_Z(x) = \dfrac{1}{2}\ (F_X(x) - F_X(-x) + 1)$

Partie 2 : Étude de deux premiers exemples

3. On suppose que la loi de X est la loi normale centrée réduite.
Reconnaître la loi de Z.

- **1 pt :** $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$
- **1 pt : la fonction de répartition caractérise la loi**
- **1 pt :** $Z \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$

4. On suppose que la loi de X est la loi uniforme sur $[0,1]$.

a) Déterminer l'expression de $F_X(-x)$ selon les valeurs prises par x.

- **2 pt :** $F_X(-x) = \begin{cases} 1 & \textbf{si } x < -1 \\ -x & \textbf{si } -1 \leqslant x \leqslant 0 \\ 0 & \textbf{si } x > 0 \end{cases}$

b) Déterminer $F_Z(x)$ pour tout réel x, puis reconnaître la loi de Z.

- **2 pt :** $F_Z(x) = \begin{cases} 0 & \textbf{si } x < -1 \\ \dfrac{x+1}{2} & \textbf{si } -1 \leqslant x \leqslant 1 \\ 1 & \textbf{si } x > 1 \end{cases}$
- **1 pt :** $Z \hookrightarrow \mathcal{U}([-1,1])$

Partie 3 : Étude du cas où la loi de X est la loi exponentielle de paramètre 1

5. *a)* Montrer que la fonction de répartition F_Z de la variable aléatoire Z est définie par :

$$F_Z : x \mapsto \begin{cases} 1 - \dfrac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-x} & \text{si } x \geqslant 0 \\ \dfrac{1}{2}\,\mathrm{e}^{x} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

- **2 pt :** $F_Z : x \mapsto \begin{cases} 1 - \dfrac{1}{2}\,\mathbf{e}^{-x} & \textbf{si } x \geqslant 0 \\ \dfrac{1}{2}\,\mathbf{e}^{x} & \textbf{si } x < 0 \end{cases}$

b) En déduire que Z est une variable aléatoire à densité.

- **1 pt :** F_Z **est continue sur** $\mathbb{R}$
- **1 pt :** F_Z **est de classe** $\mathcal{C}^1$ **sur** $\mathbb{R}^*$

c) Établir alors qu'une densité de Z est la fonction f_Z définie pour tout réel x par :

$$f_Z(x) = \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-|x|}$$

- **1 pt :** f_Z **est positive sur** $\mathbb{R}$
- **1 pt :** f_Z **et** F_Z' **coïncident sur** $\mathbb{R}$ **éventuellement privé d'un nombre fini de points**

6. *a)* Donner la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} x\,\mathrm{e}^{-x}\,dx$.

- **1 pt :** $\displaystyle\int_0^{+\infty} x\,\mathbf{e}^{-x}\,dx = \mathbb{E}(W)$ **où** $W \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$
- **1 pt :** $\displaystyle\int_0^{+\infty} x\,\mathbf{e}^{-x}\,dx = 1$

b) Montrer que f_Z est une fonction paire et en déduire l'existence et la valeur de $\mathbb{E}(Z)$.

- **1 pt : la fonction valeur absolue est paire**
- **1 pt : la variable aléatoire** Z **admet une espérance si et seulement si l'intégrale** $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x f_Z(x)\,dx$ **converge absolument, ce qui revient à montrer la convergence pour ce calcul de moment**

- **1 pt :** $x \mapsto x f_Z(x)$ **est impaire. Il suffit de montrer que** $\displaystyle\int_0^{+\infty} x f_Z(x)\ dx$ **converge + preuve convergence**
- **1 pt :** $\mathbb{E}(Z) = 0$

7. a) Donner la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^2\,\mathrm{e}^{-x}\ dx$.

- **1 pt :** $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^2\,\mathrm{e}^{-x}\ dx = \mathbb{E}(W^2)$ **où** $W \hookrightarrow \mathcal{E}\,(1)$
- **1 pt : par Koenig-Huygens,** $\mathbb{E}(W^2) = \mathbb{V}(W) + \mathbb{E}(W)^2 = 1 + 1 = 2$

b) En déduire l'existence et la valeur de $\mathbb{E}\big(Z^2\big)$, puis donner la valeur de la variance de Z.

