

---

## DS5 (vB) - Correction (ESSEC II 2010)

---

*La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.*

*Les candidat·es sont invité·es à **encadrer** dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*

*Aucun document n'est autorisé. **L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.** Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*

*Si au cours de l'épreuve, un candidat ou une candidate repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.*

On suppose, et c'est valable pour toute l'épreuve, que la librairie suivante est importée sous son alias habituel :

- `import numpy.random as rd`

- L'objet du problème est l'étude de la durée de fonctionnement d'un système (une machine, un organisme, un service ...) démarré à la date  $t = 0$  et susceptible de tomber en panne à une date aléatoire. Après une partie préliminaire sur les propriétés de la loi exponentielle, on introduira dans la deuxième partie, les notions permettant d'étudier des propriétés de la date de première panne. Enfin, dans une troisième partie on examinera le fonctionnement d'un système satisfaisant certaines propriétés particulières.
- Les trois parties sont dans une large mesure indépendantes.
- Toutes les variables aléatoires intervenant dans le problème sont définies sur un espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ .
- Pour toute variable aléatoire  $Y$ , on notera  $\mathbb{E}(Y)$  son espérance lorsqu'elle existe.
- On adoptera les conventions suivantes :
  - × on dira qu'une fonction  $f$  continue sur  $\mathbb{R}_+^*$  et continue à droite en 0 est continue sur  $\mathbb{R}_+$ .
  - × en outre, si  $T$  est une variable aléatoire positive dont la loi admet la densité  $f$  continue sur  $\mathbb{R}_+$ , sa fonction de répartition  $F_T(t) = \mathbb{P}([T \leq t]) = \int_0^t f(u) du$ , est dérivable sur  $\mathbb{R}_+^*$ , et dérivable à droite en 0.
  - × on conviendra d'écrire  $F_T'(t) = f(t)$  pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$ ,  $F_T'(0)$  désignant donc dans ce cas la dérivée à droite en 0.

## I. Généralités sur la loi exponentielle

On rappelle qu'une variable aléatoire suit la loi exponentielle de paramètre  $\mu$  ( $\mu > 0$ ) si elle admet pour densité la fonction  $f_\mu$  définie par :

$$f_\mu(x) = \begin{cases} \mu e^{-\mu x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

1. Soit  $X$  une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre  $\mu$ .

a) Donner l'espérance  $\mathbb{E}(X)$  et la variance  $\mathbb{V}(X)$ .

*Démonstration.*

Comme  $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\mu)$ , alors  $X$  admet une espérance et une variance.

De plus :  $\mathbb{E}(X) = \frac{1}{\mu}$  et  $\mathbb{V}(X) = \frac{1}{\mu^2}$ .

### Commentaire

- Une bonne connaissance du cours est une condition sine qua non de réussite au concours. En effet, on trouve dans toutes les épreuves de maths (même pour les écoles les plus prestigieuses), des questions d'application directe du cours. C'est particulièrement le cas dans cet énoncé où les propriétés caractéristiques de la loi exponentielle sont étudiées.
- Profitons-en pour rappeler que la connaissance de l'espérance et de la variance permet d'obtenir le moment d'ordre 2. En effet, d'après la formule de Kœnig-Huygens :

$$\begin{aligned} \mathbb{V}(X) &= \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2 \\ \text{donc } \mathbb{E}(X^2) &= \mathbb{V}(X) + (\mathbb{E}(X))^2 \end{aligned}$$

□

- b) Justifier que pour tout entier naturel  $n$ ,  $X^n$  admet une espérance et déterminer une relation de récurrence entre  $\mathbb{E}(X^{n+1})$  et  $\mathbb{E}(X^n)$  pour tout entier naturel  $n$ .

*Démonstration.*

- Soit  $n \in \mathbb{N}$ .

La v.a.r.  $X$  admet un moment d'ordre  $n$  si et seulement si l'intégrale  $\int_{-\infty}^{+\infty} t^n f_\mu(t) dt$  est absolument convergente, ce qui équivaut à démontrer la convergence pour ce calcul de moment du type  $\int_{-\infty}^{+\infty} t^m f_X(t) dt$ .

- Tout d'abord, comme la fonction  $f_\mu$  est nulle en dehors de  $]0, +\infty[$  :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t^n f_\mu(t) dt = \int_0^{+\infty} t^n f_\mu(t) dt = \int_0^{+\infty} t^n \mu e^{-\mu t} dt$$

- De plus, la fonction  $t \mapsto t^n f_\mu(t)$  est continue par morceaux sur  $[0, +\infty[$ .

L'intégrale  $\int_0^{+\infty} t^n f_\mu(t) dt$  est donc impropre seulement en  $+\infty$ .

- On a :

$$\times \forall t \in [0, +\infty[, t^n \mu e^{-\mu t} \geq 0 \quad \text{et} \quad e^{-\frac{1}{2}\mu t} \geq 0.$$

$$\times t^n \mu e^{-\mu t} = \underset{t \rightarrow +\infty}{o} \left( \frac{\mu}{2} e^{-\frac{1}{2}\mu t} \right). \text{ En effet :}$$

$$\frac{t^n \mu e^{-\mu t}}{\frac{\mu}{2} e^{-\frac{1}{2}\mu t}} = 2 \frac{t^n}{e^{\frac{1}{2}\mu t}} \xrightarrow{B \rightarrow +\infty} 0 \quad (\text{par croissances comparées})$$

$\times$  l'intégrale  $\int_0^{+\infty} \frac{\mu}{2} e^{-\frac{1}{2}\mu t} dt$  est convergente en tant que moment d'ordre 0 d'une v.a.r. de loi  $\mathcal{E}\left(\frac{\mu}{2}\right)$ .

Par critère de négligeabilité des intégrales généralisées de fonctions continues positives, l'intégrale  $\int_0^{+\infty} t^n f_\mu(t) dt$  est convergente.

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , la v.a.r.  $X$  admet un moment d'ordre  $n$ .

- Soit  $B \in [0, +\infty[$  et soit  $n \in \mathbb{N}$ .

$$\int_0^B t^n f_\mu(t) dt = \int_0^B t^n \mu e^{-\mu t} dt$$

On procède alors par intégration par parties (IPP).

$$\left| \begin{array}{ll} u(t) = e^{-\mu t} & u'(t) = -\mu e^{-\mu t} \\ v'(t) = \mu t^n & v(t) = \frac{\mu}{n+1} t^{n+1} \end{array} \right.$$

Cette IPP est valide car les fonctions  $u$  et  $v$  sont de classe  $\mathcal{C}^1$  sur le SEGMENT  $[0, B]$ .

On obtient :

$$\begin{aligned} \int_0^B t^n \mu e^{-\mu t} dt &= \left[ \frac{\mu}{n+1} t^{n+1} e^{-\mu t} \right]_0^B - \int_0^B \frac{-1}{n+1} (-\mu t^{n+1}) \mu e^{-\mu t} dt \\ &= \frac{\mu}{n+1} [t^{n+1} e^{-\mu t}]_0^B + \frac{\mu}{n+1} \int_0^B t^{n+1} \mu e^{-\mu t} dt \\ &= \frac{\mu}{n+1} B^{n+1} e^{-\mu B} + \frac{\mu}{n+1} \int_0^B t^{n+1} f_\mu(t) dt \end{aligned} \quad (*)$$

- Or :
  - ×  $\frac{\mu}{n+1} B^{n+1} e^{-\mu B} \xrightarrow{B \rightarrow +\infty} 0$  par croissances comparées.
  - × l'intégrale  $\int_0^{+\infty} t^n f_\mu(t) dt$  (respectivement  $\int_0^{+\infty} t^{n+1} f_\mu(t) dt$ ) est convergente car, la v.a.r.  $X$  admet un moment d'ordre  $n$  (respectivement  $n+1$ ).
  - Ainsi, la quantité  $\int_0^B t^n f_\mu(t) dt$  (respectivement  $\int_0^B t^{n+1} f_\mu(t) dt$ ) admet une limite finie lorsque  $B$  tend vers  $+\infty$ .

Par passage à la limite (quand  $B$  tend vers  $+\infty$ ) dans l'égalité (\*), on obtient alors :

$$\int_0^{+\infty} t^n f_\mu(t) dt = 0 + \frac{\mu}{n+1} \int_0^{+\infty} t^{n+1} f_\mu(t) dt$$

$$\begin{array}{ccc} \parallel & & \parallel \\ \mathbb{E}(X^n) & & \frac{\mu}{n+1} \mathbb{E}(X^{n+1}) \end{array}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \mathbb{E}(X^{n+1}) = \frac{n+1}{\mu} \mathbb{E}(X^n)$$

**Commentaire**

- Il n'était pas obligatoire de commencer par faire une démonstration de convergence à l'aide d'un théorème de comparaison. Il était aussi possible de procéder par récurrence. L'idée est alors de démontrer que l'existence du moment d'ordre  $n$  permet de démontrer l'existence d'ordre  $n+1$ . Toutefois, ce raisonnement est plus subtil car il nécessite d'explicitier la relation entre  $\mathbb{E}(X^n)$  et  $\mathbb{E}(X^{n-1})$  avant de la démontrer.
- Plus précisément, on pouvait démontrer par récurrence :  $\forall n \in \mathbb{N}^*, \mathcal{P}(n)$   
où  $\mathcal{P}(n)$  : la v.a.r.  $X$  admet un moment d'ordre  $n$  et  $\mathbb{E}(X^n) = \frac{n}{\mu} \mathbb{E}(X^{n-1})$ . □

c) En déduire  $\mathbb{E}(X^n)$  pour tout  $n > 0$ .

*Démonstration.*

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . D'après la question précédente :  $\forall m \in \mathbb{N}^*, \mathbb{E}(X^m) = \frac{m}{\mu} \mathbb{E}(X^{m-1})$ . Ainsi :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X^n) &= \frac{n}{\mu} \mathbb{E}(X^{n-1}) && \text{(en appliquant la relation en } m = n) \\ &= \frac{n}{\mu} \times \left( \frac{n-1}{\mu} \mathbb{E}(X^{n-2}) \right) && \text{(en appliquant la relation en } m = n-1) \\ &= \frac{n}{\mu} \times \frac{n-1}{\mu} \left( \frac{n-2}{\mu} \mathbb{E}(X^{n-3}) \right) && \text{(en appliquant la relation en } m = n-2) \\ &\dots && \dots \\ &= \frac{n}{\mu} \times \frac{n-1}{\mu} \times \dots \times \frac{n-(n-1)}{\mu} \mathbb{E}(X^{n-n}) && \text{(en appliquant la relation en } m = 1) \\ &= \frac{n!}{\mu^n} \mathbb{E}(X^0) = \frac{n!}{\mu^n} \end{aligned}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \mathbb{E}(X^n) = \frac{n!}{\mu^n}$$

□

d) Retrouver la valeur de  $\mathbb{V}(X)$  à l'aide de la question précédente.

*Démonstration.*

D'après la formule de Koenig-Huygens :

$$\begin{aligned} \mathbb{V}(X) &= \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2 \\ &= \frac{2!}{\mu^2} - \left(\frac{1!}{\mu}\right)^2 && \text{(en appliquant la formule de la} \\ & && \text{question précédente en } n = 1 \text{ et } n = 2) \\ &= \frac{2}{\mu^2} - \frac{1}{\mu^2} \end{aligned}$$

Finalement, on retrouve bien :  $\mathbb{V}(X) = \frac{1}{\mu^2}$ .

□

## 2. Propriété caractéristique

a) Soient  $\mu > 0$  et  $X$  une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre  $\mu$ .  
Justifier que pour tout réel  $x$  positif ou nul, le nombre  $\mathbb{P}([X > x])$  est non nul.  
Montrer que pour tous réels positifs  $x$  et  $y$  :

$$\mathbb{P}_{[X > x]}([X > x + y]) = \mathbb{P}([X > y])$$

*Démonstration.*

Soit  $x \geq 0$  et soit  $y \geq 0$ .

• Tout d'abord :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}([X > x]) &= 1 - \mathbb{P}([X \leq x]) \\ &= 1 - (1 - e^{-\mu x}) \\ &= e^{-\mu x} \end{aligned}$$

$\forall x \geq 0, \mathbb{P}([X > x]) = e^{-\mu x} > 0$

• Ensuite :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_{[X > x]}([X > x + y]) &= \frac{\mathbb{P}([X > x] \cap [X > x + y])}{\mathbb{P}([X > x])} && \text{(par définition et} \\ & && \text{car } \mathbb{P}([X > x]) > 0) \\ &= \frac{\mathbb{P}([X > x + y])}{\mathbb{P}([X > x])} && \text{(car } [X > x + y] \subset [X > x]) \\ &= \frac{e^{-\mu(x+y)}}{e^{-\mu x}} && \text{(d'après le point précédent appliqué en} \\ & && \text{ } x \geq 0 \text{ et } x + y \geq 0) \\ &= \frac{\cancel{e^{-\mu x}} e^{-\mu y}}{\cancel{e^{-\mu x}}} \end{aligned}$$

Ainsi :  $\forall x \geq 0, \forall y \geq 0, \mathbb{P}_{[X > x]}([X > x + y]) = e^{-\mu y} = \mathbb{P}([X > y])$ .

□

- b) Réciproquement, soit  $X$  une variable aléatoire positive admettant une densité  $f$  continue et strictement positive sur  $\mathbb{R}_+$ , et telle que pour tous réels positifs  $x$  et  $y$  :

$$\mathbb{P}_{[X > x]}([X > x + y]) = \mathbb{P}([X > y])$$

- (i) Soit  $R(x) = \mathbb{P}([X > x])$ . Justifier que  $R(x)$  est non nul pour tout réel positif.

*Démonstration.*

Soit  $x \geq 0$ .

- Par définition :

$$\mathbb{P}([X > x]) = \int_x^{+\infty} f(t) dt$$

- Or, d'après l'énoncé :

- ×  $\forall t \in [0, +\infty[, f(t) > 0$ ,
- × la fonction  $f$  est continue sur  $[x, +\infty[$ .

Ainsi, par stricte croissance de l'intégrale, les bornes étant dans l'ordre croissant ( $x < +\infty$ ), on en déduit :

$$\int_x^{+\infty} f(t) dt > 0$$

$$\forall x \geq 0, R(x) = \mathbb{P}([X > x]) > 0$$

### Commentaire

- On pouvait aussi remarquer que, comme  $X$  est une v.a.r. à densité, et que  $f$  est continue sur  $[0, +\infty[$ , alors  $F_X$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $[0, +\infty[$ . Ainsi, pour tout  $x \geq 0$  :

$$F'_X(x) = f(x) > 0 \quad (\text{par hypothèse de l'énoncé})$$

- La fonction  $F_X$  est :

- × continue sur  $[0, +\infty[$ ,
- × strictement croissante sur  $[0, +\infty[$ .

