DS5 (vA) - Correction

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidat·es sont invité·es à ***encadrer*** *dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*
Aucun document n'est autorisé. ***L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique*** *est* ***interdite****. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*
Si au cours de l'épreuve, un candidat ou une candidate repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

On suppose, et c'est valable pour toute l'épreuve, que la librairie suivante est importée sous son alias habituel :

- `import numpy.random as rd`

Exercice 1 (EDHEC 2011)

Notations et objectifs

On considère deux variables aléatoires X et Y, définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$, et indépendantes.

On suppose que X est une variable à densité et on note F_X sa fonction de répartition.

On suppose par ailleurs que la loi de Y est donnée par $\mathbb{P}\big([Y=1]\big) = \mathbb{P}\big([Y=-1]\big) = \dfrac{1}{2}$.

L'indépendance de X et Y se traduit par les égalités suivantes, valables pour tout réel x :

$$\mathbb{P}\big([X \leqslant x] \cap [Y=1]\big) = \mathbb{P}\big([X \leqslant x]\big)\, \mathbb{P}\big([Y=1]\big) \text{ et } \mathbb{P}\big([X \leqslant x] \cap [Y=-1]\big) = \mathbb{P}\big([X \leqslant x]\big)\, \mathbb{P}\big([Y=-1]\big)$$

On pose $Z = XY$ et on admet que Z est, elle-aussi, une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.

On se propose d'établir deux résultats utiles pour la suite dans la partie 1, puis d'en déduire la loi de la variable aléatoire Z en fonction de la loi de X dans les parties 2 et 3.

Partie 1 : expression de la fonction de répartition de Z en fonction de celle de X

1. Rappeler l'expression des fonctions de répartition d'une variable aléatoire suivant une loi uniforme sur $[a, b]$ (avec $a < b$) et d'une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre λ (avec $\lambda > 0$).

Démonstration.

- Si $X \hookrightarrow \mathcal{U}([a, b])$, alors

$$\boxed{F_X : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < a \\ \dfrac{x-a}{b-a} & \text{si } a \leqslant x \leqslant b \\ 1 & \text{si } x > b \end{cases}.}$$

- Si $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$, alors

$$\boxed{F_X : x \mapsto \begin{cases} 1 - \mathrm{e}^{-\lambda x} & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.}$$

□

2. En utilisant le système complet d'événements $([Y=1], [Y=-1])$, montrer que la fonction de répartition F_Z de la variable aléatoire Z est donnée par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F_Z(x) = \frac{1}{2}\ \big(F_X(x) - F_X(-x) + 1\big)$$

Démonstration.
Soit $x \in \mathbb{R}$.

On applique la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $([Y=1],[Y=-1])$:

$$\begin{aligned}
F_Z(x) &= \mathbb{P}([Z \leqslant x]) \\
&= \mathbb{P}([Z \leqslant x] \cap [Y=1]) + \mathbb{P}([Z \leqslant x] \cap [Y=-1]) \\
&= \mathbb{P}([X \leqslant x] \cap [Y=1]) + \mathbb{P}([-X \leqslant x] \cap [Y=-1]) \\
&= \mathbb{P}([X \leqslant x] \cap [Y=1]) + \mathbb{P}([X \geqslant -x] \cap [Y=-1]) \\
&= \mathbb{P}([X \leqslant x])\mathbb{P}([Y=1]) + \mathbb{P}([X \geqslant -x])\mathbb{P}([Y=-1]) && \textit{(par indépendance)} \\
&= \frac{1}{2}\mathbb{P}([X \leqslant x]) + \frac{1}{2}\mathbb{P}([X \geqslant -x]) \\
&= \frac{1}{2}\left(\mathbb{P}([X \leqslant x]) + \mathbb{P}([X \geqslant -x])\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\mathbb{P}([X \leqslant x]) + 1 - \mathbb{P}([X < -x])\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(F_X(x) + 1 - F_X(-x)\right) && \textit{(car } X \textit{ est à densité)}
\end{aligned}$$

□

Partie 2 : Étude de deux premiers exemples

3. On suppose que la loi de X est la loi normale centrée réduite.
Reconnaître la loi de Z.

Démonstration.
Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
F_Z(x) &= \frac{1}{2}\left(F_X(x) + 1 - F_X(-x)\right) && \textit{(d'après la question } \boldsymbol{2}\textit{)} \\
&= \frac{1}{2}\left(\Phi(x) + 1 - \Phi(-x)\right) && \textit{(car } X \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)\textit{)} \\
&= \frac{1}{2}\left(\Phi(x) + 1 - (1 - \Phi(x))\right) \\
&= \Phi(x)
\end{aligned}$$

Ainsi, Z et X ont la même fonction de répartition. Or, la fonction de répartition caractérise la loi.

$$\boxed{\text{On en déduit que } Z \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1).}$$

□

4. On suppose que la loi de X est la loi uniforme sur $[0,1]$.

a) Déterminer l'expression de $F_X(-x)$ selon les valeurs prises par x.

Démonstration.
Soit $x \in \mathbb{R}$. D'après la question ***1*** :

- Si $x < -1$, alors $-x > 1$ et donc $F_X(-x) = 1$.
- Si $-1 \leqslant x \leqslant 0$, alors $0 \leqslant -x \leqslant 1$ et donc $F_X(-x) = -x$.
- Si $x > 0$, alors $-x < 0$ et donc $F_X(-x) = 0$.

$$\boxed{\text{Finalement : } F_X(-x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < -1 \\ -x & \text{si } -1 \leqslant x \leqslant 0 \\ 0 & \text{si } x > 0 \end{cases}.}$$

□

b) Déterminer $F_Z(x)$ pour tout réel x, puis reconnaître la loi de Z.

Démonstration.
Soit $x \in \mathbb{R}$. D'après les questions ***1.*** et ***4.a)*** :

- Si $x < -1$, alors $F_Z(x) = \dfrac{1}{2}(0 - 1 + 1) = 0$.
- Si $-1 \leqslant x \leqslant 0$, alors $F_Z(x) = \dfrac{1}{2}(0 - (-x) + 1) = \dfrac{x+1}{2}$.
- Si $0 < x \leqslant 1$, alors $F_Z(x) = \dfrac{1}{2}(x - 0 + 1) = \dfrac{x+1}{2}$.
- Si $x > 1$, alors $F_Z(x) = \dfrac{1}{2}(1 - 0 + 1) = 1$.

$$\boxed{\text{Finalement : } F_Z(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -1 \\ \dfrac{x+1}{2} & \text{si } -1 \leqslant x \leqslant 1 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases} \text{ et donc } Z \hookrightarrow \mathcal{U}([-1,1]).}$$

□

Partie 3 : Étude du cas où la loi de X est la loi exponentielle de paramètre 1

5. a) Montrer que la fonction de répartition F_Z de la variable aléatoire Z est définie par :

$$F_Z : x \mapsto \begin{cases} 1 - \dfrac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-x} & \text{si } x \geqslant 0 \\ \dfrac{1}{2}\,\mathrm{e}^{x} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Démonstration.
Soit $x \in \mathbb{R}$. D'après les questions ***1.*** et ***2.*** :

- Si $x < 0$, alors $-x > 0$ et donc $F_Z(x) = \dfrac{1}{2}(0 - (1 - \mathrm{e}^{-(-x)}) + 1) = \dfrac{1}{2}\,\mathrm{e}^{x}$.
- Si $x \geqslant 0$, alors $-x \leqslant 0$ et donc $F_Z(x) = \dfrac{1}{2}((1 - \mathrm{e}^{-x}) - 0 + 1) = 1 - \dfrac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-x}$.

$$\boxed{\text{Finalement : } F_Z : x \mapsto \begin{cases} 1 - \dfrac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-x} & \text{si } x \geqslant 0 \\ \dfrac{1}{2}\,\mathrm{e}^{x} & \text{si } x < 0 \end{cases}.}$$

□

b) En déduire que Z est une variable aléatoire à densité.

Démonstration.

- La fonction F_Z est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$ car les fonctions $x \mapsto 1 - \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-x}$ et $x \mapsto \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{x}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
- La fonction F_Z est continue en 0. En effet :

$$\lim_{x \to 0^-} F_Z(x) = \lim_{x \to 0} \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{x} = \frac{1}{2} = F_Z(0)$$

et

$$\lim_{x \to 0^+} F_Z(x) = \lim_{x \to 0} 1 - \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-x} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} = F_Z(0)$$

$$\boxed{\text{On en déduit que } F_Z \text{ est continue sur } \mathbb{R} \text{ et de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R}^*, \text{ donc } Z \text{ est à densité.}}$$

□

c) Établir alors qu'une densité de Z est la fonction f_Z définie pour tout réel x par :

$$f_Z(x) = \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-|x|}$$

Démonstration.