- **1 pt : la variable aléatoire** Z **admet un moment d'ordre** 2 **si et seulement si l'intégrale** $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_Z(x)\ dx$ **converge absolument, ce qui revient à montrer la convergence pour ce calcul de moment**
- **1 pt :** $x \mapsto x^2 f_Z(x)$ **est paire. Il suffit de montrer que** $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^2 f_Z(x)\ dx$ **converge**
- **1 pt :** $\mathbb{E}(Z^2) = 2$
- **1 pt :** $\mathbb{V}(Z) = \mathbb{E}(Z^2) - \mathbb{E}(Z)^2 = 2 - 0 = 2$

8. a) Déterminer $\mathbb{E}(X)\,\mathbb{E}(Y)$ et comparer avec $\mathbb{E}(Z)$. Quel résultat retrouve-t-on ainsi ?

- **1 pt :** $\mathbb{E}(Y) = \dfrac{1}{2} \times 1 + \dfrac{1}{2} \times (-1) = 0$
- **1 pt :** $\mathbb{E}(X)\,\mathbb{E}(Y) = 0 = \mathbb{E}(Z)$
- **1 pt : on retrouve ainsi le fait que l'espérance du produit de deux variables aléatoires indépendantes est égale au produit des espérances de ces deux variables aléatoires**

b) Exprimer Z^2 en fonction de X, puis en déduire de nouveau la variance de Z.

- **1 pt :** $Y(\Omega) = \{-1, 1\}$ **et donc** $Y^2 = 1$
- **1 pt :** $Z^2 = X^2$ **donc** $\mathbb{V}(Z) = \mathbb{E}(Z^2) = \mathbb{E}(X^2) = 2$

9. Soit U et V des variables aléatoires suivant respectivement la loi de Bernoulli de paramètre $\dfrac{1}{2}$ et la loi uniforme sur $[0, 1[$.

a) On pose $Q = -\ln(1 - V)$ et on admet que Q est une variable aléatoire. Déterminer la fonction de répartition de Q et en déduire la loi suivie par la variable aléatoire Q.

- **1 pt :** $Q(\Omega) = [0, +\infty[$
- **2 pt :** $F_Q : x \mapsto \begin{cases} 1 - \mathrm{e}^{-x} & \textbf{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \textbf{sinon} \end{cases}$ **(1 pt pour les arguments)**
- **1 pt :** $Q \hookrightarrow \mathcal{E}\,(1)$

b) On pose $R = 2U - 1$ et on admet que R est une variable aléatoire. Déterminer $R(\Omega)$ et donner la loi suivie par la variable R.

- **1 pt :** $R(\Omega) = \{-1, 1\}$
- **1 pt : calculs**
- **1 pt : la variable aléatoire** R **suit la même loi que** Y

c) Informatique.
En tenant compte des résultats des questions ***9.a)*** et ***9.b)***, écrire en **Python** un programme permettant de simuler la v.a.r. Z.

- **1 pt :** `U = rd.binomial(1, 1/2)`
- **1 pt :** `V = rd.random()`
- **1 pt :** `Q = -np.log(1-V)`
- **1 pt :** `R = 2*U-1`
- **1 pt :** `return Q*R`

Exercice 2 (Sujet maison inspiré de ECRICOME 2022)

Dans tout l'exercice, $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des matrices carrées d'ordre 3 à coefficients réels. On notera respectivement I_3 et 0_3 la matrice identité et la matrice nulle de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

Soit F l'ensemble des matrices de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ de la forme $\begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$, où a et b sont des réels quelconques.

Soit G l'ensemble des matrices M de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $M^2 = M$.

Partie I - Étude des ensembles F et G

1. F est-il un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$?
Si oui, déterminer une base de F et préciser la dimension de F.

- **1 pt :** $F = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\right)$
- **1 pt : La famille $\mathcal{F} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\right)$ est libre car constituée uniquement de deux matrices non colinéaires**
- **1 pt :** $\dim(F) = \text{Card}(\mathcal{F}) = 2$

2. G est-il un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$?
Si oui, déterminer une base de G et préciser la dimension de G.

- **1 pt :** $I_3 \in G$
- **1 pt :** $-I_3 \notin G$

3. Soit $A = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

a) Démontrer : $A \in F \cap G$.