Elle réalise donc une bijection de  $[0, +\infty[$  sur :

$$F_X([0, +\infty[) = [F_X(0), \lim_{x \rightarrow +\infty} F_X(x)[ = [F_X(0), 1[$$

Ainsi, pour tout  $x \in [0, +\infty[ : F_X(x) < 1$ .

$$\text{On en déduit} \quad -F_X(x) > -1$$

$$\text{donc} \quad 1 - F_X(x) > 0$$

||

$$\mathbb{P}([X > x])$$

□

(ii) On pose  $\mu = f(0)$ . Montrer que pour tout  $x$  réel positif, on a la relation  $R'(x) + \mu R(x) = 0$ .

*Démonstration.*

- Rappelons tout d'abord que pour tout  $x \geq 0$  :

$$\begin{aligned} F_X(x) &= \mathbb{P}([X \leq x]) \\ &= 1 - \mathbb{P}([X > x]) \\ &= 1 - R(x) \end{aligned}$$

Ainsi :  $\forall x \geq 0, R(x) = 1 - F_X(x)$ .

- On sait que :
  - × la v.a.r.  $X$  est une v.a.r. à densité,
  - × la fonction  $f$  est continue sur  $[0, +\infty[$ .

On en déduit que la fonction  $F_X$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $[0, +\infty[$ . D'après l'égalité précédente, il en est de même de la fonction  $R$ .

On a alors :  $\forall x \geq 0, R'(x) = -f_X(x)$ .

- Par hypothèse de l'énoncé, pour tout  $x \geq 0$  et pour tout  $y \geq 0$  :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_{[X > x]}([X > x + y]) &= \mathbb{P}([X > y]) \\ &\parallel \\ \frac{\mathbb{P}([X > x] \cap [X > x + y])}{\mathbb{P}([X > x])} &= \frac{\mathbb{P}([X > x + y])}{\mathbb{P}([X > x])} \quad (\text{car } [X > x + y] \subset [X > x]) \end{aligned}$$

Ainsi :  $\frac{\mathbb{P}([X > x + y])}{\mathbb{P}([X > x])} = \mathbb{P}([X > y])$ .

Autrement dit :  $\forall x \geq 0, \forall y \geq 0, R(x + y) = R(x) \times R(y)$ .

- Soit  $x_0 \in [0, +\infty[$ . Notons  $h_{x_0}$  la fonction  $h_{x_0} : y \mapsto R(x_0 + y)$ .

D'après l'égalité au-dessus :  $\forall y \geq 0, h_{x_0}(y) = R(x_0) \times R(y)$ .

En particulier, on en déduit que la fonction  $h_{x_0}$  est dérivable sur  $[0, +\infty[$  car  $R$  l'est.

$\forall y \geq 0, h_{x_0}(y) = R(x_0 + y)$		$\forall y \geq 0, h_{x_0}(y) = R(x_0) \times R(y)$
<p>ainsi <math>\forall y \geq 0, h'_{x_0}(y) = R'(x_0 + y)</math></p>		<p>ainsi <math>\forall y \geq 0, h'_{x_0}(y) = R(x_0) \times R'(y)</math>  <math>= R(x_0) \times (-f_X(y))</math></p>

On en déduit :  $\forall y \geq 0, R'(x_0 + y) = (-f_X(y)) \times R(x_0)$ .

- En particulier, pour  $y = 0$ , on trouve :  $\forall x_0 \geq 0, R'(x_0) = (-f_X(0)) \times R(x_0)$ .

Finalement, on a bien :  $\forall x_0 \geq 0, R'(x_0) + \mu R(x_0) = 0$ .

### Commentaire

- La difficulté d'un sujet se mesure en grande partie à la manière dont chaque question est découpée en sous-question. Moins il y a de sous-questions, plus le candidat doit prendre des initiatives et plus le sujet est difficile. Ainsi, un même thème peut amener à un traitement différent lorsqu'il est abordé dans un sujet du TOP3 ou du TOP5.
- Dans les sujets, on distingue grossièrement trois types de questions :
  - (1) des questions abordables qui sont traitées par un grand nombre de candidats. Il peut s'agir de questions de cours ou de questions classiques (celles qui reviennent chaque année aux concours).
  - (2) des questions plus difficiles qui permettent de bien classer les candidats. Celles-ci ont un rôle fort pour le classement des candidats car sont abordées avec plus ou moins de succès.
  - (3) des questions très difficiles qui ne sont bien traitées presque par aucun candidat.

Dans les sujets du TOP5, on trouve essentiellement des questions de type (1) et (2). Dans les sujets du TOP3, on trouve les trois types de questions, avec un pourcentage élevé de questions de type (2). C'est d'ailleurs essentiellement sur ces questions que se font les différences et en aucun cas les questions de type (3).

- Ces dernières années, la taille des sujets a eu tendance à grossir pour s'établir à près de 60 questions par énoncé. Pour finir un sujet, un candidat ne dispose donc que d'environ 4 minutes pour traiter chaque question. Il ne faut pas s'inquiéter pour autant car les barèmes permettent de rebattre les cartes. En effet, un candidat qui obtient 50% des points d'un sujet aura une très bonne note (de 16 à 20 en fonction des années et des épreuves). Cette considération sur la taille des sujets et la distinction précédente permettent d'éclairer sur la stratégie à adopter lors des concours :
  - il est essentiel de savoir repérer la difficulté d'une question. Ce n'est pas chose aisée car cela requiert d'avoir du recul.
  - il est essentiel de savoir traiter la majorité des questions de type (1).
  - il est important de réussir à traiter correctement des questions de type (2). C'est sur le bon traitement de ces questions que se joue le classement.
  - pour les questions de type (3) (ou les questions de type (2) les plus difficiles), il faut garder en tête que plus une question est difficile, plus le correcteur est indulgent avec les candidats qui s'y aventurent. On peut donc aborder ces questions avec l'idée que tout ce qu'un candidat écrit de juste sera retenu en sa faveur (quelques points accordés). Mais tenter de traiter ces questions en entier est une perte de temps préjudiciable : le nombre de points alloués ne sera certainement pas à hauteur du temps investi.

En résumé, il faut aborder en priorité les questions de type (1) et (2) et les traiter en entier. Il ne faut surtout pas abandonner une question que l'on sait traiter. L'important est de maximiser le nombre de questions que l'on traite entièrement. En revanche, il ne faut pas hésiter à passer une questions les plus difficiles quitte à signaler au correcteur qu'on ne sait pas comment conclure si on les aborde.

- La question 2.b)(ii) du sujet est clairement de type (3) car elle nécessite une prise d'initiatives beaucoup trop importante. Pour que cette question puisse être abordée avec profit par certains candidats, il aurait été préférable de la découper en sous-questions. En particulier, on aurait pu demander en amont la démonstration de l'égalité suivante :

$$\forall x \geq 0, \forall y \geq 0, R(x + y) = R(x) \times R(y)$$

□



(iii) Calculer la dérivée de  $x \mapsto R(x) e^{\mu x}$  sur  $\mathbb{R}_+$ .

*Démonstration.*

- La fonction  $h : x \mapsto R(x) e^{\mu x}$  est dérivable sur  $\mathbb{R}_+$  en tant que produit de fonctions dérivables sur  $\mathbb{R}_+$ .
- Soit  $x \in \mathbb{R}_+$ .

$$\begin{aligned} h'(x) &= R'(x) \times e^{\mu x} + R(x) \times (\mu e^{\mu x}) \\ &= (R'(x) + \mu R(x)) e^{\mu x} \\ &= 0 \end{aligned} \quad \text{(d'après le résultat précédent)}$$

$\forall x \geq 0, h'(x) = 0$

**Commentaire**

La question précédente était particulièrement difficile. Celle-ci, en revanche, est particulièrement simple. On en conclut qu'il n'y a pas forcément dans tout le sujet de croissance linéaire de la difficulté. Ainsi, passer une question (dont le résultat est présent dans l'énoncé) ne doit pas empêcher de tenter d'aborder la suivante. □

(iv) Dédurre que  $X$  suit une loi exponentielle dont on précisera le paramètre.

*Démonstration.*

- D'après la question précédente :  $\forall x \geq 0, h'(x) = 0$ .  
On en déduit que la fonction  $h$  est constante sur  $[0, +\infty[$ . Ainsi, pour tout  $x \geq 0$  :

$$\begin{aligned} h(x) &= h(0) \\ \parallel & \quad \parallel \\ R(x) e^{\mu x} &= R(0) e^{\mu \cdot 0} = \mathbb{P}([X > 0]) = \mathbb{P}([X \geq 0]) = 1 \end{aligned} \quad \text{(car } X \text{ est une v.a.r. à valeurs positives)}$$

Ainsi :  $\forall x \geq 0, R(x) e^{\mu x} = 1$  ou encore :  $R(x) = e^{-\mu x}$ .

- Déterminons la fonction de répartition de  $X$ .

Soit  $x \in \mathbb{R}$ . Deux cas se présentent :

× si  $x < 0$ , alors  $[X \leq x] = \emptyset$  (car  $X(\Omega) = [0, +\infty[$ ). D'où :

$$F_X(x) = \mathbb{P}([X \leq x]) = \mathbb{P}(\emptyset) = 0$$

× si  $x \geq 0$ , alors :

$$F_X(x) = \mathbb{P}([X \leq x]) = 1 - \mathbb{P}([X > x]) = 1 - R(x) = 1 - e^{-\mu x}$$

On reconnaît la fonction de répartition associée à la loi  $\mathcal{E}(\mu)$ .

Or, la fonction de répartition caractérise la loi.

On en conclut :  $X \leftrightarrow \mathcal{E}(\mu)$ .

□

**Commentaire**

- La question 2) permet de démontrer que si  $X$  est une v.a.r. à densité alors :

$$\left. \begin{array}{l} 1) X(\Omega) = [0, +\infty[ \\ 2) \forall x \geq 0, \forall y \geq 0, \mathbb{P}_{[X>x]}([X > x + y]) = \mathbb{P}([X > y]) \\ 3) \forall x \geq 0, f_X(x) > 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow X \text{ suit une loi exponentielle}$$

Dans la démonstration, on précise que le paramètre de la loi exponentielle obtenue n'est autre que  $\mu = f_X(0)$ .

- On a énoncé ici une équivalence. La propriété ci-dessus caractérise les v.a.r. qui suivent une loi exponentielle.
- Dans le contexte où la v.a.r.  $X$  désigne la durée de fonctionnement (ou durée de vie) d'un système (ou d'un composant électronique), la propriété 2) signifie que la durée de vie restante du composant est indépendante de sa durée de vie écoulée jusqu'alors (période durant laquelle il a fonctionné sans tomber en panne). Autrement dit, il n'y a pas de vieillissement ou encore d'usure du composant électronique considéré. On dit alors que la loi exponentielle est **sans mémoire**. Cette propriété est adaptée à la simulation de phénomène sans vieillissement. Cette hypothèse peut paraître surprenante. C'est un cas assez fréquent en réalité : on peut considérer que les diodes, transistors, résistances, condensateurs sont sans usure puisque leur usure ne débute que bien après la fin de vie de l'objet dans lequel ils sont installés.
- Finalement, on a démontré en 2. que la loi exponentielle est sans mémoire. Mieux : c'est même la seule loi à densité sans mémoire.

Pour ce qui est des v.a.r. discrètes, on peut démontrer que la seule loi sans mémoire est la loi géométrique.

Il est donc classique que ces apparaissent dans les sujets qui traitent de durée de vie d'un système / d'un composant. Plus précisément :

- × si cette durée de vie / de fonctionnement est mesurée en nombre entier (nombre de cycles d'une batterie avant panne par exemple), c'est la loi géométrique qui risque d'apparaître.
- × si cette durée de vie / de fonctionnement est mesurée de manière continue, c'est la loi exponentielle qui risque d'apparaître.

3. Soient deux réels strictement positifs  $\mu_1$  et  $\mu_2$ . Soient  $X_1$  et  $X_2$  deux variables aléatoires indépendantes suivant respectivement les lois exponentielles de paramètres  $\mu_1$  et  $\mu_2$ .

a) On pose  $Y = \max(X_1, X_2)$ .

(i) Déterminer la fonction de répartition  $F_Y$  de  $Y$  et en déduire la densité de la variable  $Y$ .

*Démonstration.*

Comme  $X_1$  et  $X_2$  suivent des lois exponentielles, on considère :  $X_1(\Omega) = [0, +\infty[ = X_2(\Omega)$ .

$$\text{D'où : } Y(\Omega) \subset [0, +\infty[.$$

Soit  $x \in \mathbb{R}$ . Deux cas se présentent :

- × si  $x \leq 0$ , alors  $[Y \leq x] = \emptyset$  (car  $Y(\Omega) \subset [0, +\infty[$ ). D'où :

$$F_Y(x) = \mathbb{P}([Y \leq x]) = \mathbb{P}(\emptyset) = 0$$

× si  $x \geq 0$ , alors :

$$\begin{aligned}
 F_Y(x) &= \mathbb{P}([Y \leq x]) \\
 &= \mathbb{P}([\max(X_1, X_2) \leq x]) \\
 &= \mathbb{P}([X_1 \leq x] \cap [X_2 \leq x]) \\
 &= \mathbb{P}([X_1 \leq x]) \times \mathbb{P}([X_2 \leq x]) && \text{(car } X_1 \text{ et } X_2 \\
 &= F_{X_1}(x) \times F_{X_2}(x) && \text{sont indépendantes)} \\
 &= (1 - e^{-\mu_1 x}) \times (1 - e^{-\mu_2 x}) && \text{(car } X_1 \hookrightarrow \mathcal{E}(\mu_1) \text{ et} \\
 & && X_2 \hookrightarrow \mathcal{E}(\mu_2))
 \end{aligned}$$

Finalement :  $F_Y : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ (1 - e^{-\mu_1 x})(1 - e^{-\mu_2 x}) & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$ .

La fonction  $F_Y$  est continue :

× sur  $] - \infty, 0[$  car elle est constante (nulle) sur cet intervalle.

× sur  $]0, +\infty[$  par produit de fonctions continues sur cet intervalle.

× en 0. En effet :

- d'une part :  $\lim_{x \rightarrow 0^-} F_Y(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} 0 = 0$ ,

- d'autre part :  $\lim_{x \rightarrow 0^+} F_Y(x) = F_Y(0) = (1 - e^{-\mu_1 \cdot 0})(1 - e^{-\mu_2 \cdot 0}) = (1 - 1)(1 - 1) = 0$ .

Et ainsi :  $\lim_{x \rightarrow 0^-} F_Y(x) = F_Y(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} F_Y(x)$ .

La fonction  $F_Y$  est donc continue sur  $\mathbb{R}$ .

La fonction  $F_Y$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $] - \infty, 0[$  et sur  $]0, +\infty[$  avec des arguments similaires à ceux de la continuité sur ces intervalles.

La fonction  $F_Y$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}$  sauf éventuellement en 0.

On en déduit que la v.a.r.  $Y$  est une v.a.r. à densité.