- La fonction f_Z est positive sur $\mathbb{R}$.
- Soit $x \in \mathbb{R}$.
  - × Si $x < 0$, alors
  $$F_Z'(x) = \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{x} = \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-|x|} = f_Z(x)$$
  - × Si $x > 0$, alors
  $$F_Z'(x) = \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-x} = \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-|x|} = f_Z(x)$$

  Donc f_Z et F_Z' coïncident sur $\mathbb{R}$ éventuellement privé d'un nombre fini de points.

$$\boxed{\text{Ainsi : la fonction } f_Z \text{ est une densité de } Z.}$$

□

6. a) Donner la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} x\,\mathrm{e}^{-x}\,dx$.

Démonstration.
On remarque que :

$$\int_0^{+\infty} x\,\mathrm{e}^{-x}\,dx = \mathbb{E}(W) \qquad \text{où } W \hookrightarrow \mathcal{E}(1).$$

$$\boxed{\text{On en déduit que } \int_0^{+\infty} x\,\mathrm{e}^{-x}\,dx = 1.}$$

□

b) Montrer que f_Z est une fonction paire et en déduire l'existence et la valeur de $\mathbb{E}(Z)$.

Démonstration.
Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} f(-x) &= \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-|-x|} \\ &= \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-|x|} && \textit{(car la fonction valeur absolue est paire)} \\ &= f(x) \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{La fonction } f_Z \text{ est paire.}}$$

La variable aléatoire Z admet une espérance si et seulement si l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x f_Z(x)\, dx$ converge absolument, ce qui revient à montrer la convergence pour ce calcul de moment.
Or, puisque f_Z est paire, il suit que $x \mapsto x f_Z(x)$ est impaire. Ainsi, il suffit de montrer que $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} x f_Z(x)\, dx$ converge. De plus :

$$\int_0^{+\infty} x f_Z(x)\, dx = \int_0^{+\infty} x \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-|x|}\, dx = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} x\mathrm{e}^{-x}\, dx$$

et cette dernière intégrale converge d'après la question ***6.a)***.

$$\boxed{\text{On en déduit que } Z \text{ admet une espérance et } \mathbb{E}(Z) = 0.}$$

□

7. a) Donner la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^2\,\mathrm{e}^{-x}\, dx$.

Démonstration.
On remarque que :

$$\int_0^{+\infty} x^2\,\mathrm{e}^{-x}\, dx = \mathbb{E}(W^2) \qquad \text{où } W \hookrightarrow \mathcal{E}(1).$$

Or, d'après la formule de Koenig-Huygens :

$$\mathbb{E}(W^2) = \mathbb{V}(W) + \mathbb{E}(W)^2 = 1 + 1 = 2$$

$$\boxed{\text{On en déduit que } \int_0^{+\infty} x^2\,\mathrm{e}^{-x}\, dx = 2.}$$

□

b) En déduire l'existence et la valeur de $\mathbb{E}\big(Z^2\big)$, puis donner la valeur de la variance de Z.

Démonstration.

- La variable aléatoire Z admet un moment d'ordre 2 si et seulement si l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_Z(x)\, dx$ converge absolument, ce qui revient à montrer la convergence pour ce calcul de moment.

Or, puisque f_Z est paire, il suit que $x \mapsto x^2 f_Z(x)$ est également paire. Ainsi, il suffit de montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^2 f_Z(x)\, dx$ converge. De plus, d'après la question ***7.b)*** :

$$\int_0^{+\infty} x^2 f_Z(x)\, dx = \int_0^{+\infty} x^2 \frac{1}{2} \mathrm{e}^{-|x|}\, dx = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} x^2 \mathrm{e}^{-x}\, dx = 1$$

D'où :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_Z(x)\, dx = 2 \int_0^{+\infty} x^2 f_Z(x)\, dx = 2$$

On en déduit que Z admet un moment d'ordre 2 et $\mathbb{E}(Z^2) = 2$.

- La variable aléatoire Z admet un moment d'ordre 2 donc admet une variance.

D'après la formule de Koenig-Huygens : $\mathbb{V}(Z) = \mathbb{E}(Z^2) - \mathbb{E}(Z)^2 = 2 - 0 = 2$.

□

8. ***a)*** Déterminer $\mathbb{E}(X)\,\mathbb{E}(Y)$ et comparer avec $\mathbb{E}(Z)$. Quel résultat retrouve-t-on ainsi ?

Démonstration.

- Tout d'abord, $X \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$ donc $\mathbb{E}(X) = 1$.
- Ensuite, d'après la loi (finie) de Y :

$$\mathbb{E}(Y) = \frac{1}{2} \times 1 + \frac{1}{2} \times (-1) = 0$$

On a alors : $\mathbb{E}(X)\,\mathbb{E}(Y) = 0 = \mathbb{E}(Z)$. On retrouve ainsi le fait que l'espérance du produit de deux variables aléatoires indépendantes est égale au produit des espérances de ces deux variables aléatoires.

□

b) Exprimer Z^2 en fonction de X, puis en déduire de nouveau la variance de Z.

Démonstration.
On remarque que $Y(\Omega) = \{-1, 1\}$ et donc $Y^2 = 1$. D'où :

$$Z^2 = (XY)^2 = X^2$$

On en déduit que :

$$\mathbb{E}(Z^2) = \mathbb{E}(X^2) = 2$$

On retrouve avec la formule de Koenig-Huygens : $\mathbb{V}(Z) = 2$.

□

9. Soit U et V des variables aléatoires suivant respectivement la loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$ et la loi uniforme sur $[0, 1[$.

a) On pose $Q = -\ln(1 - V)$ et on admet que Q est une variable aléatoire. Déterminer la fonction de répartition de Q et en déduire la loi suivie par la variable aléatoire Q.

Démonstration.
Notons $h : x \mapsto -\ \ln(1-x)$, de telle sorte que $Q = h(V)$.
Comme $V \hookrightarrow \mathcal{U}([0,1[)$, alors $X(\Omega) = [0,1[$. On en déduit :

$$\begin{aligned} Q(\Omega) &= \big(h(V)\big)(\Omega) \\ &= h\big(V(\Omega)\big) \\ &= h\big([0,1[\big) \\ &= \Big[h(0), \lim_{x\to 1} h(x)\Big[\qquad \text{(car } h \text{ est continue et strictement croissante sur } [0,1[\text{)} \\ &= [0,+\infty[\end{aligned}$$

Soit $x \in \mathbb{R}$. Deux cas se présentent.

- Si $x < 0$, alors $[Q \leqslant x] = \varnothing$ car $Q(\Omega) = [0,+\infty[$. Ainsi :

$$F_Q(x) = \mathbb{P}([Q \leqslant x]) = \mathbb{P}(\varnothing) = 0$$

- Si $x \in [0,+\infty[$:

$$\begin{aligned} F_Q(x) &= \mathbb{P}([Q \leqslant x]) \\ &= \mathbb{P}\left([-\ln(1-V) \leqslant x]\right) \\ &= \mathbb{P}([\ln(1-V) \geqslant -x]) \\ &= \mathbb{P}\left(\left[1-V \geqslant \mathrm{e}^{-x}\right]\right) \qquad \text{(car la fonction exp est strictement croissante sur } \mathbb{R}\text{)} \\ &= \mathbb{P}\left(\left[V \leqslant 1-\mathrm{e}^{-x}\right]\right) \\ &= F_V\left(1-\mathrm{e}^{-\lambda x}\right) \\ &= 1-\mathrm{e}^{-x} \qquad \text{(car } 1-\mathrm{e}^{-x} \in [0,1[\text{)} \end{aligned}$$

On reconnaît la fonction de répartition de la loi $\mathcal{E}(1)$.

$$\boxed{\text{La fonction de répartition caractérise la loi donc } Q \hookrightarrow \mathcal{E}(1).}$$

□

b) On pose $R = 2U - 1$ et on admet que R est une variable aléatoire. Déterminer $R(\Omega)$ et donner la loi suivie par la variable R.

Démonstration.

- Tout d'abord, $R(\Omega) = \{-1, 1\}$.
- Ensuite :

$$\mathbb{P}([R = 1]) = \mathbb{P}([U = 1]) = \frac{1}{2}$$

  et

$$\mathbb{P}([R = -1]) = \mathbb{P}([U = 0]) = \frac{1}{2}$$

$$\boxed{\text{La variable aléatoire } R \text{ suit la même loi que } Y.}$$

□

c) Informatique.
En tenant compte des résultats des questions ***9.a)*** et ***9.b)***, écrire en **Python** un programme permettant de simuler la v.a.r. Z.