- **1 pt :** $A \in F$
- **1 pt :** $A \in G$

b) En déduire un polynôme annulateur de A.

- **1 pt : le polynôme $Q(X) = X^2 - X = X\,(X-1)$ est un polynôme annulateur de la matrice A**

c) Déterminer les valeurs propres de A, et donner une base de chaque sous-espace propre associé.

- **1 pt :** $\text{Sp}(A) \subset \{0, 1\}$ **et les seules valeurs propres possibles de A sont 0 et 1**

- **1 pt :** 1 **est bien valeur propre de** A **(par calcul de rang ou bien** $E_1(A) \neq \{0\}$**)**
- **1 pt :** $E_1(A) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}\right)$
- **1 pt :** $\left(\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}\right)$ **base de** $E_1(A)$
- **1 pt :** 0 **est bien valeur propre de** A **(par calcul de rang ou bien** $E_0(A) \neq \{0\}$**)**
- **1 pt :** $E_0(A) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right)$
- **1 pt :** $\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right)$ **base de** $E_0(A)$

d) La matrice A est-elle inversible ? Est-elle diagonalisable ?

- **1 pt :** 0 **est valeur propre de** A **donc** A **n'est pas inversible**
- **1 pt : construction d'une base de vecteurs propres par thm de concaténation (1 pt pour citer et utiliser correctement le thm de concaténation)** `OU` A **est symétrique**

Partie II - Réduction d'une matrice à paramètres

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. On pose $A = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$, $U_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, $U_2 = \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$ et $U_3 = \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$.

4. Calculer AU_1, AU_2 et AU_3. Que peut-on en déduire ?

- **1 pt :** $AU_1 = (a + 2b)U_1$
- **1 pt :** $AU_2 = (a - b)U_2$
- **1 pt :** $AU_3 = (a - b)U_3$
- **1 pt : les vecteurs** U_k **sont tous non nuls donc** $a + 2b$ **et** $a - b$ **sont des valeurs propres de** A

5. Démontrer que (U_1, U_2, U_3) est une base de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

- **1 pt : utilisation correcte du thm de concaténation**
- **1 pt :** $\text{Card}((U_1, U_2, U_3)) = 3 = \dim(\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}))$

6. En déduire que A est diagonalisable et expliciter une matrice $P \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ inversible telle que $A = PDP^{-1}$ où

$$D = \begin{pmatrix} a + 2b & 0 & 0 \\ 0 & a - b & 0 \\ 0 & 0 & a - b \end{pmatrix}$$

- **1 pt : la famille** (U_1, U_2, U_3) **est une base de** $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ **formée de vecteurs propres de** A **donc** A **est diagonalisable**
- **1 pt :** $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

7. Vérifier que :

$$\text{Sp}(A) \subset \mathbb{R}_- \iff a \leqslant \min(b, -2b)$$

- **1 pt : A est semblable à D (qui est diagonale) donc** $\mathrm{Sp}(A) = \mathrm{Sp}(D) = \{a+2b, a-b\}$
- **1 pt :** $\mathrm{Sp}(A) \subset \mathbb{R}_- \iff \begin{cases} a+2b \leqslant 0 \\ a - \ \ b \leqslant 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a \leqslant -2b \\ a \leqslant b \end{cases} \iff a \leqslant \min(b, -2b)$

Partie III - Étude d'un système différentiel linéaire à paramètres

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. On considère dans cette partie le système différentiel linéaire

$$(S) : \left\{ \begin{array}{ccccccc} x' & = & ax & + & by & + & bz \\ y' & = & bx & + & ay & + & bz \\ z' & = & bx & + & by & + & az \end{array} \right.$$

où x, y et z désignent des fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

8. A l'aide des résultats de la partie **II**, donner la forme générale des solutions de (S).

- **1 pt : la matrice A est diagonalisable**
- **1 pt : la forme générale des solutions est** $t \mapsto C_1 \mathbf{e}^{(a+2b)t} U_1 + C_2 \mathbf{e}^{(a-b)t} U_2 + C_3 \mathbf{e}^{(a-b)t} U_3$ **où** $(C_1, C_2, C_3) \in \mathbb{R}^3$

9. Quel résultat permet d'affirmer l'existence d'une unique solution $X_0 : t \mapsto \begin{pmatrix} x_0(t) \\ y_0(t) \\ z_0(t) \end{pmatrix}$ du système différentiel (S) telle que $X_0(0) = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$? Déterminer explicitement cette solution.