Pour déterminer une densité  $f_Y$  de  $Y$ , on dérive  $F_Y$  sur les intervalles ouverts  $] - \infty, 0[$  et  $]0, +\infty[$ .

Soit  $x \in \mathbb{R}$ .

× Si  $x \in ] - \infty, 0[$ .

$$f_Y(x) = F_Y'(x) = 0$$

× Si  $x \in ]0, +\infty[$ .

$$\begin{aligned}
 f_Y(x) &= F_Y'(x) \\
 &= \mu_1 e^{-\mu_1 x} (1 - e^{-\mu_2 x}) + (1 - e^{-\mu_1 x}) \mu_2 e^{-\mu_2 x} \\
 &= \mu_1 e^{-\mu_1 x} - \mu_1 e^{-\mu_1 x} e^{-\mu_2 x} - \mu_2 e^{-\mu_2 x} e^{-\mu_1 x} + \mu_2 e^{-\mu_2 x} \\
 &= \mu_1 e^{-\mu_1 x} - (\mu_1 + \mu_2) e^{-(\mu_1 + \mu_2)x} + \mu_2 e^{-\mu_2 x}
 \end{aligned}$$

× On choisit enfin :  $f_Y(0) = 0$ .

Ainsi, une densité  $f_Y$  de  $Y$  est :

$$f_Y : t \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } t \in ]-\infty, 0] \\ \mu_1 e^{-\mu_1 t} - (\mu_1 + \mu_2) e^{-(\mu_1 + \mu_2)t} + \mu_2 e^{-\mu_2 t} & \text{si } t \in ]0, +\infty[ \end{cases} .$$

□

(ii) Écrire une fonction **Python** `simulY(mu1,mu2)` qui simule la variable aléatoire  $Y$ .

*Démonstration.*

On propose la fonction **Python** suivante :

```

1 def simulY(mu1, mu2):
2     X1 = rd.exponential(1/mu1)
3     X2 = rd.exponential(1/mu2)
4     Y = max(X1,X2)
5     return Y

```

□

b) On pose  $Z = \min(X_1, X_2)$ .

Déterminer la fonction de répartition  $F_Z$  de  $Z$  et en déduire la loi de  $Z$ .

*Démonstration.*

- Comme  $X_1$  et  $X_2$  suivent des lois exponentielles, on considère :  $X_1(\Omega) = [0, +\infty[ = X_2(\Omega)$ .

D'où :  $Z(\Omega) \subset [0, +\infty[$ .

- Soit  $x \in \mathbb{R}$ . Deux cas se présentent :

× si  $x < 0$ , alors  $[Z \leq x] = \emptyset$  (car  $Z(\Omega) \subset [0, +\infty[$ ). D'où :

$$F_Z(x) = \mathbb{P}([Z \leq x]) = \mathbb{P}(\emptyset) = 0$$

× si  $x \geq 0$ , alors :

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}([Z > x]) \\ &= \mathbb{P}([\min(X_1, X_2) > x]) \\ &= \mathbb{P}([X_1 > x] \cap [X_2 > x]) \\ &= \mathbb{P}([X_1 > x]) \times \mathbb{P}([X_2 > x]) && \text{(car } X_1 \text{ et } X_2 \\ & && \text{sont indépendantes)} \\ &= e^{-\mu_1 x} \times e^{-\mu_2 x} && \text{(car } X_1 \hookrightarrow \mathcal{E}(\mu_1) \text{ et } X_2 \hookrightarrow \mathcal{E}(\mu_2)) \\ &= e^{-(\mu_1 + \mu_2)x} \end{aligned}$$

Ainsi :  $F_Z(x) = \mathbb{P}([Z \leq x]) = 1 - \mathbb{P}([Z > x]) = 1 - e^{-(\mu_1 + \mu_2)x}$ .

Finalement :  $F_Z : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - e^{-(\mu_1 + \mu_2)x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases} .$

- On reconnaît la fonction de répartition associée à la loi  $\mathcal{E}(\mu_1 + \mu_2)$ .

Or, la fonction de répartition caractérise la loi.

On en conclut :  $Z \hookrightarrow \mathcal{E}(\mu_1 + \mu_2)$ .

□

## II. Fiabilité

Soit  $T$  une variable aléatoire positive qui représente la durée de vie (c'est-à-dire le temps de fonctionnement avant la survenue d'une première panne) d'un système. On suppose que  $T$  est une variable à densité  $f_T$  continue sur  $\mathbb{R}_+$  et ne s'annulant pas sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

On appelle fiabilité de  $T$  la fonction  $R_T$  définie sur  $\mathbb{R}_+$  par :

$$R_T(t) = \mathbb{P}([T \geq t]) = \mathbb{P}([T > t]) = 1 - F_T(t)$$

où  $F_T$  est la fonction de répartition de  $T$ .

4. Soient  $t$  un réel positif ou nul et  $h$  un réel strictement positif.

La dégradation du système sur l'intervalle  $[t, t+h]$  est mesurée par la probabilité  $\mathbb{P}([t \leq T \leq t+h])$ .

Exprimer cette quantité à l'aide de la fonction  $R_T$ .

*Démonstration.*

Soit  $t \geq 0$ .

$$\begin{aligned} \mathbb{P}([t \leq T \leq t+h]) &= F_T(t+h) - F_T(t) && \text{(car } T \text{ est à densité)} \\ &= (\mathbf{1} - R_T(t+h)) - (\mathbf{1} - R_T(t)) \\ &= R_T(t) - R_T(t+h) \end{aligned}$$

$\forall t \geq 0, \mathbb{P}([t \leq T \leq t+h]) = R_T(t) - R_T(t+h)$

□

5. Montrer que, pour tout réel  $t$  positif ou nul,

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\mathbb{P}([t \leq T \leq t+h])}{h} = f_T(t)$$

*Démonstration.*

Soit  $t \geq 0$ .

• Soit  $h > 0$ . D'après la question précédente :

$$\frac{\mathbb{P}([t \leq T \leq t+h])}{h} = \frac{R_T(t) - R_T(t+h)}{h} = -\frac{R_T(t+h) - R_T(t)}{h}$$

• La fonction  $f_T$  est continue sur  $\mathbb{R}_+$ . La fonction  $F_T$ , qui est une primitive de  $f_T$ , est donc de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}_+$ . Comme  $R_T : t \mapsto 1 - F_T(t)$ , la fonction  $R_T$  est aussi de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}_+$ , en particulier en  $t$ . Ainsi :

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{R_T(t+h) - R_T(t)}{h} = R_T'(t) = -F_T'(t) = -f_T(t)$$

On en déduit :  $\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\mathbb{P}([t \leq T \leq t+h])}{h} = -(-f_T(t)) = f_T(t)$ .

$\text{Ainsi : } \forall t \geq 0, \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\mathbb{P}([t \leq T \leq t+h])}{h} = f_T(t)$

**Commentaire**

L'énoncé souhaitait sans doute que l'on utilise le résultat final de la question précédente (ce que l'on fait dans la démonstration ci-dessus). On pouvait aussi choisir de raisonner avec la fonction  $F_T$  plutôt que la fonction  $R_T$ .

- Soit  $h > 0$ . D'après la question précédente :

$$\frac{\mathbb{P}([t \leq T \leq t+h])}{h} = \frac{F_T(t+h) - F_T(t)}{h}$$

- La fonction  $f_T$  est continue sur  $\mathbb{R}_+$ . La fonction  $F_T$ , qui est une primitive de  $f_T$ , est donc de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}_+$ . En particulier elle est dérivable sur  $\mathbb{R}_+$ , et donc en  $t \in \mathbb{R}_+$ . On en déduit :

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{F_T(t+h) - F_T(t)}{h} = F_T'(t) = f_T(t)$$

□

6. a) Justifier que pour tout réel  $t$  positif,  $R_T(t) > 0$ .

*Démonstration.*

- La fonction  $R_T$  est dérivable sur  $\mathbb{R}_+$  car la fonction  $F_T$  l'est.  
Soit  $t \in \mathbb{R}_+$ .

$$R_T'(t) = -F_T'(t) = -f_T(t)$$

Or, d'après l'énoncé, si  $t \in \mathbb{R}_+^*$ , alors :  $f_T(t) > 0$ . Ainsi :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+^*, \quad R_T'(t) < 0$$

- La fonction  $R_T$  est donc :

- × continue (car dérivable) sur  $\mathbb{R}_+$ ,
- × strictement décroissante sur  $\mathbb{R}_+$ .

Ainsi, la fonction  $R_T$  réalise une bijection de  $[0, +\infty[$  sur  $R_T([0, +\infty[)$ .

$$R_T([0, +\infty[) = \left] \lim_{t \rightarrow +\infty} R_T(t), R_T(0) \right]$$

Or :

- × d'une part :

$$R_T(0) = 1 - F_T(0) = 1 - 0 = 1$$

En effet :

$$\begin{aligned} F_T(0) &= \mathbb{P}([T \leq 0]) \\ &= \mathbb{P}([T = 0]) && \text{(car } T \text{ est à} \\ & && \text{valeurs positives)} \\ &= 0 && \text{(car } T \text{ est à densité)} \end{aligned}$$

- × d'autre part :

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow +\infty} R_T(t) &= \lim_{t \rightarrow +\infty} 1 - F_T(t) \\ &= 1 - 1 && \text{(car } F_T \text{ est une} \\ & && \text{fonction de répartition)} \end{aligned}$$

Finalement, la fonction  $R_T$  réalise une bijection de  $[0, +\infty[$  sur  $]0, 1]$ .

En particulier :  $\forall t \geq 0, R_T(t) > 0$ .

□

On appelle taux de défaillance la fonction définie sur  $\mathbb{R}_+$  par le rapport  $\lambda(t) = \frac{f_T(t)}{R_T(t)}$ .

b) On note :  $g : t \mapsto \ln\left(\frac{1}{R_T(t)}\right)$ . Démontrer que  $\lambda = g'$ .

*Démonstration.*

- Soit  $t \in \mathbb{R}_+$ .

$$g(t) = \ln\left(\frac{1}{R_T(t)}\right) = -\ln(R_T(t))$$

- La fonction  $g$  est dérivable sur  $[0, +\infty[$ , car elle est la composée  $g = h \circ R_T$  de :
  - ×  $R_T$  qui est :
    - dérivable sur  $[0, +\infty[$ ,
    - telle que :  $h([0, +\infty[) \subset ]0, +\infty[$ , d'après la question précédente.
  - ×  $h : t \mapsto -\ln(t)$  qui est dérivable sur  $]0, +\infty[$ .

La fonction  $g$  est dérivable sur  $\mathbb{R}_+$ .

- Soit  $t \in \mathbb{R}_+$ .

$$g'(t) = R_T'(t) \times (h' \circ R_T)(t) = -\frac{R_T'(t)}{R_T(t)} = -\frac{-f_T(t)}{R_T(t)} = \frac{f_T(t)}{R_T(t)} = \lambda(t)$$

On en déduit :  $\lambda = g'$ .

□

c) Dédurre l'expression de  $R_T$  en fonction de  $\lambda$  à l'aide d'une intégrale.

*Démonstration.*

- Tout d'abord, d'après la question précédente :  $g' = \lambda$ . On en déduit que la fonction  $g$  est une primitive de  $\lambda$ .
- Avec des arguments similaires à ceux de la dérivabilité, la fonction  $g$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}_+$ . On en déduit que la fonction  $\lambda$  est continue sur  $\mathbb{R}_+$ . Cette fonction  $\lambda$  étant continue sur  $\mathbb{R}_+$ , elle admet une primitive de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}_+$ . Considérons par exemple la primitive  $H$  de  $\lambda$  qui s'annule en 0. Plus précisément :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad H(x) = \int_0^x \lambda(t) dt$$

La fonction  $g$  recherchée coïncide avec  $H$  à une constante près. Autrement dit, il existe  $c \in \mathbb{R}$  tel que :  $\forall x \in \mathbb{R}_+, g(x) = H(x) + c$ .

- Commençons par déterminer  $H$ .  
 Soit  $x \in \mathbb{R}$ .

$$\begin{aligned} H(x) &= \int_0^x \lambda(t) dt \\ &= \int_0^x g'(t) dt \\ &= [g(t)]_0^x \\ &= g(x) - g(0) \end{aligned}$$

Or, d'après **6.a**) :  $g(0) = -\ln(R_T(0)) = -\ln(1) = 0$ .

Finalement :  $\forall x \in \mathbb{R}_+, H(x) = g(x)$ .

- On obtient alors, pour tout  $x \in \mathbb{R}_+$  :

$$\begin{aligned}
 g(x) &= \int_0^x \lambda(t) dt \\
 \text{donc } -\ln(R_T(x)) &= \int_0^x \lambda(t) dt \\
 \text{d'où } \ln(R_T(x)) &= -\int_0^x \lambda(t) dt \\
 \text{ainsi } R_T(x) &= \exp\left(-\int_0^x \lambda(t) dt\right)
 \end{aligned}$$

Finalement :  $\forall x \in \mathbb{R}_+, R_T(x) = \exp\left(-\int_0^x \lambda(t) dt\right)$ .

□

7. Soit  $Z$  une variable aléatoire réelle positive de densité  $g$  continue sur  $\mathbb{R}_+$ , admettant une espérance. On pose  $R_Z(t) = \mathbb{P}([Z > t])$  pour  $t \geq 0$ .

a) Soit  $v$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}_+$  par  $v(t) = tR_Z(t)$ .

Démontrer, pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$  :  $tg(t) = R_Z(t) - v'(t)$  où  $v'$  désigne la dérivée de  $v$ .

*Démonstration.*

- La fonction  $v$  est dérivable sur  $\mathbb{R}_+$  car elle est le produit  $v = h_1 \times R_Z$  de :
  - ×  $h_1 : t \mapsto t$  dérivable sur  $\mathbb{R}_+$  en tant que fonction polynomiale,
  - ×  $R_Z$  dérivable sur  $\mathbb{R}_+$  avec une démonstration similaire à celle de la question 5.

La fonction  $v$  est dérivable sur  $\mathbb{R}_+$ .

- Soit  $t \in \mathbb{R}_+$ .

$$v'(t) = 1 \times R_Z(t) + t \times R'_Z(t) = R_Z(t) - tg(t)$$

On peut en effet démontrer, comme en question 5. :  $R'_Z(t) = -g(t)$ .

On en déduit :  $\forall t \in \mathbb{R}_+, tg(t) = R_Z(t) - v'(t)$ .

□

b) Montrer que  $\lim_{t \rightarrow +\infty} v(t) = 0$ .

*Démonstration.*

- Soit  $t \in \mathbb{R}_+$ .

$$v(t) = tR_Z(t) = t\mathbb{P}([Z > t]) = t \int_t^{+\infty} g(x) dx = \int_t^{+\infty} tg(x) dx$$

- On sait déjà, par positivité de l'intégrale (les bornes étant dans l'ordre croissant) :

$$0 \leq \int_t^{+\infty} tg(x) dx = v(t)$$

En effet,  $g$  est une densité et donc positive sur  $\mathbb{R}$ , et  $t \geq 0$ .