Démonstration.
On propose le programme suivant :

```
def simulZ():
    U = rd.binomial(1, 1/2)
    V = rd.random()
    Q = -np.log(1-V)
    R = 2*U-1
    return Q*R
```

$\square$

Exercice 2 (Sujet maison inspiré de ECRICOME 2022)

Dans tout l'exercice, $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des matrices carrées d'ordre 3 à coefficients réels. On notera respectivement I_3 et 0_3 la matrice identité et la matrice nulle de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

Soit F l'ensemble des matrices de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ de la forme $\begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$, où a et b sont des réels quelconques.

Soit G l'ensemble des matrices M de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $M^2 = M$.

Partie I - Étude des ensembles F et G

1. F est-il un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$?
Si oui, déterminer une base de F et préciser la dimension de F.

Démonstration.

- Tout d'abord :

$$\begin{aligned} F &= \{\begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R}) \mid (a,b) \in \mathbb{R}^2\} \\ &= \{a \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \mid (a,b) \in \mathbb{R}^2\} \\ &= \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\right) \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{L'ensemble } F \text{ est bien un sous-espace vectoriel de } \mathscr{M}_3(\mathbb{R}).}$$

- La famille $\mathcal{F} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\right)$:
  - × est libre car constituée uniquement de deux matrices non colinéaires.
  - × engendre F d'après le point précédent.

  On en déduit que $\mathcal{F}$ est une base de F.

$$\boxed{\text{Ainsi : } \dim(F) = \mathrm{Card}\,(\mathcal{F}) = 2.}$$

Commentaire

- Il est relativement fréquent de trouver dans les sujets de concours des ensembles de matrices écrites à l'aide de paramètres (c'était notamment le cas des sujets `EDHEC 2021`, `EML 2021` et `ECRICOME 2020`). Il faut donc être à l'aise sur la compréhension et la manipulation de tels ensembles.
- Dans l'énoncé, on demande si F est un espace vectoriel. On écrit alors cet ensemble sous la forme d'un espace vectoriel engendré par la famille $\mathcal{F}$. L'avantage d'une telle rédaction est qu'elle fournie une famille génératrice de F. Cette famille est donc un candidat pour être une base de F (elle l'est car elle est libre). Pour des espaces paramétrés de matrices, il faut privilégier cette démonstration à celle qui consiste à vérifier les propriétés axiomatiques de la notion d'espace vectoriel. Cependant cette dernière manière de procéder doit aussi être connue car, dans certains sujets, l'ensemble étudié ne se décrit pas naturellement comme espace vectoriel engendré par une partie.
- Rappelons ci-dessous cette rédaction.

(i) $F \subset \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$

(ii) $F \neq \varnothing$ car $0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in F$.

(iii) Démontrons que F est stable par combinaisons linéaires.

Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ et soit $(M, N) \in F^2$.

× Comme $M \in F$, il existe $(a_1, b_1) \in \mathbb{R}^3$ tel que $M = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & b_1 \\ b_1 & a_1 & b_1 \\ b_1 & b_1 & a_1 \end{pmatrix}$.

× Comme $N \in F$, il existe $(a_2, b_2) \in \mathbb{R}^2$ tel que $N = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 & b_2 \\ b_2 & a_2 & b_2 \\ b_2 & b_2 & a_2 \end{pmatrix}$.

Démontrons que $\lambda \cdot M + \mu \cdot N \in F$. On a :

$$\lambda \cdot M + \mu \cdot N \; = \; \lambda \cdot \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & b_1 \\ b_1 & a_1 & b_1 \\ b_1 & b_1 & a_1 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} a_2 & b_2 & b_2 \\ b_2 & a_2 & b_2 \\ b_2 & b_2 & a_2 \end{pmatrix} \; = \; \begin{pmatrix} \lambda\, a_1 + \mu\, a_2 & \lambda\, b_1 + \mu\, b_2 & \lambda\, b_1 + \mu\, b_2 \\ \lambda\, b_1 + \mu\, b_2 & \lambda\, a_1 + \mu\, a_2 & \lambda\, b_1 + \mu\, b_2 \\ \lambda\, b_1 + \mu\, b_2 & \lambda\, b_1 + \mu\, b_2 & \lambda\, a_1 + \mu\, a_2 \end{pmatrix} \in F$$

On reconnaît en effet l'écriture d'une matrice de F avec : $a = \lambda\, a_1 + \mu\, a_2$ et $b = \lambda\, b_1 + \mu\, b_2$.

$$\boxed{\text{L'ensemble } F \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathscr{M}_3(\mathbb{R}).}$$

□

2. G est-il un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$?
Si oui, déterminer une base de G et préciser la dimension de G.

Démonstration.

- Remarquons tout d'abord que I_3 est un élément de G. En effet : ${I_3}^2 = I_3$.
- Or : $(-I_3)^2 = (-1)^2 \cdot {I_3}^2 = I_3 \; \neq \; -I_3$.
  On en conclut que G n'est pas stable par multiplication externe par un réel.

$$\boxed{\text{Ainsi, } G \text{ n'est pas un espace vectoriel.}}$$

Commentaire

- Lorsqu'un résultat à démontrer est formulé sous forme d'interrogation (et pas d'affirmation comme c'est le cas en général), on pensera, dans une majorité de cas à répondre par la négative. À titre d'illustration, lorsqu'on rencontre les questions :
  - × « L'ensemble G est-il un sous-espace vectoriel de E ? »
  - × « Les v.a.r. X et Y sont-elles indépendantes ? »
  - × « La v.a.r. X admet-elle une variance ? »
  - × « La matrice A est-elle diagonalisable ? »
  - × « La suite (u_n) est-elle majorée ? »

  la réponse est, généralement, « non » (à justifier évidemment).
- La formulation de l'énoncé est un peu trompeuse. En effet, l'ajout de :

  « Si oui, déterminer une base de G et préciser la dimension de G »

  laisse penser que l'ensemble G est un espace vectoriel. D'ailleurs, cette même formulation est utilisée dans la question précédente alors que F est bien un espace vectoriel. Il faut donc garder suffisamment de recul quant à la remarque du point précédent. La manière dont l'énoncé est formulé donne souvent une indication de la réponse attendue. Il arrive cependant qu'un concepteur opte pour une formulation piégeuse comme c'était le cas ici.
- Il faut s'habituer à avoir une intuition sur le caractère vectoriel ou non d'un ensemble. Ici, on considère l'ensemble des matrices dont l'élévation au carré donne la matrice initiale. Cette définition met en jeu un produit de matrices (à ne pas confondre avec une multiplication externe). Dans ce cas, il est fréquent que l'ensemble considéré ne soit pas un espace vectoriel.
  Si on n'a pas cette intuition, on peut tenter, au brouillon de démontrer que l'ensemble est un espace vectoriel en considérant la démonstration précédente. On ne parvient évidemment pas à aboutir ce qui doit nous conduire à considérer que G n'est pas un espace vectoriel.
- Pour démontrer qu'un ensemble G n'est pas un sous-espace vectoriel de E, on pourra, dans cet ordre :
  1) vérifier : $0_E \notin G$ (si $0_E \in G$, on essaie de vérifier le point suivant).
  2) exhiber un vecteur $u \in G$ tel que $(-1) \cdot u \notin G$ (si on ne parvient pas à trouver un tel vecteur u, on essaie de démontrer le point suivant).
     (on teste ici si $\cdot$ est une loi de composition externe ; si cette propriété est vérifiée pour -1, on peut aussi la tester pour 2 ou 3 etc)
  3) exhiber deux vecteurs $(u, v) \in G^2$ tels que $u + v \notin G$.
     (on teste ici la stabilité de G par somme)

□

3. Soit $A = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

a) Démontrer : $A \in F \cap G$.

Démonstration.

- Tout d'abord : $A = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$.

$$\boxed{\text{Ainsi, } A \in F.}$$

- D'autre part :

$$\begin{aligned} A^2 &= \left(\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}\right) \times \left(\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}\right) \\ &= \dfrac{1}{9}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \dfrac{1}{9}\begin{pmatrix} 6 & -3 & -3 \\ -3 & 6 & -3 \\ -3 & -3 & 6 \end{pmatrix} \\ &= \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = A \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } A \in G}$$

$$\boxed{\text{On a bien : } A \in F \cap G.}$$ □

b) En déduire un polynôme annulateur de A.