- **1 pt : tout problème de Cauchy admet une unique solution d'après le théorème de Cauchy**
- **3 pt :** $X_0 : t \mapsto 3\mathbf{e}^{(a+2b)t} U_1 + \mathbf{e}^{(a-b)t} U_2 + 2\mathbf{e}^{(a-b)t} U_3$

10. On suppose dans cette question que $a > 0$.

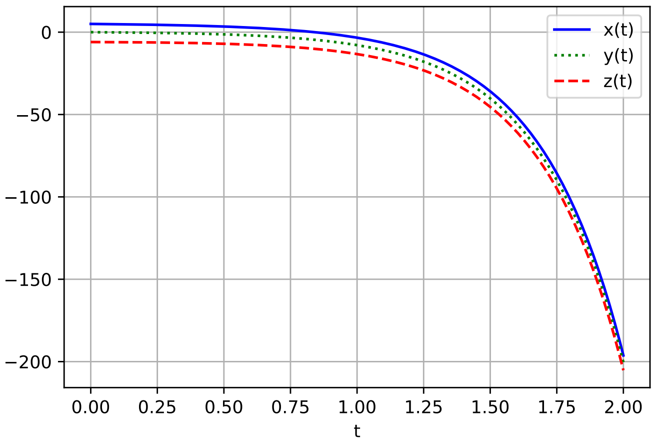
a) Vérifier que : $a > \min(b, -2b)$.

- **1 pt : les nombres b et $-2b$ étant de signes opposés, au moins l'un d'entre eux est négatif ou nul**
- **1 pt :** $\min(b, -2b) \leqslant 0 < a$

b) Expliciter une solution de (S) dont la trajectoire est divergente.
(On pourra distinguer des cas selon le signe de b)

- **1 pt : si $b \leqslant 0$, alors la trajectoire associée à $X : t \mapsto \mathbf{e}^{(a-b)t} U_2$ est divergente**
- **1 pt : si $b > 0$, alors la trajectoire associée à $X : t \mapsto \mathbf{e}^{(a+2b)t} U_1$ est divergente**
- **1 pt : qualité rédaction**

11. On suppose dans cette question que $a = -3$ et $b = -1$. Expliquer pourquoi le tracé ci-dessous ne correspond à aucune solution de (S).



- **1 pt : les solutions générales sont de la forme** $X : t \mapsto \begin{pmatrix} C_1\mathrm{e}^{-5t} + C_2\mathrm{e}^{-2t} \\ C_1\mathrm{e}^{-5t} + (C_3 - C_2)\mathrm{e}^{-2t} \\ C_1\mathrm{e}^{-5t} - C_3\mathrm{e}^{-2t} \end{pmatrix}$
- **1 pt : toutes les solutions ont une trajectoire convergente, or la trajectoire du tracé est divergente**

Exercice 3 (EDHEC 2011)

On désigne par n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On dispose de n urnes, numérotées de 1 à n, contenant chacune n boules. On répète n épreuves, chacune consistant à choisir une urne au hasard et à en extraire une boule au hasard. On suppose que les choix des urnes sont indépendants les uns des autres.
Pour tout i de $\{1, 2, ..., n\}$, on note X_i la variable aléatoire prenant la valeur 1 si l'urne numérotée i contient toujours n boules au bout de ces n épreuves, et qui prend la valeur 0 sinon.