On cherche alors à trouver un majorant de  $v$  admettant 0 pour limite en  $+\infty$ , pour pouvoir appliquer le théorème d'encadrement.



- Pour majorer l'intégrale  $\int_t^{+\infty} t g(x) dx$ , on cherche à majorer, pour tout  $x \in [t, +\infty[$ , l'intégrande  $t g(x)$ .  
 Soit  $x \in [t, +\infty[$ .

$$0 \leq t \leq x$$

donc  $0 \leq t g(x) \leq x g(x)$  *(car, comme  $g$  est une densité :  $g(x) \geq 0$ )*

Soit  $B \in [t, +\infty[$ . Par croissance de l'intégrale, les bornes étant dans l'ordre croissant :

$$\int_t^B t g(x) dx \leq \int_t^B x g(x) dx$$

- Or :  
 × l'intégrale  $\int_t^{+\infty} t g(x) dx$  est convergente. En effet, comme  $g$  est une densité, l'intégrale  $\int_t^{+\infty} g(x) dx$  est convergente.  
 × l'intégrale  $\int_t^{+\infty} x g(x) dx$  est convergente, car  $Z$  admet une espérance (et donc  $\int_{-\infty}^{+\infty} x g(x) dx$  est convergente)

On en déduit :

$$0 \leq \int_t^{+\infty} t g(x) dx \leq \int_t^{+\infty} x g(x) dx$$

||  
 $v(t)$

- Démontrons enfin :  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_t^{+\infty} x g(x) dx = 0$ .

Soit  $t \in \mathbb{R}_+$ . Comme  $Z$  admet une espérance :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Z) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x g(x) dx \\ &= \int_{-\infty}^t x g(x) dx + \int_t^{+\infty} x g(x) dx \end{aligned}$$

d'où :

$$\int_t^{+\infty} x g(x) dx = \mathbb{E}(Z) - \int_{-\infty}^t x g(x) dx \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} \mathbb{E}(Z) - \mathbb{E}(Z) = 0$$

Ainsi :  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_t^{+\infty} x g(x) dx = 0$ .

**Commentaire**

- Ce point est une illustration d'un résultat classique sur les intégrales impropres. Étant donnée une intégrale  $\int_{-\infty}^{+\infty} h(t) dt$  convergente, on a pour tout  $x \in \mathbb{R}$  :

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} h(t) dt &= \underbrace{\int_{-\infty}^x h(t) dt}_{H(x)} + \underbrace{\int_x^{+\infty} h(t) dt}_{R(x)} \\ &= H(x) + R(x) \end{aligned}$$

La quantité  $R(x) = \int_x^{+\infty} h(t) dt$  est appelé reste de l'intégrale  $\int_{-\infty}^{+\infty} h(t) dt$ .

La fonction  $R$  ainsi construite admet pour limite 0 en  $+\infty$ . En effet :

$$R(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t) dt - \int_{-\infty}^x h(t) dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} h(t) dt - \int_{-\infty}^{+\infty} h(t) dt = 0$$

- On connaît déjà un résultat classique similaire sur les séries. Étant donnée une série  $\sum u_n$  convergente, de somme notée  $S$  et dont la suite des sommes partielles est notée  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$  on a, pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :

$$\underbrace{\sum_{k=0}^{+\infty} u_k}_S = \underbrace{\sum_{k=0}^n u_k}_{S_n} + \underbrace{\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k}_{R_n}$$

La quantité  $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$  est appelé reste d'ordre  $n$  de la série  $\sum u_n$ .

La suite  $(R_n)$  ainsi construite est convergente de limite nulle. En effet :

$$R_n = S - S_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} S - S = 0$$

- On sait donc :

$$\times \forall t \in \mathbb{R}_+, 0 \leq v(t) \leq \int_t^{+\infty} x g(x) dx = 0$$

$$\times \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_t^{+\infty} x g(x) dx = 0$$

$$\times \lim_{t \rightarrow +\infty} 0 = 0$$

Par théorème d'encadrement :  $\lim_{t \rightarrow +\infty} v(t) = 0$ .

□

c) En déduire que  $\mathbb{E}(Z) = \int_0^{+\infty} R_Z(t) dt$ .

*Démonstration.*

- Tout d'abord, comme  $Z$  est à valeurs positives, sa densité  $g$  est nulle en dehors de  $[0, +\infty[$ . Ainsi :

$$\mathbb{E}(Z) = \int_{-\infty}^{+\infty} t g(t) dt = \int_0^{+\infty} t g(t) dt$$

- D'après 7.a) :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad t g(t) = R_Z(t) - v'(t)$$

Ainsi, pour tout  $B \in [0, +\infty[$  :

$$\begin{aligned} \int_0^B t g(t) dt &= \int_0^B (R_Z(t) - v'(t)) dt \\ &= \int_0^B R_Z(t) dt - \int_0^B v'(t) dt \end{aligned}$$

- Or :

$$\begin{aligned} \int_0^B v'(t) dt &= [v(t)]_0^B \\ &= v(B) - v(0) \\ &= v(B) - 0 \times g(0) \quad (\text{par définition de } v) \end{aligned}$$

- On obtient :

$$\int_0^B R_Z(t) dt = \int_0^B t g(t) dt + v(B)$$

Or :

× l'intégrale  $\int_0^{+\infty} t g(t) dt$  est convergente et vaut  $\mathbb{E}(Z)$ ,

× d'après la question précédente :  $\lim_{B \rightarrow +\infty} v(B) = 0$ .

On en déduit que l'intégrale  $\int_0^{+\infty} R_Z(t) dt$  est convergente.

$$\text{De plus : } \int_0^{+\infty} R_Z(t) dt = \mathbb{E}(Z) + 0 = \mathbb{E}(Z).$$

□

8. On suppose désormais que  $T$  admet une espérance. Soit  $t$  un réel positif fixé, le système ayant fonctionné sans panne jusqu'à la date  $t$ , on appelle durée de survie la variable aléatoire  $T_t = T - t$  représentant le temps s'écoulant entre la date  $t$  et la première panne.

On a donc, pour tout réel  $x$  positif :

$$R_{T_t}(x) = \mathbb{P}([T_t > x]) = \mathbb{P}_{[T > t]}([T > t + x])$$

### Commentaire

Notons que, pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$  et tout  $x \in \mathbb{R}_+$ , la quantité  $R_{T_t}(x)$  est bien définie car, d'après la question 6.a) :

$$\mathbb{P}([T > t]) = R_T(t) > 0$$

a) Démontrer, pour tout réel  $x$  positif :  $R_{T_t}(x) = \frac{R_T(t+x)}{R_T(t)}$ .

*Démonstration.*

Soit  $x \in \mathbb{R}_+$ .

$$\begin{aligned}
 R_{T_t}(x) &= \mathbb{P}_{[T>t]}([T > t+x]) && \text{(d'après l'énoncé)} \\
 &= \frac{\mathbb{P}([T > t+x] \cap [T > t])}{\mathbb{P}([T > t])} \\
 &= \frac{\mathbb{P}([T > t+x])}{\mathbb{P}([T > t])} && \text{(car, comme } x \geq 0 : \\
 & && [T > t+x] \subset [T > t]) \\
 &= \frac{R_T(t+x)}{R_T(t)}
 \end{aligned}$$

$\forall x \in \mathbb{R}_+, R_{T_t}(x) = \frac{R_T(t+x)}{R_T(t)}$

□

b) En déduire :

$$\mathbb{E}(T_t) = \frac{1}{R_T(t)} \int_t^{+\infty} R_T(u) du$$

*Démonstration.*

- On souhaite ici appliquer la question 7. à la v.a.r.  $T_t$ . On démontre donc que cette v.a.r. vérifie bien les hypothèses nécessaires.
- On se place ici dans le cas où le système a fonctionné sans panne jusqu'à l'instant  $t$  (autrement dit, on se place dans le cas où l'événement  $[T > t]$  est réalisé). Alors la v.a.r.  $T_t = T - t$  :
  - × est à valeurs (strictement) positives,
  - × est à densité en tant que transformée affine de  $T$  ( $T_t = aT + b$ , où  $a = 1$  et  $b = -t$ ) qui est à densité et, en notant  $g_t$  une de ses densités :

$$g_t : x \mapsto \frac{1}{|1|} f_T\left(\frac{x - (-t)}{1}\right) = f_T(x+t)$$

- × admet une densité  $g_t$  continue sur  $\mathbb{R}_+$ , car  $g_t$  est la composée  $g_t = f_T \circ h$  de :
  - $h : x \mapsto x + t$  qui est :
    - ▶ continue sur  $\mathbb{R}_+$  en tant que fonction polynomiale,
    - ▶ telle que :  $f_T(\mathbb{R}_+) \subset \mathbb{R}_+$  (car  $t \geq 0$ ).
  - $f_T$  qui est continue sur  $\mathbb{R}_+$ .
- × admet une espérance en tant que transformée affine de  $T$  qui en admet une (d'après l'énoncé de cette question 8.).
- On est donc bien placé dans le cadre d'application de la question 7. pour la v.a.r.  $T_t$ . On en déduit :

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}(T_t) &= \int_0^{+\infty} R_{T_t}(x) dx \\
 &= \int_0^{+\infty} \frac{R_T(x+t)}{R_T(t)} dx && \text{(d'après la question précédente)} \\
 &= \frac{1}{R_T(t)} \int_0^{+\infty} R_T(t+x) dx
 \end{aligned}$$

- On effectue alors le changement de variable  $u = t + x$ .

$$\left\{ \begin{array}{l} u = t + x \quad (\text{et donc } x = u - t) \\ \hookrightarrow du = dx \\ \bullet x = 0 \Rightarrow u = t \\ \bullet x = +\infty \Rightarrow u = +\infty \end{array} \right.$$

Ce changement de variable est valide car  $\psi : u \mapsto u - t$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $[t, +\infty[$ .

$$\text{On obtient alors : } \mathbb{E}(T_t) = \frac{1}{R_T(t)} \int_t^{+\infty} R_T(u) du.$$

### Commentaire

- Le programme officiel stipule que « les changements de variable affines pourront être utilisés directement sur des intégrales sur un intervalle quelconque ». Pour autant, ce type de changement de variable ne peut se faire qu'après avoir démontré la convergence (ce qu'on a bien fait en premier lieu).
- Cela signifie aussi que, de manière générale, on ne peut effectuer de changement de variable directement sur une intégrale impropre : on doit se ramener au préalable sur une intégrale sur un segment.

□

Les questions suivantes illustrent les notions introduites précédemment pour des systèmes simples.

9. a) On suppose que  $T$  suit la loi exponentielle de paramètre  $\mu$ .  
Déterminer la fiabilité et le taux de défaillance.

*Démonstration.*

- Comme  $T \hookrightarrow \mathcal{E}(\mu)$ , alors :

$$F_T : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - e^{-\mu x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad f_T : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \mu e^{-\mu x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

- Déterminons la fiabilité  $R_T$  de  $T$ .

Soit  $x \in \mathbb{R}_+$ .

$$R_T(x) = 1 - F_T(x) = 1 - (1 - e^{-\mu x}) = e^{-\mu x}$$

$$\text{Finalement : } R_T : x \mapsto e^{-\mu x}.$$

- Déterminons le taux de défaillance  $\lambda_T$  de  $T$ .

Soit  $x \in \mathbb{R}_+$ .

$$\lambda_T(x) = \frac{f_T(x)}{R_T(x)} = \frac{\mu e^{-\mu x}}{e^{-\mu x}} = \mu$$

$$\text{Finalement : } \lambda_T : x \mapsto \mu.$$

□

**b)** On suppose que le système est composé de deux organes 1 et 2 montés en série, dont les durées de vie sont supposées indépendantes, ce qui implique qu'il tombe en panne dès que l'un d'eux tombe en panne. On note  $T_i$  la durée de vie de l'organe  $i$ ,  $f_{T_i}$  la densité de sa loi qu'on suppose exponentielle de paramètre  $\mu_i$ .

Déterminer la fiabilité du système et son taux de défaillance.

*Démonstration.*

- On note  $Z$  la durée de vie du système en série.

Comme le système tombe en panne dès que l'un des 2 organes tombe en panne, on en déduit :

$$Z = \min(X_1, X_2)$$

- D'après la question **3.b)**, on en déduit :  $Z \hookrightarrow \mathcal{E}(\mu_1 + \mu_2)$ .

D'après la question précédente, on obtient :

$R_Z : x \mapsto e^{-(\mu_1 + \mu_2)x} \quad \text{et} \quad \lambda_Z : x \mapsto \mu_1 + \mu_2$

□

**c)** On suppose que le système est composé de deux organes 1 et 2 montés en parallèle, dont les durées de vie sont supposées indépendantes, ce qui implique qu'il tombe en panne quand les deux organes sont en panne. On note  $T_i$  la durée de vie de l'organe  $i$ ,  $f_{T_i}$  la densité de sa loi qu'on suppose exponentielle de paramètre  $\mu_i$ .

Déterminer la fiabilité du système.

*Démonstration.*

- On note  $Y$  la durée de vie du système en parallèle.

Comme le système tombe en panne quand les 2 organes sont en panne, on en déduit :

$$Y = \max(X_1, X_2)$$

- D'après la question **3.a)**, on en conclut que  $Y$  est une v.a.r. à densité et :

$$F_Y : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ (1 - e^{-\mu_1 x})(1 - e^{-\mu_2 x}) & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

- Soit  $x \in \mathbb{R}_+$ .

$$R_Y(x) = 1 - F_Y(x) = 1 - (1 - e^{-\mu_1 x})(1 - e^{-\mu_2 x})$$

Enfinement :  $R_Y : x \mapsto 1 - (1 - e^{-\mu_1 x})(1 - e^{-\mu_2 x})$ .

□

**10.** Soit  $\varphi_{n,\beta}$  la fonction définie par :

$$\varphi_{n,\beta} : t \mapsto \begin{cases} \frac{\beta}{(n-1)!} (\beta t)^{n-1} e^{-\beta t} & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases}$$

où  $\beta > 0$  est une constante strictement positive et  $n$  un entier naturel non nul.

**a)** Démontrer que  $\varphi_{n,\beta}$  est une densité de probabilité (loi d'Erlang).

*Démonstration.*

- La fonction  $\varphi_{n,\beta}$  est continue :

- × sur  $] -\infty, 0[$  en tant que fonction constante,

- × sur  $]0, +\infty[$  en tant que produit de fonctions continues sur  $]0, +\infty[$ .

La fonction  $\varphi_{n,\beta}$  est donc continue sur  $\mathbb{R}$  sauf éventuellement en 0.

- Soit  $x \in \mathbb{R}$ . Deux cas se présentent :

× si  $x \leq 0$ , alors :  $\varphi_{n,\beta}(x) = 0 \geq 0$ .