Démonstration.
D'après la question précédente : $A^2 = A$ ou encore : $A^2 - A = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}$.

$$\boxed{\text{Le polynôme } Q(X) = X^2 - X = X\,(X-1) \text{ est un polynôme annulateur de la matrice } A.}$$

Commentaire

- Une matrice $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ possède `TOUJOURS` un polynôme annulateur non nul Q.
On peut même démontrer (ce n'est pas au programme en ECE) qu'il existe toujours un tel polynôme de degré (au plus) n.
- Si Q est un polynôme annulateur de M alors, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, le polynôme $\alpha\, Q$ est toujours un polynôme annulateur de M puisque :

$$(\alpha\, Q)(M) \ = \ \alpha\, Q(M) \ = \ 0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{R})}$$

Cela suffit à démontrer que M possède une infinité de polynômes annulateurs.
On peut en obtenir d'autres. Par exemple $R(X) = (X-5)\, Q(X)$ est un polynôme annulateur de M puisqu'on a alors :

$$R(M) \ = \ (M - 5\, I_3)\, Q(M) \ = \ 0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{R})}$$

Il faut donc parler `D'UN` polynôme annulateur d'une matrice. □

c) Déterminer les valeurs propres de A, et donner une base de chaque sous-espace propre associé.

Démonstration.

- D'après la question précédente, $Q(X) = X\,(X-1)$ est un polynôme annulateur de A.
  Ainsi : $\text{Sp}(A) \subset \{\text{racines de } Q\} = \{0, 1\}$.

$$\boxed{\text{Ainsi : } \text{Sp}(A) \subset \{0,1\} \text{ et les seules valeurs propres possibles de } A \text{ sont } 0 \text{ et } 1.}$$

Commentaire

Les racines d'un polynôme annulateur d'une matrice M ne sont pas forcément toutes valeurs propres de M. En effet, si c'était le cas, en reprenant les notations de la remarque précédente, on pourrait démontrer que M admet une infinité de valeurs propres (alors qu'elle en possède au plus n). Par exemple, comme $R(X) = (X-5)\,Q(X)$ est un polynôme annulateur, un tel raisonnement permettrait de démontrer que 5 est aussi valeur propre.

- Vérifions maintenant si 1 est bien valeur propre de A.

$$\begin{aligned} A - I_3 &= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

  Cette matrice est non inversible car possède 2 colonnes égales ($C_1 = C_2$).

$$\boxed{\text{On en déduit que 1 est bien valeur propre de } A.}$$

- Déterminons $E_1(A)$ le sous-espace propre de A associé à la valeur propre 1.
  Soit $U = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

$$\begin{aligned} U \in E_1(A) &\iff (A - I_3)\,U = 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \\ &\iff -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \textit{(en multipliant par } 3 \neq 0\textit{)} \\ &\iff \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & z & = & 0 \\ x & + & y & + & z & = & 0 \\ x & + & y & + & z & = & 0 \end{array} \right. \\ &\underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1}}{\iff} \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & z & = & 0 \\ & & & & 0 & = & 0 \\ & & & & 0 & = & 0 \end{array} \right. \\ &\iff \left\{ \; x = -y - z \right. \end{aligned}$$

Finalement on obtient l'expression de $E_1(A)$ suivante :

$$\begin{array}{rcl} E_1(A) & = & \{U \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid AU = U\} \\ & = & \{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid x = -y - z\} \\ & = & \{\begin{pmatrix} -y-z \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid (y,z) \in \mathbb{R}^2\} \\ & = & \{y \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mid (y,z) \in \mathbb{R}^2\} \ = \ \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \end{array}$$

- La famille $\mathcal{F}_1 = \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$:
  - × engendre $E_1(A)$,
  - × est une famille libre de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ car constituée uniquement de deux vecteurs non colinéaires.

$$\boxed{\text{Ainsi, } \mathcal{F}_1 \text{ est une base de } E_1(A).}$$

Commentaire

Il faut s'habituer à déterminer les ensembles $E_\lambda(A)$ (ou des vecteurs propres de A associés à la valeur propre λ) par lecture de la matrice $A - \lambda\, I_3$. Ici on a $\lambda = 1$. On cherche donc les vecteurs $U = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ de $E_1(A)$ c'est-à-dire les vecteurs tels que : $(A - I_3)\, U = 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})}$. Or :

$$\begin{array}{rcl} -\dfrac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & = & -\dfrac{x}{3} \cdot C_1 - \dfrac{y}{3} \cdot C_2 - \dfrac{z}{3} \cdot C_3 \\ & = & -\dfrac{x}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \dfrac{y}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \dfrac{z}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Pour obtenir le vecteur nul à l'aide de cette combinaison linéaire, on peut notamment choisir :
- × $z = 0$ et $x = -y$.
  En particulier, $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ est bien un vecteur propre de A associé à la valeur propre 1.
- × $y = 0$ et $x = -z$.
  En particulier, $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ est bien un vecteur propre de A associé à la valeur propre 1.

On en déduit : $E_1(A) \supset \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$. On conclut alors à l'égalité de ces deux espaces vectoriels en remarquant, à l'aide du théorème du rang, qu'ils ont même dimension 2.
Plus précisément, on a : $\dim\big(E_1(A)\big) \ + \ \underset{\underset{\displaystyle 1}{\shortparallel}}{\text{rg}(A - I_3)} \ = \ 3$.

- Vérifions maintenant si 0 est bien valeur propre de A.

$$\begin{aligned}
\mathrm{rg}(A) \quad &= \quad \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}\right) \\
&\underset{\substack{L_2 \leftarrow 2\,L_2 + L_1 \\ L_3 \leftarrow 2\,L_3 + L_1}}{=} \quad \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}\right) \\
&\underset{L_3 \leftarrow L_3 + L_2}{=} \quad \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right)
\end{aligned}$$

Cette matrice est non inversible car sa troisième ligne est nulle.

$$\boxed{\text{On en déduit que 0 est bien valeur propre de } A.}$$

- Déterminons $E_0(A)$ le sous-espace propre de A associé à la valeur propre 0.
Soit $U = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

$$\begin{aligned}
U \in E_0(A) \quad &\iff \quad A\,U = 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \\
&\iff \quad -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&\iff \quad \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \textit{(en multipliant par } 3 \neq 0\textit{)} \\
&\iff \quad \left\{\begin{array}{rcrcrcl} 2\,x & - & y & - & z & = & 0 \\ -x & + & 2\,y & - & z & = & 0 \\ -x & - & y & + & 2\,z & = & 0 \end{array}\right. \\
&\underset{\substack{L_2 \leftarrow 2\,L_2 + L_1 \\ L_3 \leftarrow 2\,L_3 + L_1}}{\iff} \quad \left\{\begin{array}{rcrcrcl} 2\,x & - & y & - & z & = & 0 \\ & & 3\,y & - & 3\,z & = & 0 \\ & - & 3\,y & + & 3\,z & = & 0 \end{array}\right. \\
&\underset{L_3 \leftarrow L_3 + L_1}{\iff} \quad \left\{\begin{array}{rcrcrcl} 2\,x & - & y & - & z & = & 0 \\ & & 3\,y & - & 3\,z & = & 0 \\ & & & & 0 & = & 0 \end{array}\right. \\
&\iff \quad \left\{\begin{array}{rcrcl} 2\,x & - & y & = & z \\ & & 3\,y & = & 3\,z \end{array}\right. \\
&\underset{L_3 \leftarrow \frac{1}{3} L_3}{\iff} \quad \left\{\begin{array}{rcrcl} 2\,x & - & y & = & z \\ & & y & = & z \end{array}\right. \\
&\underset{L_1 \leftarrow L_1 + L_2}{\iff} \quad \left\{\begin{array}{rcrcl} 2\,x & & & = & 2\,z \\ & & y & = & z \end{array}\right.
\end{aligned}$$

Finalement on obtient l'expression de $E_0(A)$ suivante :

$$\begin{aligned} E_0(A) &= \{U \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid AU = 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})}\} \\ &= \{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid x = z \quad \text{et} \quad y = z\} \\ &= \{\begin{pmatrix} z \\ z \\ z \end{pmatrix} \mid z \in \mathbb{R}\} \\ &= \{z \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mid z \in \mathbb{R}\} \ = \ \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \end{aligned}$$

- La famille $\mathcal{F}_0 = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$:
  - × engendre $E_0(A)$,
  - × est une famille libre de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ car constituée uniquement d'une matrice non nulle.

$$\boxed{\text{Ainsi, } \mathcal{F}_0 \text{ est une base de } E_0(A).}$$

□

d) La matrice A est-elle inversible ? Est-elle diagonalisable ?

Démonstration.