1. a) Pour tout i et tout k, éléments de $\{1, 2, ..., n\}$, on note $U_{i,k}$ l'évènement « l'urne numéro i est choisie à la $k^{\text{ème}}$ épreuve ».
Écrire l'évènement $[X_i = 1]$ à l'aide de certains des évènements $U_{i,k}$, puis montrer que :

$$\forall i \in \{1, 2, ..., n\}, \ \mathbb{P}([X_i = 1]) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$$

- **1 pt :** $[X_i = 1] = \bigcap\limits_{k=1}^{n} \overline{U_{i,k}}$
- **2 pts : calcul de** $\mathbb{P}(U_{i,k})$ **(1 pt pour équiprobable, 1 pt pour événement contraire)**
- **2 pts : calcul de** $\mathbb{P}([X_i = 1])$ **(1 pt pour indépendance, 1 pt pour le reste)**

b) Justifier également que, si i et j sont deux entiers distincts, éléments de $\{1, 2, ..., n\}$, on a :

$$\mathbb{P}([X_i = 1] \cap [X_j = 1]) = \left(1 - \frac{2}{n}\right)^n$$

- **1 pt :** $[X_i = 1] \cap [X_j = 1] = \bigcap\limits_{k=1}^{n} \overline{U_{i,k}} \cap \overline{U_{j,k}} = \bigcap\limits_{k=1}^{n} \overline{U_{i,k} \cup U_{j,k}}$
- **1 pt : calcul de** $\mathbb{P}(\overline{U_{i,k} \cup U_{j,k}})$ **(même argument que précédent)**
- **1 pt : calcul de** $\mathbb{P}([X_i = 1] \cap [X_j = 1])$ **(même argument que précédent)**

c) Comparer $\left(1-\dfrac{2}{n}\right)$ et $\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^2$ et en déduire que, si i et j sont deux entiers distincts, éléments de $\{1,2,...,n\}$, alors les variables X_i et X_j ne sont pas indépendantes.

- **1 pt : comparaison de** $\left(1-\dfrac{2}{n}\right)$ **et** $\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^2$**.**
- **1 pt : calcul de** $\mathbb{P}([X_i=1])\mathbb{P}([X_j=1])$
- **1 pt :** $\mathbb{P}([X_i=1]\cap[X_j=1]) \neq \mathbb{P}([X_i=1])\mathbb{P}([X_j=1])$

2. On pose $Y_n = \sum\limits_{k=1}^{n} X_k$.

a) Déterminer l'espérance de Y_n, notée $\mathbb{E}(Y_n)$.

- **1 pt : la v.a.r.** Y_n **admet une espérance en tant que somme de v.a.r. qui en admettent**
- **1 pt :** $\mathbb{E}(X_i) = \left(1-\dfrac{1}{n}\right)^n$
- **1 pt :** $\mathbb{E}(Y_n) = n\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^n$
- **1 pt : linéarité de l'espérance (point donné seulement si le calcul est correct)**

b) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\mathbb{E}(Y_n)}{n}$ et donner un équivalent de $\mathbb{E}(Y_n)$ lorsque n est au voisinage de $+\infty$.

- **1 pt :** $\ln(1+x) \underset{x\to 0}{\sim} x$
- **1 pt :** $\lim\limits_{n\to+\infty} -\dfrac{1}{n} = 0$
- **1 pt : composition de limites car** exp **continue en** -1
- **1 pt :** $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\mathbb{E}(Y_n)}{n} = \mathbf{e}^{-1}$
- **1 pt :** $\mathbb{E}(Y_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{n}{e}$

3. Pour tout i de $\{1,2,...,n\}$, on note N_i la variable aléatoire égale au nombre de boules manquantes dans l'urne numérotée i à la fin de ces n épreuves.

a) Donner sans calcul la loi de N_i ainsi que la valeur de $\mathbb{E}(N_i)$.

- **1 pt : description de l'expérience**
- **1 pt : description de la v.a.r.** N_i
- **1 pt :** $N_i \hookrightarrow \mathcal{B}\left(n, \dfrac{1}{n}\right)$
- **1 pt :** $\mathbb{E}(N_i) = 1$

b) Que vaut le produit $N_i X_i$?

- **2 pts (1 pt par cas)**

c) Les variables N_i et X_i sont-elles indépendantes ?