× si  $x \geq 0$ , alors :  $\varphi_{n,\beta}(x) = \frac{\beta}{(n-1)!} (\beta t)^{n-1} e^{-\beta t} \geq 0$  (car  $\beta > 0$ )

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \varphi_{n,\beta}(x) \geq 0}$$

- Démontrons que l'intégrale  $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_{n,\beta}(t) dt$  est convergente et vaut 1.

× Tout d'abord, comme  $\varphi_{n,\beta}$  est nulle en dehors de  $[0, +\infty[$  :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_{n,\beta}(t) dt = \int_0^{+\infty} \varphi_{n,\beta}(t) dt = \int_0^{+\infty} \frac{\beta}{(n-1)!} (\beta t)^{n-1} e^{-\beta t} dt = \frac{\beta^{n-1}}{(n-1)!} \int_0^{+\infty} t^{n-1} \beta e^{-\beta t} dt$$

× Or l'intégrale  $\int_0^{+\infty} t^{n-1} \beta e^{-\beta t} dt$  est le moment d'ordre  $n-1$  d'une v.a.r.  $X$  de loi  $\mathcal{E}(\beta)$ .

D'après la question 1.c), elle est convergente et vaut :  $\mathbb{E}(X^{n-1}) = \frac{(n-1)!}{\beta^{n-1}}$ . On en déduit que

l'intégrale  $\int_0^{+\infty} \varphi_{n,\beta}(t) dt$  est convergente et :

$$\int_0^{+\infty} \varphi_{n,\beta}(t) dt = \frac{1}{(n-1)!} \beta^{n-1} \times \mathbb{E}(X^{n-1}) = \frac{1}{(n-1)!} \beta^{n-1} \times \frac{(n-1)!}{\beta^{n-1}} = 1$$

Ainsi, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , l'intégrale  $\int_0^{+\infty} \varphi_{n,\beta}(t) dt$  converge et vaut 1.

Finalement, la fonction  $\varphi_{n,\beta}$  est bien une densité de probabilité. □

- b) On suppose que  $T$  a pour densité la fonction  $\varphi_{n,\beta}$ . Montrer que la fiabilité à la date  $t$  est :

$$R_T(t) = e^{-\beta t} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\beta t)^k}{k!}$$

*Démonstration.*

- Par définition de  $R_T$  :

$$R_T : x \mapsto 1 - F_T(x)$$

Comme  $F_T$  est la primitive de  $\varphi_{n,\beta}$  qui admet pour limite 1 en  $+\infty$ , alors  $R_T$  est la primitive de  $-\varphi_{n,\beta}$  qui admet pour limite 0 en  $+\infty$ .

Démontrons alors que la fonction  $G$  définie par :

$$G : t \mapsto e^{-\beta t} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\beta t)^k}{k!}$$

vérifie ces 2 propriétés :

× elle est dérivable sur  $\mathbb{R}_+$  et :  $G' = -\varphi_{n,\beta}$ ,

×  $\lim_{t \rightarrow +\infty} G(t) = 0$

- La fonction  $G$  est dérivable sur  $\mathbb{R}_+$  car elle est le produit  $G = h_1 \times h_2$  de :
    - ×  $h_1 : t \mapsto e^{-\beta t}$  dérivable sur  $\mathbb{R}_+$ ,
    - ×  $h_2 : t \mapsto \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\beta t)^k}{k!}$  dérivable sur  $\mathbb{R}_+$  car c'est une fonction polynomiale.
- Soit  $t \in \mathbb{R}_+$ .

$$\begin{aligned}
 G'(t) &= h_1'(t) h_2(t) + h_1(t) h_2'(t) \\
 &= -\beta e^{-\beta t} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\beta t)^k}{k!} + e^{-\beta t} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\beta k}{k!} (\beta t)^{k-1} \\
 &= \beta e^{-\beta t} \left( -\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\beta t)^k}{k!} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{k}{k!} (\beta t)^{k-1} \right) \\
 &= \beta e^{-\beta t} \left( -\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\beta t)^k}{k!} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{(k-1)!} (\beta t)^{k-1} \right) \\
 &= \beta e^{-\beta t} \left( -\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\beta t)^k}{k!} + \sum_{k=0}^{n-2} \frac{(\beta t)^k}{k!} \right) \quad (\text{par décalage d'indice}) \\
 &= \beta e^{-\beta t} \left( -\cancel{\sum_{k=0}^{n-2} \frac{(\beta t)^k}{k!}} - \frac{(\beta t)^{n-1}}{(n-1)!} + \cancel{\sum_{k=0}^{n-2} \frac{(\beta t)^k}{k!}} \right)
 \end{aligned}$$

On en déduit :

$$G'(t) = -\frac{\beta}{(n-1)!} (\beta t)^{n-1} e^{-\beta t} = -\varphi_{n,\beta}(t)$$

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, G'(t) = -\varphi_{n,\beta}(t)$$

- Soit  $t \in \mathbb{R}_+$ .

$$G(t) = e^{-\beta t} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\beta t)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} ((\beta t)^k e^{-\beta t})$$

Or, par croissances comparées, pour tout  $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$  :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} (\beta t)^k e^{-\beta t} = 0$$

$$\text{On en déduit : } \lim_{t \rightarrow +\infty} G(t) = 0.$$

$$\text{On en conclut : } R_T = G.$$

□

### Commentaire

- La loi présentée dans cette question **10.**) est appelée loi d'Erlang (hors programme) de paramètres  $n$  et  $\beta$ . Cette loi est liée à des lois de probabilité classiques :
  - × lorsque  $n = 1$  (cf initialisation de la récurrence du **10.**)), on reconnaît la loi exponentielle de paramètre  $\beta$ .
  - × de manière générale, la loi d'Erlang est un cas spécial de la loi Gamma (qui admet deux paramètres notés généralement  $\alpha$  et  $\beta$ ) dont une densité est donnée par :

$$t \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0; \\ \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} e^{-\beta t} t^{\alpha-1} & \text{si } t \geq 0. \end{cases}$$

En prenant  $\alpha = n$ , on reconnaît la densité  $f_n$  de la question de l'énoncé.



**Commentaire**

- Cette loi Gamma se définit à l'aide de la fonction :

$$\Gamma : x \mapsto \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$$

que l'on peut rencontrer par exemple dans ESSEC II 2005.

Pour rappel, la fonction  $\Gamma$  est définie sur  $\mathbb{R}^{+*}$  et on peut démontrer (penser à une IPP) :

$$\begin{cases} \Gamma(1) = 1 \\ \forall x > 0, \Gamma(x+1) = x\Gamma(x) \end{cases}$$

de sorte que :  $\forall n \in \mathbb{N}, \Gamma(n+1) = n!$ .

(on peut voir la fonction  $\Gamma$  comme un prolongement de la fonction factorielle)

- La loi de Weibull est elle aussi très classique aux concours (c'est l'objet de la question 11.).

11. Soit  $\psi_{\beta,\eta}$  la fonction définie par :

$$\psi_{\beta,\eta} : t \mapsto \begin{cases} \frac{\beta}{\eta} \left(\frac{t}{\eta}\right)^{\beta-1} e^{-\left(\frac{t}{\eta}\right)^\beta} & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

où  $\beta \geq 1, \eta > 0$ .

a) Vérifier que  $\psi_{\beta,\eta}$  est une densité de probabilité (loi de Weibull).

*Démonstration.*

- La fonction  $\psi_{\beta,\eta}$  est continue :
  - × sur  $] -\infty, 0[$  en tant que fonction constante,
  - × sur  $]0, +\infty[$  en tant que produit de fonctions continues sur  $]0, +\infty[$ .

La fonction  $\psi_{\beta,\eta}$  est continue sur  $\mathbb{R}$  sauf éventuellement en 0.

- Soit  $t \in \mathbb{R}$ . Deux cas se présentent :
  - × si  $t < 0$ , alors :  $\psi_{\beta,\eta}(t) = 0 \geq 0$ .
  - × si  $t \geq 0$ , alors :  $\psi_{\beta,\eta}(t) = \frac{\beta}{\eta} \left(\frac{t}{\eta}\right)^{\beta-1} e^{-\left(\frac{t}{\eta}\right)^\beta}$  (car  $\beta > 0$  et  $\eta > 0$ )

$$\forall t \in \mathbb{R}, \psi_{\beta,\eta}(t) \geq 0$$

- Démontrons que l'intégrale  $\int_{-\infty}^{+\infty} \psi_{\beta,\eta}(t) dt$  converge et vaut 1.

× Tout d'abord, comme la fonction  $\psi_{\beta,\eta}$  est nulle en dehors de  $]0, +\infty[$  :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi_{\beta,\eta}(t) dt = \int_0^{+\infty} \psi_{\beta,\eta}(t) dt$$

× De plus, la fonction  $\psi_{\beta,\eta}$  est continue par morceaux sur  $]0, +\infty[$ . L'intégrale  $\int_0^{+\infty} \psi_{\beta,\eta}(t) dt$  est donc uniquement impropre en  $+\infty$ .

× Soit  $B \in [0, +\infty[$ .

$$\int_0^B \psi_{\beta,\eta}(t) dt = \int_0^B \frac{\beta}{\eta} \left(\frac{t}{\eta}\right)^{\beta-1} e^{-\left(\frac{t}{\eta}\right)^\beta} dt = \left[ -e^{-\left(\frac{t}{\eta}\right)^\beta} \right]_0^B = 1 - e^{-\left(\frac{B}{\eta}\right)^\beta}$$

Or, comme  $\beta > 0$  :  $\lim_{B \rightarrow +\infty} 1 - e^{-\left(\frac{B}{\eta}\right)^\beta} = 1 - 0 = 1$

Ainsi, l'intégrale  $\int_{-\infty}^{+\infty} \psi_{\beta,\eta}(t) dt$  converge et vaut 1.

La fonction  $\psi_{\beta,\eta}$  est donc une densité de probabilité. □

b) On suppose que  $T$  a pour densité la fonction  $\psi_{\beta,\eta}$ .

Déterminer la fiabilité  $R_T(t)$  et le taux de défaillance  $\lambda(t)$  à la date  $t$ .

*Démonstration.*

• Tout d'abord, on considère :  $T(\Omega) = [0, +\infty[$ .

$$T(\Omega) = [0, +\infty[$$

• Déterminons  $R_T$ . Pour cela on commence par déterminer la fonction de répartition  $F_T$  de  $T$ . Soit  $x \in \mathbb{R}$ . Deux cas se présentent :

× si  $x < 0$ , alors  $[T \leq x] = \emptyset$  (car  $T(\Omega) = [0, +\infty[$ ). D'où :

$$F_T(x) = \mathbb{P}([T \leq x]) = \mathbb{P}(\emptyset) = 0$$

× si  $x \geq 0$ , alors :

$$\begin{aligned} F_T(x) &= \int_{-\infty}^x \psi_{\beta,\eta}(t) dt \\ &= \int_0^x \psi_{\beta,\eta}(t) dt && \text{(car } \psi_{\beta,\eta} \text{ est nulle en dehors de } [0, +\infty[) \\ &= \int_0^x \frac{\beta}{\eta} \left(\frac{t}{\eta}\right)^{\beta-1} e^{-\left(\frac{t}{\eta}\right)^\beta} dt \\ &= 1 - e^{-\left(\frac{x}{\eta}\right)^\beta} && \text{(en reprenant les calculs de la question précédente)} \end{aligned}$$

Enfinement :  $F_T : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - e^{-\left(\frac{x}{\eta}\right)^\beta} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

Comme, pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$ ,  $R_T(t) = 1 - F_T(t)$ , on obtient :  $R_T : x \mapsto e^{-\left(\frac{x}{\eta}\right)^\beta}$ .

• Déterminons maintenant  $\lambda$ .

Soit  $t \in \mathbb{R}_+$ .

$$\lambda(t) = \frac{\psi_{\beta,\eta}(t)}{R_T(t)} = \frac{\frac{\beta}{\eta} \left(\frac{t}{\eta}\right)^{\beta-1} e^{-\left(\frac{t}{\eta}\right)^\beta}}{e^{-\left(\frac{t}{\eta}\right)^\beta}} = \frac{\beta}{\eta} \left(\frac{t}{\eta}\right)^{\beta-1}$$

Enfinement :  $\lambda : t \mapsto \frac{\beta}{\eta} \left(\frac{t}{\eta}\right)^{\beta-1}$  □

c) Étudier  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \lambda(t)$  en fonction de la valeur de  $\beta$ .

*Démonstration.*

- Soit  $t \in [0, +\infty[$ . D'après la question précédente :

$$\lambda(t) = \frac{\beta}{\eta} \left( \frac{t}{\eta} \right)^{\beta-1}$$

- D'après l'énoncé :  $\beta \geq 1$ . Deux cas se présentent alors :

× si  $\beta = 1$ , alors :

$$\lambda(t) = \frac{1}{\eta} \left( \frac{t}{\eta} \right)^{1-1} = \frac{1}{\eta} \left( \frac{t}{\eta} \right)^0 = \frac{1}{\eta}$$

Ainsi, si  $\beta = 1$ , alors :  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \lambda(t) = \frac{1}{\eta}$ .

**Commentaire**

Notons que si  $\beta = 1$ , alors  $\psi_{1,\eta}$  est une densité de la loi  $\mathcal{E} \left( \frac{1}{\eta} \right)$ . On retrouve bien dans ce cas, conformément à la question **9.a**), un taux de défaillance constant.

× si  $\beta > 1$ , alors :

$$\lambda(t) = \frac{\beta}{\eta} \left( \frac{t}{\eta} \right)^{\beta-1}$$

Comme  $\eta > 0$ , alors :  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t}{\eta} = +\infty$ . Or  $\beta - 1 > 0$ . D'où :  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \left( \frac{t}{\eta} \right)^{\beta-1} = +\infty$ .

Ainsi, si  $\beta > 1$ , comme  $\eta > 0$ , alors :  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \lambda(t) = +\infty$ .

□

### III. Système Poissonien

On considère maintenant un système dont le fonctionnement est défini comme suit : pour tout réel  $t$  positif, la variable aléatoire  $N_t$  à valeurs entières représente le nombre de pannes qui se produisent dans l'intervalle  $[0, t]$ . On considère que le système est réparé immédiatement après chaque panne.

On notera en particulier que pour  $s \leq t$ , on a  $N_s \leq N_t$ .

On suppose qu'on a les quatre propriétés suivantes :

- $N_0 = 0$  et  $0 < \mathbb{P}([N_t = 0]) < 1$  pour tout  $t > 0$ .
- Pour tous réels  $t_0, t_1, \dots, t_n$  tels que  $0 \leq t_0 < t_1 < \dots < t_n$  les variables  $N_{t_0}, N_{t_1} - N_{t_0}, N_{t_2} - N_{t_1}, \dots, N_{t_n} - N_{t_{n-1}}$  sont mutuellement indépendantes (accroissements indépendants).
- Pour tous réels  $s$  et  $t$  tels que  $0 < s < t$ ,  $N_t - N_s$  suit la même loi que  $N_{t-s}$  (accroissements stationnaires).
- $\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\mathbb{P}([N_h > 1])}{h} = 0$ .