- D'après la question précédente, le réel 0 est valeur propre de A.

$$\boxed{\text{On en conclut que la matrice } A \text{ n'est pas inversible.}}$$

- D'après le théorème de concaténation, la concaténation des familles $\mathcal{F}_0$ et $\mathcal{F}_1$ définies à la question précédente forme une famille libre que l'on note $\mathcal{B}'$.
  De plus, $\mathrm{Card}(\mathcal{B}') = 3 = \dim(\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}))$.
  On en déduit que $\mathcal{B}'$ est une base de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ formée de vecteurs propres de A.

$$\boxed{\text{Ainsi, la matrice } A \text{ est diagonalisable.}}$$

Commentaire

On pouvait aussi remarquer que la matrice A est symétrique réelle et donc diagonalisable. Au vu de la position de cette question dans l'énoncé, le concepteur attendait certainement la caractérisation à l'aide d'une base de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ formée de vecteurs propres de A. L'utilisation du caractère symétrique réel est souvent associé à la formulation suivante :

« Démontrer sans calcul que la matrice A est diagonalisable »

□

Partie II - Réduction d'une matrice à paramètres

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. On pose $A = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$, $U_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $U_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $U_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

4. Calculer AU_1, AU_2 et AU_3. Que peut-on en déduire ?

Démonstration.
On a :

$$AU_1 = \begin{pmatrix} a+2b \\ a+2b \\ a+2b \end{pmatrix} = (a+2b)U_1, \qquad AU_2 = \begin{pmatrix} a-b \\ b-a \\ 0 \end{pmatrix} = (a-b)U_2, \qquad AU_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ a-b \\ b-a \end{pmatrix} = (a-b)U_3$$

De plus, les vecteurs U_1, U_2 et U_3 sont tous non nuls.

$$\boxed{\text{On en déduit que } a+2b \text{ et } a-b \text{ sont des valeurs propres de } A.}$$

□

5. Démontrer que (U_1, U_2, U_3) est une base de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

Démonstration.

- La famille (U_1) est libre car constituée d'un unique vecteur non nul. De plus, U_1 est un vecteur propre de A associé à la valeur propre $a+2b$.
- La famille (U_2, U_3) est libre car constituée de deux vecteurs non colinéaires. De plus, U_2 et U_3 sont deux vecteurs propres associés à la même valeur propre $a-b$.

Par théorème de concaténation, on en déduit que la famille (U_1, U_2, U_3) est libre.
De plus, $\mathrm{Card}((U_1, U_2, U_3)) = 3 = \dim(\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}))$.

$$\boxed{\text{La famille } (U_1, U_2, U_3) \text{ est donc une base de } \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}).}$$

□

6. En déduire que A est diagonalisable et expliciter une matrice $P \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ inversible telle que $A = PDP^{-1}$ où

$$D = \begin{pmatrix} a+2b & 0 & 0 \\ 0 & a-b & 0 \\ 0 & 0 & a-b \end{pmatrix}$$

Démonstration.
La famille (U_1, U_2, U_3) est une base de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ formée de vecteurs propres de A.

$$\boxed{\text{On en déduit que } A \text{ est diagonalisable.}}$$

Ainsi, il existe :

- une matrice $P \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ inversible obtenue par concaténation des bases des sous-espaces propres de A,
- une matrice $D \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ diagonale dont les coefficients diagonaux sont les valeurs propres de A rangées dans le même ordre que les vecteurs propres dans P,

telles que $A = PDP^{-1}$.

$$\boxed{\text{On peut choisir } P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ pour avoir } A = PDP^{-1} \text{ où } D \text{ est la matrice diagonale de l'énoncé.}}$$

□

7. Vérifier que :

$$\mathrm{Sp}(A) \subset \mathbb{R}_- \iff a \leqslant \min(b, -2b)$$

Démonstration.
D'après la question précédente, A est semblable à D (qui est diagonale) donc

$$\mathrm{Sp}(A) = \mathrm{Sp}(D) = \{a+2b, a-b\}$$

Ainsi :

$$\mathrm{Sp}(A) \subset \mathbb{R}_- \iff \begin{cases} a+2b \leqslant 0 \\ a-\ \ b \leqslant 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a \leqslant -2b \\ a \leqslant b \end{cases} \iff a \leqslant \min(b, -2b)$$

□

Partie III - Étude d'un système différentiel linéaire à paramètres

Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. On considère dans cette partie le système différentiel linéaire

$$(S) : \left\{ \begin{array}{ccccccc} x' & = & ax & + & by & + & bz \\ y' & = & bx & + & ay & + & bz \\ z' & = & bx & + & by & + & az \end{array} \right.$$

où x, y et z désignent des fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

8. A l'aide des résultats de la partie **II**, donner la forme générale des solutions de (S).

Démonstration.
On remarque que le système différentiel (S) s'écrit matriciellement $X' = AX$ où A est la matrice étudiée dans la partie **II**.
On a montré que la matrice A est diagonalisable. Ainsi, la forme générale des solutions est :

$$\boxed{\begin{array}{c} t \mapsto C_1 \mathrm{e}^{(a+2b)t} U_1 + C_2 \mathrm{e}^{(a-b)t} U_2 + C_3 \mathrm{e}^{(a-b)t} U_3 \\ \text{où } (C_1, C_2, C_3) \in \mathbb{R}^3. \end{array}}$$

□

9. Quel résultat permet d'affirmer l'existence d'une unique solution $X_0 : t \mapsto \begin{pmatrix} x_0(t) \\ y_0(t) \\ z_0(t) \end{pmatrix}$ du système différentiel (S) telle que $X_0(0) = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$? Déterminer explicitement cette solution.

Démonstration.
Il s'agit d'un problème de Cauchy, or tout problème de Cauchy admet une unique solution d'après le théorème de Cauchy.
Soit $(C_1, C_2, C_3) \in \mathbb{R}^3$ tel que, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$X_0(t) = C_1 \mathrm{e}^{(a+2b)t} U_1 + C_2 \mathrm{e}^{(a-b)t} U_2 + C_3 \mathrm{e}^{(a-b)t} U_3$$

Alors :

$$\begin{aligned}
X_0(0) = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} &\iff C_1U_1 + C_2U_2 + C_3U_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&\iff \begin{pmatrix} C_1 + C_2 \\ C_1 - C_2 + C_3 \\ C_1 - C_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&\iff \begin{cases} C_1 + C_2 = 4 \\ C_1 - C_2 + C_3 = 4 \\ C_1 - C_3 = 1 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} C_1 + C_2 = 4 \\ -2C_2 + C_3 = 0 & L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ -C_2 - C_3 = -3 & L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} C_1 + C_2 = 4 \\ -2C_2 + C_3 = 0 \\ -3C_3 = -6 & L_3 \leftarrow 2L_3 - L_2 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} C_1 = 3 \\ C_2 = 1 & \textit{(par remontées successives)} \\ C_3 = 2 \end{cases}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Finalement, } X_0 : t \mapsto 3\mathrm{e}^{(a+2b)t}U_1 + \mathrm{e}^{(a-b)t}U_2 + 2\mathrm{e}^{(a-b)t}U_3.}$$

□

10. On suppose dans cette question que $a > 0$.

a) Vérifier que : $a > \min(b, -2b)$.

Démonstration.
Les nombres b et $-2b$ étant de signes opposés, au moins l'un d'entre eux est négatif ou nul. Ainsi : $\min(b, -2b) \leqslant 0$.

$$\boxed{\text{On a bien : } \min(b, -2b) \leqslant 0 < a.}$$

□

b) Expliciter une solution de (S) dont la trajectoire est divergente.
(On pourra distinguer des cas selon le signe de b)

Démonstration.
Distinguons deux cas :

- Premier cas : $b \leqslant 0$.
  Considérons alors la solution associée au triplet $(C_1, C_2, C_3) = (0, 1, 0)$:

$$X : t \mapsto \mathrm{e}^{(a-b)t}U_2$$

Pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{(a-b)t} \\ -\mathrm{e}^{(a-b)t} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Or $b \leqslant 0$ donc $a - b > 0$ et donc $\lim\limits_{t \to +\infty} x(t) = +\infty$.