- **1 pt : calcul** $\mathbb{E}(N_i X_i)$
- **1 pt : conclusion**
- **1 pt : bonus si fait avec** $\mathbb{E}$ **et pas fait avec la définition**

4. Compléter le programme informatique suivant pour qu'il simule l'expérience décrite au début de cet exercice et affiche les valeurs prises par X_1 et N_1 pour une valeur de n entrée par l'utilisateur.

```
1  n = int(input('Donnez un entier naturel n supérieur ou égal à 2 : '))
2  N1 = 0
3  X1 = 1
4  for k in range(1,n+1):
5      hasard = rd.randint(1,n+1)
6      if hasard == 1:
7          X1 = 0
8          N1 = N1 + 1
9  print(X1)
10 print(N1)
```

- **2 pts : 1 pt pour la ligne 7, 1 pt pour l'explication**
- **2 pts : 1 pt pour la ligne 8, 1 pt pour l'explication**

Exercice 4 (EDHEC 2024)

On se propose de déterminer s'il existe des fonctions f continues sur $\mathbb{R}$ et vérifiant l'égalité :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = 1 + \int_0^x tf(x-t)\mathrm{d}t \qquad (*)$$

1. Montrer que l'égalité $(*)$ est équivalente à l'égalité :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = 1 + \int_0^x (x-u)f(u)\mathrm{d}u \qquad (**)$$

- **1 pt : les deux intégrales existent par continuité de f**
- **1 pt : changement de variable affine $t = x - u$**

2. On suppose dans cette question qu'une fonction f, continue sur $\mathbb{R}$, est solution de ce problème.

a) Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et que l'on a :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = \int_0^x f(u)\mathrm{d}u$$

- **1 pt : $f(x) = 1 + x\int_0^x f(u)\mathrm{d}u - \int_0^x uf(u)\mathrm{d}u$**
- **1 pt : théorème fondamental de l'analyse ou introduction de primitives pour dériver**

b) En déduire que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et que l'on a :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f''(x) = f(x)$$

- **1 pt : théorème fondamental de l'analyse appliqué à f'**

c) Trouver toutes les solutions de l'équation différentielle obtenue ci-dessus.

- **1 pt : équation différentielle linéaire d'ordre 2, homogène et à coefficients constants**
- **1 pt : $P(x) = x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$ le polynôme caractéristique associé. Ce polynôme admet deux racines simples : $r_1 = 1$ et $r_2 = -1$**

- **1 pt : les solutions de l'équation différentielle $y'' = y$ sont de la forme :**

$$t \mapsto \lambda \mathbf{e}^{t} + \mu \mathbf{e}^{-t}$$

où $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$

d) Déterminer $f(0)$ et $f'(0)$ puis montrer que le problème posé au début de cet exercice a au plus une solution qui est la fonction f définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \frac{\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x}}{2}$$

- **1 pt :** $f(0) = 1 + \displaystyle\int_0^0 t f(x-t) \mathbf{d}t = 1$
- **1 pt :** $f'(0) = \displaystyle\int_0^0 f(u) \mathbf{d}u = 0$
- **1 pt :** $\begin{cases} f(0) = 1 \\ f'(0) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda & = \frac{1}{2} \\ & \mu = \frac{1}{2} \end{cases}$

3. Vérifier qu'effectivement la fonction trouvée à la question ***2.d)*** est la seule solution du problème proposé en début d'exercice.

- **1 pt :** $g : x \mapsto \dfrac{\mathbf{e}^{x} + \mathbf{e}^{-x}}{2}$ **est continue sur** $\mathbb{R}$
- **1 pt :** $\displaystyle\int_0^x (x-u) g(u) \mathbf{d}u = \frac{1}{2}\left(x \int_0^x \mathbf{e}^{u} \mathbf{d}u + x \int_0^x \mathbf{e}^{-u} \mathbf{d}u - \int_0^x u \mathbf{e}^{u} \mathbf{d}u - \int_0^x u \mathbf{e}^{-u} \mathbf{d}u \right)$
- **3 pt : calcul des intégrales (1 pt pour la justification des IPP)**

4. On se propose de déterminer maintenant s'il existe des fonctions f continues sur $\mathbb{R}$ et vérifiant l'égalité :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \int_0^x t f(x-t) \mathrm{d}t$$

Sans refaire les calculs faits précédemment, mais en précisant les résultats qui restent valables, montrer que ce nouveau problème possède une seule solution que l'on déterminera.

- **1 pt : même équation différentielle**
- **1 pt : problème de Cauchy :** $\begin{cases} y'' = y \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$
- **2 pt : la solution nulle est l'unique solution de ce nouveau problème (1 pt pour chaque implication)**