On pose, sous réserve d'existence, pour tout  $u \geq 0$  et pour tout  $s$  dans  $[0, 1]$ ,  $G_u(s) = \mathbb{E}(s^{N_u})$ , avec la convention  $0^0 = 1$ .

**12. a)** Justifier que pour tout  $u \geq 0$ ,  $G_u(s)$  existe pour tout  $s$  dans  $[0, 1]$  et qu'on a, pour tout  $s \in [0, 1]$  :

$$G_u(s) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}([N_u = k]) s^k$$

*Démonstration.*

Soit  $u \geq 0$ . Soit  $s \in [0, 1]$ .

- Par théorème de transfert, la v.a.r.  $s^{N_u}$  admet une espérance si et seulement si la série  $\sum_{k \geq 0} s^k \mathbb{P}([N_u = k])$  est absolument convergente. Cela revient à démontrer sa convergence car c'est une série à termes positifs.

- On remarque de plus :

$$\times \forall k \in \mathbb{N}, 0 \leq s^k \mathbb{P}([N_u = k]) \leq \mathbb{P}([N_u = k]). \text{ En effet, soit } k \in \mathbb{N} :$$

$$0 \leq s \leq 1$$

$$\text{donc } 0 \leq s^k \leq 1 \quad (\text{par croissance de } x \mapsto x^k \text{ sur } \mathbb{R}_+)$$

$$\text{d'où } 0 \leq s^k \mathbb{P}([N_u = k]) \leq \mathbb{P}([N_u = k]) \quad (\text{car } \mathbb{P}([N_u = k]) \geq 0)$$

- × la série  $\sum_{k \geq 0} \mathbb{P}([N_u = k])$  est convergente car la famille  $([N_u = k])_{k \in \mathbb{N}}$  est un système com-

plet d'événements (et en particulier :  $\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}([N_u = k]) = 1$ ).

Par critère de comparaison des séries à termes positifs,  $\sum_{k \geq 0} s^k \mathbb{P}([N_u = k])$  est convergente.

La v.a.r.  $s^{N_u}$  admet donc une espérance.

$$\text{On en déduit que } G_u(s) \text{ existe et } G_u(s) = \sum_{k=0}^{+\infty} s^k \mathbb{P}([N_u = k]).$$

□

**Commentaire**

- On pouvait également conclure avec une autre comparaison. En effet, pour tout  $k \in \mathbb{N}$  :

$$\begin{aligned} 0 &\leq \mathbb{P}([N_u = k]) \leq 1 \\ \text{donc } 0 &\leq s^k \mathbb{P}([N_u = k]) \leq s^k \quad (\text{car } s^k \geq 0) \end{aligned}$$

Deux cas se présentent alors :

× si  $s \in [0, 1[$ , alors la série  $\sum_{k \geq 0} s^k$  est une série géométrique de raison  $s \in ]-1, 1[$ . Elle est donc convergente.

Par critère de comparaison des séries à termes positifs, la série  $\sum_{k \geq 0} s^k \mathbb{P}([N_u = k])$  est convergente.

× si  $s = 1$ , alors, comme  $([N_u = k])_{k \in \mathbb{N}}$  est un système complet d'événements, la série  $\sum_{k \geq 0} \mathbb{P}([N_u = k])$  est convergente. Autrement dit, la série  $\sum_{k \geq 0} \mathbb{P}([N_u = k]) \times 1^k$  est convergente.

- Pour tout  $u \geq 0$ , la fonction  $G_u$  est appelée *fonction génératrice des probabilités* de la v.a.r.  $N_u$ . Cette fonction est en fait définie pour toute v.a.r.  $X$  à valeurs entières et positives par la formule :

$$\forall s \in [0, 1], \quad G_X(s) = \mathbb{E}(s^X) = \sum_{k=0}^{+\infty} s^k \mathbb{P}([X = k])$$

Cette fonction est un objet classique en probabilités. Elle caractérise la loi de la v.a.r.  $X$ . Plus précisément :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{P}([X = n]) = \frac{G_X^{(n)}(0)}{n!}$$

On verra en question suivante une propriété de ces fonctions dans le cas d'une somme de v.a.r. indépendantes.

- b) Montrer par ailleurs que, pour tous réels  $u$  et  $v$  positifs ou nuls, et pour tout réel  $s$  tel que  $0 \leq s \leq 1$ , on a :

$$G_{u+v}(s) = G_u(s)G_v(s)$$

*Démonstration.*

Soit  $(u, v) \in (\mathbb{R}_+)^2$ . Soit  $s \in [0, 1]$ .

- Tout d'abord :

$$\begin{aligned} G_{u+v}(s) &= \mathbb{E}(s^{N_{u+v}}) \\ &= \mathbb{E}(s^{N_{u+v} - N_v + N_v}) \\ &= \mathbb{E}(s^{N_{u+v} - N_v} s^{N_v}) \end{aligned}$$

- Or les v.a.r.  $N_{u+v} - N_v$  et  $N_v$  sont indépendantes (par hypothèse des accroissements indépendants). Ainsi, par lemme des coalitions, les v.a.r.  $s^{N_{u+v} - N_v}$  et  $s^{N_v}$  sont également indépendantes.

D'où :

$$\begin{aligned}
 G_{u+v}(s) &= \mathbb{E}(s^{N_{u+v}-N_v}) \mathbb{E}(s^{N_v}) \\
 &= \mathbb{E}(s^{N_{(u+v)-v}}) \mathbb{E}(s^{N_v}) && \text{(par hypothèse d'accroissements stationnaires)} \\
 &= \mathbb{E}(s^{N_u}) \mathbb{E}(s^{N_v}) \\
 &= G_u(s) G_v(s)
 \end{aligned}$$

$\forall (u, v) \in (\mathbb{R}_+)^2, \forall s \in [0, 1], G_{u+v}(s) = G_u(s) G_v(s)$

□

### Commentaire

- Cette question peut sembler difficile car elle demande une prise d'initiative importante. En particulier, il peut paraître difficile de penser à l'écriture  $N_{u+v} = N_{u+v} - N_v + N_v$ . Il est conseillé de limiter le champ des recherches.
  - 1) On cherche à faire apparaître le produit  $G_u(s) G_v(s) = \mathbb{E}(s^{N_u}) \mathbb{E}(s^{N_v})$  qui est un produit d'espérances. On peut donc penser qu'il provient de l'espérance d'un produit de variables aléatoires **indépendantes**,
  - 2) L'énoncé précise que les accroissements du processus  $(N_t)_{t \geq 0}$  sont indépendants. On va donc essayer d'en forcer l'apparition. C'est ce que l'on fait avec l'écriture  $s^{N_{u+v}} = s^{N_{u+v}-N_v} s^{N_v}$ , provenant elle-même de l'égalité :  $N_{u+v} = N_{u+v} - N_v + N_v$ .  
(notons que l'écriture  $N_{u+v} = N_{u+v} - N_u + N_u$  aurait tout aussi bien fonctionné)
- On peut retenir que ce type de procédé est très fréquent dans le cas de l'étude d'un processus aux accroissements indépendants, comme c'est le cas des processus de Poisson (ceux étudiés dans ce sujet).
- La difficulté d'un sujet se mesure en grande partie à la manière dont chaque question est découpée en sous-question. Moins il y a de sous-questions, plus le candidat doit prendre des initiatives. Ainsi, un sujet de type TOP3 proposera un découpage en sous-questions bien moins détaillé qu'un sujet TOP5.
  - On peut démontrer une propriété plus générale sur les fonctions génératrices. Pour toutes v.a.r.  $X$  et  $Y$  à valeurs entières et positives **indépendantes** :

$$G_{X+Y} = G_X G_Y$$

En effet, pour tout  $s \in [0, 1]$  :

$$\begin{aligned}
 G_{X+Y}(s) &= \mathbb{E}(s^{X+Y}) \\
 &= \mathbb{E}(s^X s^Y) \\
 &= \mathbb{E}(s^X) \mathbb{E}(s^Y) && \text{(car } s^X \text{ et } s^Y \text{ sont indépendantes par lemme des coalitions)} \\
 &= G_X(s) G_Y(s)
 \end{aligned}$$

13. On fixe  $s$  tel que  $0 \leq s \leq 1$ .

a) Montrer que  $G_1(s) > 0$ .

On pose  $\theta(s) = -\ln(G_1(s))$  et, pour  $u \geq 0$ ,  $\psi(u) = G_u(s)$ .

*Démonstration.*

• D'après 12.a) :

$$\begin{aligned} G_1(s) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}([N_1 = k]) s^k \\ &= \mathbb{P}([N_1 = 0]) s^0 + \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}([N_1 = k]) s^k \\ &= \mathbb{P}([N_1 = 0]) + \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}([N_1 = k]) s^k \end{aligned}$$

• De plus :  $\forall k \in \mathbb{N}^*$ ,  $\mathbb{P}([N_1 = k]) s^k \geq 0$ . Donc :  $\sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}([N_1 = k]) s^k \geq 0$ .

• De plus, d'après l'énoncé :  $\forall t > 0$ ,  $\mathbb{P}([N_t = 0]) > 0$ . En particulier :  $\mathbb{P}([N_1 = 0]) > 0$ . D'où :

$$\mathbb{P}([N_1 = 0]) + \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}([N_1 = k]) s^k > 0$$

D'où :  $G_1(s) > 0$

□

b) Montrer que  $\psi(k) = e^{-k\theta(s)}$  pour tout  $k \in \mathbb{N}$ .

*Démonstration.*

Démontrons par récurrence :  $\forall k \in \mathbb{N}$ ,  $\mathcal{P}(k)$  où  $\mathcal{P}(k) : \psi(k) = e^{-k\theta(s)}$ .

► **Initialisation** :

• D'une part :  $\psi(0) = G_0(s) = \mathbb{E}(s^{N_0}) = \mathbb{E}(s^0) = \mathbb{E}(1) = 1$ .

• D'autre part :  $e^{-0 \times \theta(s)} = e^0 = 1$ .

D'où  $\mathcal{P}(0)$ .

► **Hérédité** : soit  $k \in \mathbb{N}$ .

Supposons  $\mathcal{P}(k)$  et démontrons  $\mathcal{P}(k+1)$  (i.e.  $\psi(k+1) = e^{-(k+1)\theta(s)}$ ).

$$\begin{aligned} \psi(k+1) &= G_{k+1}(s) \\ &= G_k(s) \times G_1(s) \quad (\text{d'après 12.b}) \\ &= \psi(k) \times G_1(s) \\ &= e^{-k\theta(s)} \times G_1(s) \quad (\text{par hypothèse de récurrence}) \\ &= e^{-k\theta(s)} e^{-\theta(s)} \end{aligned}$$

En effet :

$$\theta(s) = -\ln(G_1(s))$$

$$\text{donc } -\theta(s) = \ln(G_1(s))$$

$$\text{d'où } e^{-\theta(s)} = G_1(s)$$

Ainsi :  $\psi(k+1) = e^{-k\theta(s)} e^{-\theta(s)} = e^{-k\theta(s) - \theta(s)} = e^{-(k+1)\theta(s)}$ .

D'où  $\mathcal{P}(k+1)$ .

Par principe de récurrence, pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $\psi(k) = e^{-k\theta(s)}$ .

□

c) Soit  $q$  un entier naturel non nul. En considérant  $G_{\frac{1}{q}}(s)$ , montrer que  $\psi\left(\frac{1}{q}\right) = e^{-\frac{1}{q}\theta(s)}$ .

*Démonstration.*

- Tout d'abord :  $\psi\left(\frac{1}{q}\right) = G_{\frac{1}{q}}(s)$ .
- On cherche à utiliser la question précédente. Pour cela, on remarque :

$$G_1(s) = G_{q \times \frac{1}{q}}(s) = \left(G_{\frac{1}{q}}(s)\right)^q$$

La dernière égalité est obtenue en remarquant que, par récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \geq 0, \quad G_{nx}(s) = \left(G_x(s)\right)^n$$

On a appliqué cette égalité à  $n = q$  et  $x = \frac{1}{q}$ .

- Ainsi :

$$G_1(s) = \left(G_{\frac{1}{q}}(s)\right)^q \quad \text{donc} \quad \left(G_1(s)\right)^{\frac{1}{q}} = G_{\frac{1}{q}}(s)$$

On en déduit :

$$G_{\frac{1}{q}}(s) = \left(G_1(s)\right)^{\frac{1}{q}} = \left(e^{-\theta(s)}\right)^{\frac{1}{q}} = e^{-\frac{1}{q}\theta(s)}$$

Enfinement :  $\psi\left(\frac{1}{q}\right) = G_{\frac{1}{q}}(s) = e^{-\frac{1}{q}\theta(s)}$

### Commentaire

- Cette question peut aussi sembler difficile. En particulier, il peut paraître difficile de penser :
  - 1) à l'égalité :  $G_1(s) = G_{q \times \frac{1}{q}}(s)$
  - 2) à la récurrence pour obtenir :  $G_{q \times \frac{1}{q}}(s) = \left(G_{\frac{1}{q}}(s)\right)^q$ .
- L'idée est une nouvelle fois de limiter le champ des recherches. La seule information sur la fonction  $\psi$  est celle obtenue en question précédente. On cherche donc à faire apparaître  $G_k(s)$  où  $k \in \mathbb{N}$ . Pour forcer l'apparition d'un indice entier, on choisit la solution la plus simple : multiplier  $q$  par  $\frac{1}{q}$ . On force ainsi l'apparition de  $G_1(s)$  (l'indice 1 est bien un entier).
- Démontrons 2), *i.e.*, pour tout  $x \geq 0$ , démontrons par récurrence :  $\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}(n)$  où  $\mathcal{P}(n) : G_{nx}(s) = \left(G_x(s)\right)^n$ .

► **Initialisation** :

× d'une part :  $G_{0 \times x}(s) = G_0(s) = 1$  (d'après l'initialisation de **13.b**),

× d'autre part :  $\left(G_x(s)\right)^0 = 1$ .

D'où  $\mathcal{P}(0)$ .

► **Hérédité** : soit  $n \in \mathbb{N}$ .

Supposons  $\mathcal{P}(n)$  et démontrons  $\mathcal{P}(n+1)$  (*i.e.*  $G_{(n+1)x}(s) = \left(G_x(s)\right)^{n+1}$ ).

$$\begin{aligned} G_{(n+1)x}(s) &= G_{nx+x}(s) \\ &= G_{nx}(s) \times G_x(s) && \text{(d'après 12.b)} \\ &= \left(G_x(s)\right)^n \times G_x(s) && \text{(par hypothèse de récurrence)} \\ &= \left(G_x(s)\right)^{n+1} \end{aligned}$$

D'où  $\mathcal{P}(n+1)$ . □



d) Montrer que si  $p$  est entier naturel et  $q$  un entier naturel non nul, on a  $\psi(r) = e^{-r\theta(s)}$  où on a posé  $r = \frac{p}{q}$ .