$$\boxed{\text{La trajectoire associée à } X \text{ est divergente.}}$$

- Deuxième cas : $b > 0$.
  Considérons alors la solution associée au triplet $(C_1, C_2, C_3) = (1, 0, 0)$:

$$X : t \mapsto \mathrm{e}^{(a+2b)t} U_1$$

Pour tout $t \in \mathbb{R}$,

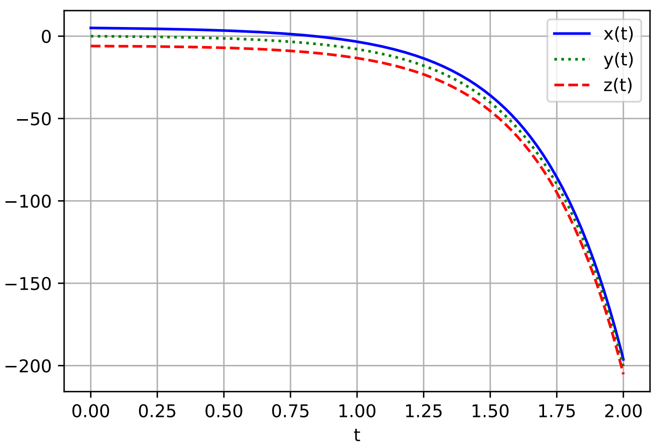
$$X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{(a+2b)t} \\ \mathrm{e}^{(a+2b)t} \\ \mathrm{e}^{(a+2b)t} \end{pmatrix}$$

Or $b > 0$ donc $a + 2b > 0$ et donc $\lim\limits_{t \to +\infty} x(t) = +\infty$.

$$\boxed{\text{La trajectoire associée à } X \text{ est divergente.}}$$

$\square$

11. On suppose dans cette question que $a = -3$ et $b = -1$. Expliquer pourquoi le tracé ci-dessous ne correspond à aucune solution de (S).



Démonstration.
On remarque que le tracé proposé correspond à une solution dont la trajectoire est divergente.
Montrons que toutes les solutions de (S) ont une trajectoire convergente, ce qui permettra de conclure.
Soit X une solution de (S). Il existe $(C_1, C_2, C_3) \in \mathbb{R}^3$ tel que, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$X(t) = C_1 \mathrm{e}^{(a+2b)t} U_1 + C_2 \mathrm{e}^{(a-b)t} U_2 + C_3 \mathrm{e}^{(a-b)t} U_3 = \begin{pmatrix} C_1 \mathrm{e}^{(a+2b)t} + C_2 \mathrm{e}^{(a-b)t} \\ C_1 \mathrm{e}^{(a+2b)t} - C_2 \mathrm{e}^{(a-b)t} + C_3 \mathrm{e}^{(a-b)t} \\ C_1 \mathrm{e}^{(a+2b)t} - C_3 \mathrm{e}^{(a-b)t} \end{pmatrix}$$

Or, avec les valeurs proposées de a et de b, on obtient $a + 2b = -5$ et $a - b = -2$.

D'où, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 e^{-5t} + C_2 e^{-2t} \\ C_1 e^{-5t} + (C_3 - C_2) e^{-2t} \\ C_1 e^{-5t} - C_3 e^{-2t} \end{pmatrix}$$

et donc $\lim\limits_{t \to +\infty} x(t) = \lim\limits_{t \to +\infty} y(t) = \lim\limits_{t \to +\infty} z(t) = 0$.

$$\boxed{\text{La trajectoire associée à } X \text{ est convergente.}}$$

□

Exercice 3 (EDHEC 2011)

On désigne par n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On dispose de n urnes, numérotées de 1 à n, contenant chacune n boules. On répète n épreuves, chacune consistant à choisir une urne au hasard et à en extraire une boule au hasard. On suppose que les choix des urnes sont indépendants les uns des autres.
Pour tout i de $\{1, 2, ..., n\}$, on note X_i la variable aléatoire prenant la valeur 1 si l'urne numérotée i contient toujours n boules au bout de ces n épreuves, et qui prend la valeur 0 sinon.

1. a) Pour tout i et tout k, éléments de $\{1, 2, ..., n\}$, on note $U_{i,k}$ l'évènement « l'urne numéro i est choisie à la $k^{\text{ème}}$ épreuve ».
Écrire l'évènement $[X_i = 1]$ à l'aide de certains des évènements $U_{i,k}$, puis montrer que :

$$\forall i \in \{1, 2, ..., n\}, \ \mathbb{P}([X_i = 1]) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$$

Démonstration.
Soit $i \in [\![1, n]\!]$.
L'urne i contienne n boules à la fin de n tirages si et seulement si elle n'est choisie à aucun tirage, *i.e.* l'événement $[X_i = 1]$ est réalisé si et seulement si, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, l'événement $U_{i,k}$ n'est pas réalisé.

$$\boxed{\text{On a donc : } [X_i = 1] = \bigcap_{k=1}^{n} \overline{U_{i,k}}}$$

Soient $i \in [\![1, n]\!]$ et $k \in [\![1, n]\!]$.
On commence par préciser que : $\mathbb{P}(U_{i,k}) = \dfrac{1}{n}$.
En effet, à chaque tirage, on choisit une urne de manière équiprobable parmi les n urnes disponibles.
On a alors :

$$\mathbb{P}(\overline{U_{i,k}}) = 1 - \mathbb{P}(U_{i,k}) = 1 - \frac{1}{n}$$

On obtient donc :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}([X_i = 1]) &= \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n} \overline{U_{i,k}}\right) \\ &= \prod_{k=1}^{n} \mathbb{P}(\overline{U_{i,k}}) && \textit{(car les choix des urnes sont indépendants)} \\ &= \prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{1}{n}\right) && \textit{(d'après les calculs précédents)} \\ &= \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall i \in [\![1, n]\!],\ \mathbb{P}([X_i = 1]) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n}$$

□

b) Justifier également que, si i et j sont deux entiers distincts, éléments de $\{1, 2, ..., n\}$, on a :

$$\mathbb{P}\left([X_i = 1] \cap [X_j = 1]\right) = \left(1 - \frac{2}{n}\right)^n$$

Démonstration.
Soit $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$ tel que $i \neq j$.

- L'événement $[X_i = 1] \cap [X_j = 1]$ est réalisé si et seulement si les urnes i et j ne sont choisies (toutes les deux) à aucun tirage, *i.e.* si et seulement si, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $\overline{U_{i,k}} \cap \overline{U_{j,k}}$ est réalisé.
  On obtient :
  $$[X_i = 1] \cap [X_j = 1] = \bigcap_{k=1}^{n} \overline{U_{i,k}} \cap \overline{U_{j,k}} = \bigcap_{k=1}^{n} \overline{U_{i,k} \cup U_{j,k}}$$
- Soit $k \in [\![1, n]\!]$.
  Les événements $U_{i,k}$ et $U_{j,k}$ sont incompatibles (on ne peut pas choisir en même temps les urnes i et j sur un seul tirage). On obtient donc :
  $$\mathbb{P}(U_{i,k} \cup U_{j,k}) = \mathbb{P}(U_{i,k}) + \mathbb{P}(U_{j,k}) = \frac{1}{n} + \frac{1}{n} = \frac{2}{n}$$
  On a alors :
  $$\mathbb{P}(\overline{U_{i,k} \cup U_{j,k}}) = 1 - \mathbb{P}(U_{i,k} \cup U_{j,k}) = 1 - \frac{2}{n}$$
- On en déduit que :
  $$\begin{aligned}
  \mathbb{P}([X_i = 1] \cap [X_j = 1]) &= \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n} \overline{U_{i,k} \cup U_{j,k}}\right) \\
  &= \prod_{k=1}^{n} \mathbb{P}(\overline{U_{i,k} \cup U_{j,k}}) && \textit{(car les choix des urnes sont indépendants)} \\
  &= \prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{2}{n}\right) && \textit{(d'après les calculs précédents)} \\
  &= \left(1 - \frac{2}{n}\right)^n
  \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall (i, j) \in [\![1, n]\!]^2,\ i \neq j,\ \mathbb{P}([X_i = 1] \cap [X_j = 1]) = \left(1 - \frac{2}{n}\right)^n}$$

□

c) Comparer $\left(1 - \dfrac{2}{n}\right)$ et $\left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^2$ et en déduire que, si i et j sont deux entiers distincts, éléments de $\{1, 2, ..., n\}$, alors les variables X_i et X_j ne sont pas indépendantes.

Démonstration.

- Pour comparer $\left(1 - \dfrac{2}{n}\right)$ et $\left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^2$, on étudie le signe de leur différence.

$$1 - \frac{2}{n} - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^2 = \cancel{1} - \cancel{\frac{2}{n}} - \left(\cancel{1} - \cancel{\frac{2}{n}} + \frac{1}{n^2}\right) = -\frac{1}{n^2} < 0$$

$$\boxed{1 - \frac{2}{n} \neq \left(1 - \frac{1}{n}\right)^2}$$

- Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ tel que $i \neq j$.
  D'après la question ***1.b)***, on sait que :

$$\mathbb{P}([X_i = 1] \cap [X_j = 1]) = \left(1 - \frac{2}{n}\right)^n$$

  D'après la question ***1.a)***, on sait que :

$$\mathbb{P}([X_i = 1])\ \mathbb{P}([X_j = 1]) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{2n} = \left(\left(1 - \frac{1}{n}\right)^2\right)^n$$

  Or, d'après le point précédent, on sait que :

$$1 - \frac{2}{n} \neq \left(1 - \frac{1}{n}\right)^2 \quad \text{donc} \quad \left(1 - \frac{2}{n}\right)^n \neq \left(\left(1 - \frac{1}{n}\right)^2\right)^n$$

  On en déduit que :

$$\mathbb{P}([X_i = 1] \cap [X_j = 1]) \neq \mathbb{P}([X_i = 1])\ \mathbb{P}([X_j = 1])$$

$$\boxed{\text{Les v.a.r. } X_i \text{ et } X_j \text{ ne sont pas indépendantes.}}$$

□

2. On pose $Y_n = \sum\limits_{k=1}^{n} X_k$.

a) Déterminer l'espérance de Y_n, notée $\mathbb{E}(Y_n)$.

Démonstration.

- Pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, X_i admet une espérance car c'est une v.a.r. finie $(X_i(\Omega) = \{0,1\}$.
  Donc la v.a.r. Y_n admet une espérance en tant que somme de v.a.r. qui en admettent.
- Par linéarité de l'espérance, on a :

$$\mathbb{E}(Y_n) = \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}(X_i)$$

  Soit $i \in [\![1,n]\!]$. Déterminons $\mathbb{E}(X_i)$:

$$\mathbb{E}(X_i) = \cancel{0 \times \mathbb{P}([X_i = 0])} + 1 \times \mathbb{P}([X_i = 1]) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$$

  On obtient alors :

$$\mathbb{E}(Y_n) = \sum_{i=1}^{n} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = n\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$$

$$\boxed{\mathbb{E}(Y_n) = n\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n}$$

□

b) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\mathbb{E}(Y_n)}{n}$ et donner un équivalent de $\mathbb{E}(Y_n)$ lorsque n est au voisinage de $+\infty$.

Démonstration.

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned} \frac{\mathbb{E}(Y_n)}{n} &= \left(1-\frac{1}{n}\right)^n \\ &= \exp\left(\ln\left(\left(1-\frac{1}{n}\right)^n\right)\right) \\ &= \exp\left(n\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)\right) \end{aligned}$$

  De plus, on sait que $\ln(1+x) \underset{x\to 0}{\sim} x$.

  Or $\lim\limits_{n\to+\infty} -\dfrac{1}{n} = 0$, donc $\ln\left(1-\dfrac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\dfrac{1}{n}$. D'où :

$$n\ln\left(1-\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \cancel{n} \times \left(-\frac{1}{\cancel{n}}\right) = -1$$

  Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln\left(\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^n\right) = -1$.

  Or la fonction exp est continue en -1, donc, par composition de **limites**,

  $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1-\dfrac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e}^{-1}$.

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{\mathbb{E}(Y_n)}{n} = \mathrm{e}^{-1}}$$

- On sait que : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\mathbb{E}(Y_n)}{n} = \mathrm{e}^{-1}$. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\mathbb{E}(Y_n)}{\mathrm{e}^{-1}\, n} = 1$.

  D'où : $\mathbb{E}(Y_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \mathrm{e}^{-1}\, n$.

$$\boxed{\mathbb{E}(Y_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n}{e}}$$

□

3. Pour tout i de $\{1, 2, ..., n\}$, on note N_i la variable aléatoire égale au nombre de boules manquantes dans l'urne numérotée i à la fin de ces n épreuves.

a) Donner sans calcul la loi de N_i ainsi que la valeur de $\mathbb{E}(N_i)$.

Démonstration.

Soit $i \in [\![1, n]\!]$.

- L'expérience consistant à effectuer n tirages est une successions de n épreuves de Bernoulli indépendantes de succès : $S =$ « choisir l'urne i ».

  Le choix de l'urne est équiprobable donc $\mathbb{P}(S) = \dfrac{1}{n}$.
- La v.a.r. N_i est la variable aléatoire associée au nombre de succès de cette expérience. Donc N_i suit une loi binomiale de paramètre n et $\mathbb{P}(S)$

$$\boxed{N_i \hookrightarrow \mathcal{B}\left(n, \frac{1}{n}\right) \text{ et } \mathbb{E}(N_i) = n \times \frac{1}{n} = 1}$$

□

b) Que vaut le produit $N_i X_i$?

Démonstration.
Soit $i \in [\![1, n]\!]$.

- Si l'urne i contient encore n boules à la fin des n tirages, alors :
  × $N_i = 0$ (il n'y a aucune boule manquante dans l'urne i)
  × $X_i = 1$ (par définition de X_i)
  Donc $N_i X_i = 0$.
- Soit $k \geqslant 1$.
  S'il manque k boules dans l'urne i à la fin des n tirages, alors :
  × $N_i = k$ (par définition de N_i)
  × $X_i = 0$ (car l'urne i ne contient pas n boules)
  Donc $N_i X_i = 0$.

$$\boxed{N_i X_i = 0}$$

□

c) Les variables N_i et X_i sont-elles indépendantes ?

Démonstration.
Soit $i \in [\![1, n]\!]$.

- La v.a.r. $N_i X_i$ admet une espérance car c'est une v.a.r. finie ($N_i X_i(\Omega) = \{0\}$).

$$\mathbb{E}(N_i X_i) = 0$$

- D'après la question ***2.a)***, $\mathbb{E}(X_i) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$.
  D'après la question ***3.a)***, $\mathbb{E}(N_i) = 1$.

$$\mathbb{E}(N_i)\ \mathbb{E}(X_i) = 1 \times \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \neq 0$$

On en déduit que :

$$\mathbb{E}(N_i X_i) \neq \mathbb{E}(N_i)\ \mathbb{E}(X_i)$$

$$\boxed{\text{Les v.a.r. } N_i \text{ et } X_i \text{ ne sont pas indépendantes.}}$$

Commentaire

On pouvait bien sûr utiliser la définition de l'indépendance. Par exemple :

- D'après la question ***3.b)***, la v.a.r. $N_i X_i = 0$.
  On remarque de plus que :
  $$[N_i = 1] \cap [X_i = 1] = [N_i X_i = 1]$$
  Donc on obtient :
  $$\mathbb{P}([N_i = 1] \cap [X_i = 1]) = \mathbb{P}([N_i X_i = 1]) = 0$$
- D'après la question ***2.a)***, on sait que :
  $$\mathbb{P}([X_i = 1]) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$$
  D'après la question ***3.a)***, on sait aussi que :
  $$\mathbb{P}([N_i = 1]) = \binom{n}{1} \left(\frac{1}{n}\right)^1 \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n-1} = \cancel{n}\frac{1}{\cancel{n}} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n-1} = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n-1}$$
  Donc on obtient :
  $$\mathbb{P}([N_i = 1])\ \mathbb{P}([X_i = 1]) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n-1} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{2n-1} \neq 0$$
- Finalement, on a donc :
  $$\mathbb{P}([N_i = 1] \cap [X_i = 1]) \neq \mathbb{P}([N_i = 1])\ \mathbb{P}([X_i = 1])$$
  Donc N_i et X_i ne sont pas indépendantes.

□

4. Compléter le programme informatique suivant pour qu'il simule l'expérience décrite au début de cet exercice et affiche les valeurs prises par X_1 et N_1 pour une valeur de n entrée par l'utilisateur.

```
1  n = int(input('Donnez un entier naturel n supérieur ou égal à 2 : '))
2  N1 = 0
3  X1 = 1
4  for k in range(1,n+1):
5      hasard = rd.randint(1,n+1)
6      if hasard == 1:
7          X1 = 0
8          N1 = N1 + 1
9  print(X1)
10 print(N1)
```

Démonstration.
Les variables `N1` et `X1` doivent contenir à la fin du programme une réalisation des v.a.r. N_1 et X_1.
L'expérience consiste à effectuer n tirages. Donc :

× la boucle « for » en ligne 4 permet de simuler ces n tirages.

× en ligne 5, la variable `hasard` contient une valeur entière choisie aléatoirement et uniformément entre 1 et n. C'est donc le numéro de l'urne dans laquelle on tire une boule au $k^{\text{ème}}$ tirage.

× si l'urne choisie est la numéro 1 (ligne 6), alors :
- l'urne 1 ne contient plus n boules. La variable `X1` doit donc contenir 0 (ligne 7).
- il y a donc une boule manquante supplémentaire pour l'urne 1, donc la variable `N1` doit augmenter de 1 (ligne 8).