*Démonstration.*

Soit  $(p, q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$ . On pose :  $r = \frac{p}{q}$ .

$$\begin{aligned}\psi(r) &= G_r(s) = G_{\frac{p}{q}}(s) \\ &= G_{p \times \frac{1}{q}}(s)\end{aligned}$$

$$= \left(G_{\frac{1}{q}}(s)\right)^p$$

(d'après le résultat de la récurrence en question précédente, appliqué à  $n = p$  et  $x = \frac{1}{q}$ )

$$= \left(e^{-\frac{1}{q} \theta(s)}\right)^p$$

(d'après la question précédente)

$$= e^{-\frac{p}{q} \theta(s)} = e^{-r \theta(s)}$$

Finalement, pour tout  $(p, q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$ , en posant  $r = \frac{p}{q}$ , on a :  $\psi(r) = e^{-r \theta(s)}$ . □

e) Montrer que pour tout réel positif  $u$ ,  $G_u(s) = e^{-u\theta(s)}$ .

*Démonstration.*

Soit  $u \geq 0$ .

- On cherche à utiliser la question précédente. Pour cela, on souhaite encadrer le réel  $u$  à l'aide de 2 suites de rationnels convergentes de limite  $u$ . On espère ensuite en déduire un encadrement de  $\psi(u)$ . On propose, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  :

$$\frac{\lfloor nu \rfloor}{n} \leq u < \frac{\lfloor nu \rfloor}{n} + \frac{1}{n} \quad (\star)$$

On note, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  :

$$r_n = \frac{\lfloor nu \rfloor}{n} \quad \text{et} \quad R_n = \frac{\lfloor nu \rfloor}{n} + \frac{1}{n}$$

Vérifions tout d'abord que l'encadrement cité plus haut est vrai et que les deux suites  $(r_n)$  et  $(R_n)$  convergent bien vers  $u$ .

× Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Par définition de la partie entière :

$$\lfloor nu \rfloor \leq nu < \lfloor nu \rfloor + 1$$

$$\text{donc} \quad \frac{\lfloor nu \rfloor}{n} \leq u < \frac{\lfloor nu \rfloor}{n} + \frac{1}{n} \quad (\text{car } n > 0)$$

$$\text{d'où} \quad r_n \leq u < R_n$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, r_n \leq u < R_n$$

× Démontrons :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} r_n = u$ .

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . D'après (\*) :

$$\frac{\lfloor nu \rfloor}{n} \leq u < \frac{\lfloor nu \rfloor}{n} + \frac{1}{n}$$

donc  $\frac{\lfloor nu \rfloor}{n} \leq u$  ET  $u < \frac{\lfloor nu \rfloor}{n} + \frac{1}{n}$

d'où  $\frac{\lfloor nu \rfloor}{n} \leq u$  ET  $u - \frac{1}{n} < \frac{\lfloor nu \rfloor}{n}$

ainsi  $u - \frac{1}{n} < \frac{\lfloor nu \rfloor}{n} \leq u$

alors  $u - \frac{1}{n} < r_n \leq u$

Or :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u + \frac{1}{n} = u$ .

Par théorème d'encadrement :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} r_n = u$ .

De plus :  $\forall n \in \mathbb{N}^*, R_n = r_n + \frac{1}{n}$ . Ainsi :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} R_n = u + 0 = u$ .

• Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . On cherche alors à encadrer  $\psi(u)$  à l'aide de  $\psi(r_n)$  et  $\psi(R_n)$ .

× D'après (\*) :

$$r_n \leq u < R_n$$

× Or, d'après l'énoncé, pour tout  $(t_1, t_2) \in (\mathbb{R}_+)^2$ , si  $t_1 \leq t_2$ , alors :  $N_{t_1} \leq N_{t_2}$ . On en déduit :

$$N_{r_n} \leq N_u \leq N_{R_n}$$

× Comme  $s \in [0, 1]$ , deux cas se présentent :

- si  $s \in ]0, 1]$ , alors :  $\ln(s) \leq 0$ . Donc :

$$N_{r_n} \ln(s) \geq N_u \ln(s) \geq N_{R_n} \ln(s)$$

d'où  $\exp(N_{r_n} \ln(s)) \geq \exp(N_u \ln(s)) \geq \exp(N_{R_n} \ln(s))$  *(par croissance de exp sur  $\mathbb{R}$ )*

ainsi  $s^{N_{r_n}} \geq s^{N_u} \geq s^{N_{R_n}}$

- si  $s = 0$ , alors l'encadrement suivant est directement vérifié :

$$0^{N_{r_n}} \geq 0^{N_u} \geq 0^{N_{R_n}}$$

× Par croissance de l'espérance, on obtient :

$$\mathbb{E}(s^{N_{r_n}}) \geq \mathbb{E}(s^{N_u}) \geq \mathbb{E}(s^{N_{R_n}})$$

$$\begin{array}{ccc} \parallel & & \parallel \\ \psi(r_n) & \geq & \psi(u) \geq \psi(R_n) \end{array}$$

- Or, comme  $(r_n, R_n) \in \mathbb{Q}^2$ , d'après la question précédente :

$$e^{-r_n \theta(s)} \geq \psi(u) \geq e^{-R_n \theta(s)}$$

- Enfin, comme  $\lim_{n \rightarrow +\infty} r_n = u$ , par continuité de la fonction  $\exp$  en  $-u\theta(s)$ , on obtient :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{-r_n \theta(s)} = e^{-u\theta(s)}.$$

$$\text{De même : } \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{-R_n \theta(s)} = e^{-u\theta(s)}.$$

- Ainsi, par théorème d'encadrement :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \psi(u) = e^{-u\theta(s)}$ .

On en conclut :  $\forall u \geq 0, \psi(u) = e^{-u\theta(s)}$ .

□

### Commentaire

- Cette question est sans doute la plus difficile du sujet. Essayons de comprendre la démarche souhaitée par l'énoncé des questions **13.b)** à **13.e)**.
- L'objectif est ici de démontrer la propriété :

$$\forall u \in \mathbb{R}_+, \quad \psi(u) = e^{-u\theta(s)}$$

Pour ce faire, l'énoncé procède de la manière suivante :

1) démonstration de cette égalité sur  $\mathbb{N}$  (et non  $\mathbb{R}_+$ ). Autrement dit, on souhaite d'abord vérifier que la propriété d'intérêt est valide pour des entiers.

*(pour cette étape, on raisonne souvent par récurrence)*

2) démonstration de cette égalité pour des inverses d'entiers. Autrement dit, on souhaite vérifier que la propriété d'intérêt est valide pour des réels de la forme  $\frac{1}{q}$  où  $q \in \mathbb{N}^*$ .

*(pour cette étape, on utilise le point précédent, souvent en écrivant :  $1 = q \times \frac{1}{q}$ )*

3) démonstration de cette égalité sur  $\mathbb{Q}$ . Autrement dit, on souhaite vérifier que la propriété d'intérêt est valide pour des réels de la forme  $r = \frac{p}{q}$  où  $(p, q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$ .

*(pour cette étape, on utilise le point précédent)*

4) démonstration de cette égalité sur  $\mathbb{R}_+$  comme souhaité.

*(pour cette étape, on utilise le point précédent, souvent en encadrant  $u$  par deux suites de rationnels convergentes de limite  $u$ )*

- Chaque étape consiste donc en une généralisation de la précédente. Cette démarche, bien qu'originale en ECE, est classique en mathématiques.

f) En déduire que pour tout  $s \in [0, 1]$ ,  $\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{G_h(s) - 1}{h} = -\theta(s)$ .

*Démonstration.*

Soit  $s \in [0, 1]$ . Soit  $h \in \mathbb{R}_+^*$ .

- D'après la question précédente :

$$\frac{G_h(s) - 1}{h} = \frac{\psi(h) - 1}{h} = \frac{e^{-h\theta(s)} - 1}{h}$$

- Or, comme  $\lim_{h \rightarrow 0} -h\theta(s) = 0$ , alors :

$$e^{-h\theta(s)} - 1 \underset{h \rightarrow 0}{\sim} -h\theta(s)$$

On en déduit :

$$\frac{e^{-h\theta(s)} - 1}{h} \underset{h \rightarrow 0}{\sim} -\frac{\theta(s)}{1} = -\theta(s)$$

Enfinement, pour tout  $s \in [0, 1]$  :  $\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{G_h(s) - 1}{h} = -\theta(s)$ .

□

14. Montrer par ailleurs que pour tout  $s \in [0, 1]$ ,

$$G_h(s) - 1 = \mathbb{P}([N_h = 1]) (s - 1) + \sum_{k=2}^{+\infty} \mathbb{P}([N_h = k]) (s^k - 1)$$

*Démonstration.*

Soit  $s \in [0, 1]$ .

- Tout d'abord, d'après **12.a)** :

$$\begin{aligned} G_h(s) - 1 &= \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}([N_h = k]) s^k - 1 \\ &= \left( \mathbb{P}([N_h = 0]) s^0 + \mathbb{P}([N_h = 1]) s^1 + \sum_{k=2}^{+\infty} \mathbb{P}([N_h = k]) s^k \right) - 1 \\ &= \left( \mathbb{P}([N_h = 0]) + \mathbb{P}([N_h = 1]) s + \sum_{k=2}^{+\infty} \mathbb{P}([N_h = k]) s^k \right) - 1 \end{aligned}$$

- Or la famille  $([N_h = k])_{k \in \mathbb{N}}$  forme un système complet d'événements. Ainsi :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}([N_h = k]) = 1$$

D'où :

$$\begin{aligned} G_h(s) - 1 &= \left( \mathbb{P}([N_h = 0]) + \mathbb{P}([N_h = 1]) s + \sum_{k=2}^{+\infty} \mathbb{P}([N_h = k]) s^k \right) - \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}([N_h = k]) \\ &= \left( \cancel{\mathbb{P}([N_h = 0])} + \mathbb{P}([N_h = 1]) s + \sum_{k=2}^{+\infty} \mathbb{P}([N_h = k]) s^k \right) \\ &\quad - \left( \cancel{\mathbb{P}([N_h = 0])} + \mathbb{P}([N_h = 1]) + \sum_{k=2}^{+\infty} \mathbb{P}([N_h = k]) \right) \\ &= \mathbb{P}([N_h = 1]) (s - 1) + \sum_{k=2}^{+\infty} \mathbb{P}([N_h = k]) (s^k - 1) \end{aligned}$$

$\forall s \in [0, 1], G_h(s) - 1 = \mathbb{P}([N_h = 1]) (s - 1) + \sum_{k=2}^{+\infty} \mathbb{P}([N_h = k]) (s^k - 1)$

□

15. Montrer que pour tout  $s \in [0, 1]$  :  $\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\sum_{k=2}^{+\infty} \mathbb{P}([N_h = k]) (s^k - 1)}{h} = 0$ .

*Démonstration.*

Soit  $s \in [0, 1]$ .

- On souhaite encadrer  $\sum_{k=2}^{+\infty} \mathbb{P}([N_h = k]) (s^k - 1)$ . On commence donc par encadrer, pour tout  $k \in \llbracket 2, +\infty \llbracket$  :  $\mathbb{P}([N_h = k]) (s^k - 1)$ .
- Soit  $k \in \llbracket 2, +\infty \llbracket$ .

$$\begin{array}{lclcl} 0 & \leq & s & \leq & 1 \\ \text{donc} & 0 & \leq & s^k & \leq & 1 & \text{(par croissance de } x \mapsto x^k \text{ sur } \mathbb{R}_+) \\ \text{d'où} & -1 & \leq & s^k - 1 & \leq & 0 \\ \text{ainsi} & -\mathbb{P}([N_h = k]) & \leq & \mathbb{P}([N_h = k]) (s^k - 1) & \leq & 0 & \text{(car } \mathbb{P}([N_h = k]) \geq 0) \end{array}$$

- On obtient alors :
  - ×  $\forall k \in \llbracket 2, +\infty \llbracket, 0 \leq \mathbb{P}([N_h = k]) (1 - s^k) \leq \mathbb{P}([N_h = k])$
  - × la série  $\sum_{k \geq 2} \mathbb{P}([N_h = k])$  est convergente car  $([N_h = k])_{k \in \mathbb{N}}$  forme un système complet d'événements.

Par critère de comparaison des séries à termes positifs,  $\sum_{k \geq 2} \mathbb{P}([N_h = k]) (1 - s^k)$  est convergente et :

$$0 \leq \sum_{k=2}^{+\infty} \mathbb{P}([N_h = k]) (1 - s^k) \leq \sum_{k=2}^{+\infty} \mathbb{P}([N_h = k])$$

- De plus, comme la v.a.r.  $N_h$  est à valeurs entières :

$$\sum_{k=2}^{+\infty} \mathbb{P}([N_h = k]) = \mathbb{P}([N_h \geq 2]) = \mathbb{P}([N_h > 1])$$

- On en déduit :

$$0 \leq \sum_{k=2}^{+\infty} \mathbb{P}([N_h = k]) (1 - s^k) \leq \mathbb{P}([N_h > 1])$$

D'où :

$$0 \geq \sum_{k=2}^{+\infty} \mathbb{P}([N_h = k]) (s^k - 1) \geq -\mathbb{P}([N_h > 1])$$

Ainsi, comme  $h > 0$  :

$$0 \geq \frac{\sum_{k=2}^{+\infty} \mathbb{P}([N_h = k]) (s^k - 1)}{h} \geq -\frac{\mathbb{P}([N_h > 1])}{h}$$

- Or, d'après l'énoncé :  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\mathbb{P}([N_h > 1])}{h} = 0$ .

Par théorème d'encadrement, on obtient :  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sum_{k=2}^{+\infty} \mathbb{P}([N_h = k]) (s^k - 1)}{h} = 0$ .

□

- 16. a)** En déduire qu'il existe  $\alpha \geq 0$  tel que  $\alpha = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\mathbb{P}([N_h = 1])}{h}$  et que pour tout  $s \in [0, 1]$  :
- $$\theta(s) = \alpha(1 - s)$$

*Démonstration.*

Soit  $s \in [0, 1]$ .