× on finit en renvoyant les valeurs des variables `N1` et `X1` (lignes 9 et 10).

□

Exercice 4 (EDHEC 2024)

On se propose de déterminer s'il existe des fonctions f continues sur $\mathbb{R}$ et vérifiant l'égalité :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \; f(x) = 1 + \int_0^x t f(x-t) \mathrm{d}t \qquad (*)$$

1. Montrer que l'égalité $(*)$ est équivalente à l'égalité :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \; f(x) = 1 + \int_0^x (x-u) f(u) \mathrm{d}u \qquad (**)$$

Démonstration.
Soit $x \in \mathbb{R}$.
Tout d'abord, les deux intégrales considérées existent par continuité de f sur le segment $[0, x]$.
On procède par changement de variable affine (valide) :

$$\left| \begin{array}{lcl} t = x-u & & u = x-t \\ \mathrm{d}t = -\mathrm{d}u & & \mathrm{d}u = -\mathrm{d}t \\ t = 0 & \Longleftrightarrow & u = x \\ t = x & \Longleftrightarrow & u = 0 \end{array} \right.$$

$$\int_0^x t f(x-t) \mathrm{d}t = -\int_x^0 (x-u) f(u) \mathrm{d}u = \int_0^x (x-u) f(u) \mathrm{d}u$$

$$\boxed{\text{On a bien : } (*) \iff (**).}$$

□

2. On suppose dans cette question qu'une fonction f, continue sur $\mathbb{R}$, est solution de ce problème.

a) Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et que l'on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \; f'(x) = \int_0^x f(u) \mathrm{d}u$$

Démonstration.
Soit $x \in \mathbb{R}$.
D'après la question ***1*** :

$$\begin{aligned} f(x) &= 1 + \int_0^x (x-u) f(u) \mathrm{d}u \\ &= 1 + x \int_0^x f(u) \mathrm{d}u - \int_0^x u f(u) \mathrm{d}u \qquad \textit{(par linéarité de l'intégrale)} \end{aligned}$$

Or, les fonctions $u \mapsto f(u)$ et $u \mapsto uf(u)$ sont continues sur $\mathbb{R}$. D'après le théorème fondamental de l'analyse, les fonctions $x \mapsto \displaystyle\int_0^x f(u)\mathrm{d}u$ et $x \mapsto \displaystyle\int_0^x uf(u)\mathrm{d}u$ sont donc de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
Par somme et par produit, f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et

$$f'(x) = \int_0^x f(u)\mathrm{d}u + xf(x) - xf(x) = \int_0^x f(u)\mathrm{d}u$$

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R} \text{ et, pour tout } x \in \mathbb{R} : f'(x) = \int_0^x f(u)\mathrm{d}u.}$$

□

b) En déduire que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et que l'on a :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f''(x) = f(x)$$

Démonstration.
D'après le théorème fondamental de l'analyse et la question précédente, f' est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f''(x) = f(x)$$

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est de classe } \mathcal{C}^2 \text{ sur } \mathbb{R} \text{ et, pour tout } x \in \mathbb{R} : f''(x) = f(x).}$$

□

c) Trouver toutes les solutions de l'équation différentielle obtenue ci-dessus.

Démonstration.
Il s'agit d'une équation différentielle linéaire d'ordre 2, homogène et à coefficients constants.
On pose $P(x) = x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$ le polynôme caractéristique associé. Ce polynôme admet deux racines simples : $r_1 = 1$ et $r_2 = -1$. On en déduit que les solutions de l'équation différentielle $y'' = y$ sont de la forme :

$$t \mapsto \lambda \mathrm{e}^t + \mu \mathrm{e}^{-t}$$

où $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. □

d) Déterminer $f(0)$ et $f'(0)$ puis montrer que le problème posé au début de cet exercice a au plus une solution qui est la fonction f définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2}$$

Démonstration.

- D'après la formule $(*)$: $f(0) = 1 + \displaystyle\int_0^0 tf(0-t)\mathrm{d}t = 1$.
- D'après la question ***2.a)*** : $f'(0) = \displaystyle\int_0^0 f(u)\mathrm{d}u = 0$.

De plus, d'après la question ***2.d)***, il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f(x) = \lambda e^x + \mu e^{-x}$$

Déterminons λ et μ :

$$\begin{cases} f(0) = 1 \\ f'(0) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda + \mu = 1 \\ \lambda - \mu = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \lambda + \mu = 1 \\ \quad - 2\mu = -1 \quad L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \lambda = \frac{1}{2} \\ \mu = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{On a montré que si } f \text{ est solution du problème, alors, pour tout } x \in \mathbb{R} : f(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}. \\ \text{Il y a bien au plus une solution.}\end{array}}$$

□

3. Vérifier qu'effectivement la fonction trouvée à la question ***2.d)*** est la seule solution du problème proposé en début d'exercice.

Démonstration.
Posons $g : x \mapsto \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$. La fonction g est continue sur $\mathbb{R}$.
Soit $x \in \mathbb{R}$. Par linéarité de l'intégrale :

$$\begin{aligned}\int_0^x (x-u)g(u)du &= x\int_0^x g(u)du - \int_0^x ug(u)du \\ &= \frac{1}{2}\left(x\int_0^x (e^u + e^{-u})du - \int_0^x u(e^u + e^{-u})du\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(x\int_0^x e^u du + x\int_0^x e^{-u}du - \int_0^x ue^u du - \int_0^x ue^{-u}du\right)\end{aligned}$$

Calculons ces différentes intégrales :

- $\displaystyle\int_0^x e^u du = [\ e^u\ ]_0^x = e^x - 1$
- $\displaystyle\int_0^x e^{-u} du = \left[\ -e^{-u}\ \right]_0^x = 1 - e^{-x}$
- Procédons par intégration par parties (valide car les fonctions v et w sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, x]$) :

$$\left| \begin{array}{ll} v'(u) = e^u & v(u) = e^u \\ w(u) = u & w'(u) = 1 \end{array} \right.$$

$$\int_0^x ue^u du = [\ ue^u\ ]_0^x - \int_0^x e^u du = xe^x - (e^x - 1) = xe^x - e^x + 1$$

- Procédons par intégration par parties (valide car les fonctions v et w sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, x]$) :

$$\left| \begin{array}{ll} v'(u) = e^{-u} & v(u) = -e^{-u} \\ w(u) = u & w'(u) = 1 \end{array} \right.$$

$$\int_0^x ue^{-u} du = \left[\ -ue^{-u}\ \right]_0^x - \int_0^x -e^{-u} du = -xe^{-x} + (1 - e^{-x}) = -xe^{-x} - e^{-x} + 1$$

D'où :

$$\begin{aligned}
\int_0^x (x-u)g(u)\mathrm{d}u &= \frac{1}{2}\left(x(\mathrm{e}^x-1)+x(1-\mathrm{e}^{-x})-(x\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^x+1)-(-x\mathrm{e}^{-x}-\mathrm{e}^{-x}+1)\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\cancel{x\mathrm{e}^x}-\cancel{x}+\cancel{x}-\cancel{x\mathrm{e}^{-x}}-\cancel{x\mathrm{e}^x}+\mathrm{e}^x-1+\cancel{x\mathrm{e}^{-x}}+\mathrm{e}^{-x}-1\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}-2\right) \\
&= \frac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{2}-1 \\
&= g(x)-1
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{La fonction } g \text{ vérifie } (**) \text{ donc est solution du problème.}}$$

□

4. On se propose de déterminer maintenant s'il existe des fonctions f continues sur $\mathbb{R}$ et vérifiant l'égalité :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \int_0^x tf(x-t)\mathrm{d}t$$

Sans refaire les calculs faits précédemment, mais en précisant les résultats qui restent valables, montrer que ce nouveau problème possède une seule solution que l'on déterminera.

Démonstration.
Reprenons la structure de démonstration précédente. Si f est solution de ce nouveau problème, alors on démontre que :

- On peut également mettre ce problème sous la forme $(**)$ sans la constante 1 :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \int_0^x (x-u)f(u)\mathrm{d}u$$

- f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et vérifie : $\forall x \in \mathbb{R},\ f''(x) = f(x)$.
- f est solution du problème de Cauchy : $\begin{cases} y'' = y \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$.
- Ce problème de Cauchy admet une unique solution : la fonction identiquement nulle. D'où :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 0$$

- Réciproquement, la fonction identiquement nulle vérifie bien :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = 0 = \int_0^x tf(x-t)\mathrm{d}t$$

□