- On remarque que  $\theta(1) = -\ln(G_1(1)) = -\ln(1) = 0$  (on a réutilisé le fait que  $([N_1 = k])_{k \in \mathbb{N}}$  forme un système complet d'événements). Ainsi, la formule  $\theta(s) = \alpha(1 - s)$  est valable pour  $s = 1$ . On suppose dans la suite que  $s \neq 1$ .
- Soit  $h \in \mathbb{R}_+^*$ . D'après la question **14.** :

$$\mathbb{P}([N_h = 1]) (s - 1) = G_h(s) - 1 - \sum_{k=2}^{+\infty} \mathbb{P}([N_h = k]) s^k$$

D'où :

$$\frac{\mathbb{P}([N_h = 1])}{h} = \frac{1}{s - 1} \left( \frac{G_h(s) - 1}{h} - \frac{\sum_{k=2}^{+\infty} \mathbb{P}([N_h = k]) (s^k - 1)}{h} \right) \quad (*)$$

- Or :

× d'après **13.f)** :  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{G_h(s) - 1}{h} = -\theta(s),$

× d'après la question précédente :  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sum_{k=2}^{+\infty} \mathbb{P}([N_h = k]) (s^k - 1)}{h} = 0.$

On en déduit que la fonction  $h \mapsto \frac{\mathbb{P}([N_h = 1])}{h}$  admet une limite quand  $h$  tend vers 0.

Autrement dit, il existe  $\alpha \in \mathbb{R}$  tel que :  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\mathbb{P}([N_h = 1])}{h} = \alpha.$

- De plus, pour tout  $h \in \mathbb{R}_+^*$ , on a :  $\frac{\mathbb{P}([N_h = 1])}{h} \geq 0.$

Ainsi, par passage à la limite :  $\alpha \geq 0.$

- De plus, par passage à la limite dans (\*) :

$$\alpha = \frac{1}{s - 1} (-\theta(s) + 0)$$

donc  $(s - 1) \alpha = -\theta(s)$

d'où  $(1 - s) \alpha = \theta(s)$

$\forall s \in [0, 1], \theta(s) = \alpha(1 - s)$

□

- b)** En considérant  $G_u(0)$ , montrer que  $\alpha > 0$ .

*Démonstration.*

Soit  $u \in \mathbb{R}_+^*$ .

- D'une part, d'après **13.e)** :

$$G_u(0) = e^{-u\theta(s)}$$

$$= e^{-u\alpha(1-0)} = e^{-u\alpha} \quad (\text{d'après la question précédente})$$

- D'autre part, d'après **12.a)** :

$$\begin{aligned}
 G_u(0) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}([N_u = k]) \times 0^k \\
 &= \mathbb{P}([N_u = 0]) \times 0^0 + \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}([N_u = k]) \times 0^k \\
 &= \mathbb{P}([N_u = 0]) \qquad \qquad \qquad (\text{avec la convention : } 0^0 = 1)
 \end{aligned}$$

- Ainsi :

$$\mathbb{P}([N_u = 0]) = e^{-u\alpha}$$

On remarque :  $\mathbb{P}([N_u = 0]) > 0$ . On en déduit :

$$\ln(\mathbb{P}([N_u = 0])) = -u\alpha$$

D'où :  $-\frac{\ln(\mathbb{P}([N_u = 0]))}{u} = \alpha$ .

- Comme  $u > 0$ , d'après l'énoncé :

$$0 < \mathbb{P}([N_u = 0]) < 1$$

donc  $\ln(\mathbb{P}([N_u = 0])) < 0$  *(par stricte croissance de  $\ln$  sur  $]0, +\infty[$ )*

d'où  $-\frac{\ln(\mathbb{P}([N_u = 0]))}{u} > 0$  *(car  $u > 0$ )*

ainsi  $\alpha > 0$

On a bien :  $\alpha > 0$ .

□

c) On fixe un temps  $u > 0$ . Montrer que pour tout  $s \in [0, 1]$ ,

$$G_u(s) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}([N_u = k]) s^k = \sum_{k=0}^{+\infty} \left[ e^{-\alpha u} \frac{(\alpha u)^k}{k!} \right] s^k$$

*Démonstration.*

Soit  $s \in [0, 1]$ .

- D'une part, d'après **12.a)** :

$$G_u(s) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}([N_u = k]) s^k$$

$$G_u(s) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}([N_u = k]) s^k$$

- D'autre part :

$$G_u(s) = e^{-u\theta(s)} \qquad \qquad \qquad (\text{d'après } 13.e))$$

$$= e^{-u\alpha(1-s)} \qquad \qquad \qquad (\text{d'après } 16.a))$$

$$= e^{-u\alpha} e^{u\alpha s}$$

Or, par définition de la série exponentielle de paramètre  $u \alpha s$  :

$$e^{u \alpha s} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(u \alpha s)^k}{k!}$$

On en déduit :

$$G_u(s) = e^{-\alpha u} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(u \alpha s)^k}{k!} = e^{-\alpha u} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(\alpha u)^k}{k!} s^k = \sum_{k=0}^{+\infty} \left( e^{-\alpha u} \frac{(\alpha u)^k}{k!} \right) s^k$$

$$G_u(s) = \sum_{k=0}^{+\infty} \left( e^{-\alpha u} \frac{(\alpha u)^k}{k!} \right) s^k$$

□

d) Dédurre que pour tout  $u > 0$ , la variable aléatoire  $N_u$  suit la loi de Poisson de paramètre  $\alpha u$ .

*Démonstration.*

Soit  $u > 0$ . Démontrons par récurrence forte :  $\forall k \in \mathbb{N}$ ,  $\mathcal{P}(k)$

où  $\mathcal{P}(k) : \mathbb{P}([N_u = k]) = e^{-\alpha u} \frac{(\alpha u)^k}{k!}$ .

► **Initialisation** :

- D'une part, d'après **16.b**) :  $\mathbb{P}([N_u = 0]) = e^{-\alpha u}$ .
- D'autre part :  $e^{-\alpha u} \frac{(\alpha u)^0}{0!} = e^{-\alpha u}$ .

D'où  $\mathcal{P}(0)$ .

► **Hérédité** : soit  $k \in \mathbb{N}$ .

Supposons :  $\forall j \in \llbracket 0, k \rrbracket$ ,  $\mathcal{P}(j)$ . Et démontrons  $\mathcal{P}(k+1)$  (i.e.  $\mathbb{P}([N_u = k+1]) = e^{-\alpha u} \frac{(\alpha u)^{k+1}}{(k+1)!}$ ).

- Soit  $s \in ]0, 1[$ . D'après **16.c**) :

$$\sum_{j=0}^{+\infty} \mathbb{P}([N_u = j]) s^j = \sum_{j=0}^{+\infty} \left( e^{-\alpha u} \frac{(\alpha u)^j}{j!} \right) s^j$$

Donc :

$$\sum_{j=0}^{+\infty} \left( \mathbb{P}([N_u = j]) - e^{-\alpha u} \frac{(\alpha u)^j}{j!} \right) s^j = 0$$

D'où :

$$\sum_{j=0}^k \left( \mathbb{P}([N_u = j]) - e^{-\alpha u} \frac{(\alpha u)^j}{j!} \right) s^j + \sum_{j=k+1}^{+\infty} \left( \mathbb{P}([N_u = j]) - e^{-\alpha u} \frac{(\alpha u)^j}{j!} \right) s^j = 0$$

- Or, par hypothèse de récurrence :  $\forall j \in \llbracket 1, k \rrbracket$ ,  $\mathbb{P}([N_u = j]) = e^{-\alpha u} \frac{(\alpha u)^j}{j!}$ . Ainsi :

$$\sum_{j=0}^k 0 \times s^j + \sum_{j=k+1}^{+\infty} \left( \mathbb{P}([N_u = j]) - e^{-\alpha u} \frac{(\alpha u)^j}{j!} \right) s^j = 0$$

On obtient :

$$\left( \mathbb{P}([N_u = k+1]) - e^{-\alpha u} \frac{(\alpha u)^{k+1}}{(k+1)!} \right) s^{k+1} + \sum_{j=k+2}^{+\infty} \left( \mathbb{P}([N_u = j]) - e^{-\alpha u} \frac{(\alpha u)^j}{j!} \right) s^j = 0$$

En divisant par  $s^{k+1}$  (car  $s \neq 0$ ), on a :

$$\left( \mathbb{P}([N_u = k+1]) - e^{-\alpha u} \frac{(\alpha u)^{k+1}}{(k+1)!} \right) + \sum_{j=k+2}^{+\infty} \left( \mathbb{P}([N_u = j]) - e^{-\alpha u} \frac{(\alpha u)^j}{j!} \right) s^{j-(k+1)} = 0 \quad (**)$$



- Démontrons :  $\lim_{s \rightarrow 0} \sum_{j=k+2}^{+\infty} \left( \mathbb{P}([N_u = j]) - e^{-\alpha u} \frac{(\alpha u)^j}{j!} \right) s^{j-(k+1)} = 0$ .

× Tout d'abord :

$$\sum_{j=k+2}^{+\infty} \left( \mathbb{P}([N_u = j]) - e^{-\alpha u} \frac{(\alpha u)^j}{j!} \right) s^{j-(k+1)} = \frac{1}{s^{k+1}} \sum_{j=k+2}^{+\infty} \left( \mathbb{P}([N_u = j]) - e^{-\alpha u} \frac{(\alpha u)^j}{j!} \right) s^j$$

× De plus, pour tout  $j \in \mathbb{N}^*$  :

$$0 \leq \mathbb{P}([N_u = j]) \leq 1$$

De même, en notant  $Z$  une v.a.r. de loi  $\mathcal{P}(\lambda u)$  :

$$0 \leq \mathbb{P}([Z = j]) \leq 1$$

$$\parallel$$

$$e^{-\alpha u} \frac{(\alpha u)^j}{j!}$$

On en déduit :

$$0 \leq e^{-\alpha u} \frac{(\alpha u)^j}{j!} \leq 1$$

Donc :

$$-1 \leq \mathbb{P}([N_u = j]) - e^{-\alpha u} \frac{(\alpha u)^j}{j!} \leq 1$$

Ainsi, comme  $s^j \geq 0$  :

$$-s^j \leq \left( \mathbb{P}([N_u = j]) - e^{-\alpha u} \frac{(\alpha u)^j}{j!} \right) s^j \leq s^j$$

- × Or les séries  $\sum_{j \geq k+2} \left( \mathbb{P}([N_u = j]) - e^{-\alpha u} \frac{(\alpha u)^j}{j!} \right) s^j$  et  $\sum_{j \geq k+2} s^j$  sont convergentes. En effet,  $\sum_{j \geq k+2} s^j$  est une série géométrique de raison  $s \in ]-1, 1[$ . On en déduit :

$$- \sum_{j=k+2}^{+\infty} s^j \leq \sum_{j=k+2}^{+\infty} \left( \mathbb{P}([N_u = j]) - e^{-\alpha u} \frac{(\alpha u)^j}{j!} \right) s^j \leq \sum_{j=k+2}^{+\infty} s^j$$

× Par ailleurs :

$$\sum_{j=k+2}^{+\infty} s^j = \sum_{j=0}^{+\infty} s^{j+(k+2)} = s^{k+2} \sum_{j=0}^{+\infty} s^j = s^{k+2} \frac{1}{1-s}$$

On en déduit :

$$-s^{k+2} \frac{1}{1-s} \leq \sum_{j=k+2}^{+\infty} \left( \mathbb{P}([N_u = j]) - e^{-\alpha u} \frac{(\alpha u)^j}{j!} \right) s^j \leq s^{k+2} \frac{1}{1-s}$$

Enfin :

$$-\frac{s}{1-s} \leq \frac{1}{s^{k+1}} \sum_{j=k+2}^{+\infty} \left( \mathbb{P}([N_u = j]) - e^{-\alpha u} \frac{(\alpha u)^j}{j!} \right) s^j \leq \frac{s}{1-s}$$

- × Or :  $\lim_{s \rightarrow 0} \frac{s}{1-s} = 0$ . Ainsi, par théorème d'encadrement :

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s^{k+1}} \sum_{j=k+2}^{+\infty} \left( \mathbb{P}([N_u = j]) - e^{-\alpha u} \frac{(\alpha u)^j}{j!} \right) s^j = 0$$

D'où :

$$\lim_{s \rightarrow 0} \sum_{j=k+2}^{+\infty} \left( \mathbb{P}([N_u = j]) - e^{-\alpha u} \frac{(\alpha u)^j}{j!} \right) s^{j-(k+1)} = 0$$

- En passant à la limite quand  $s$  tend vers 0 dans (\*\*), on obtient alors :

$$\mathbb{P}([N_u = k + 1]) - e^{-\alpha u} \frac{(\alpha u)^{k+1}}{(k + 1)!} + 0 = 0$$

Ainsi :

$$\mathbb{P}([N_u = k + 1]) - e^{-\alpha u} \frac{(\alpha u)^{k+1}}{(k + 1)!}$$

D'où  $\mathcal{P}(k + 1)$ .

Par principe de récurrence :  $\forall k \in \mathbb{N}, \mathbb{P}([N_u = k]) = e^{-\alpha u} \frac{(\alpha u)^k}{k!}$ .

Comme de plus  $N_u(\Omega) \subset \mathbb{N}$ , on en déduit :  $N_u \leftrightarrow \mathcal{P}(\alpha u)$ .

□

Une famille de variables aléatoires ayant les mêmes caractéristiques que la famille  $(N_t)_{t \geq 0}$  est un **processus de Poisson** et la constante  $\alpha$  s'appelle le **paramètre** du processus de Poisson.

**17.** Soit  $T$  la variable aléatoire désignant la date de la première panne. Soit  $t > 0$ .

Comparer les événements  $[T > t]$  et  $[N_t = 0]$ .

En déduire que  $T$  suit la loi exponentielle de paramètre  $\alpha$ .

*Démonstration.*

- On remarque :

L'événement  $[T > t]$  est réalisé

$\Leftrightarrow$  la date de la 1<sup>ère</sup> panne est strictement postérieure à l'instant  $t$

$\Leftrightarrow$  il n'est survenu aucune panne avant l'instant  $t$

$\Leftrightarrow$  l'événement  $[N_t = 0]$  est réalisé

On en déduit :  $[T > t] = [N_t = 0]$ .

- Tout d'abord, la v.a.r.  $T$  est à valeurs positives d'après l'énoncé. Ainsi :  $T(\Omega) \subset \mathbb{R}_+$ . De plus, comme  $N_0 = 0$ , il ne survient aucune panne à l'instant 0.

D'où :  $T(\Omega) \subset \mathbb{R}_+^*$ .

- Soit  $t \in \mathbb{R}$ . Deux cas se présentent :

× si  $t \leq 0$ , alors  $[T \leq t] = \emptyset$  (car  $T(\Omega) \subset \mathbb{R}_+^*$ ). D'où :

$$F_T(t) = \mathbb{P}([T \leq t]) = \mathbb{P}(\emptyset) = 0$$

× si  $t > 0$ , alors :

$$\begin{aligned} F_T(t) &= \mathbb{P}([T \leq t]) \\ &= 1 - \mathbb{P}([T > t]) \\ &= 1 - \mathbb{P}([N_t = 0]) && \text{(d'après ce qui précède)} \\ &= 1 - e^{-\alpha t} \frac{(\alpha t)^0}{0!} && \text{(d'après la question précédente)} \\ &= 1 - e^{-\alpha t} \end{aligned}$$

$$\text{Finalement : } F_t : t \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq 0 \\ 1 - e^{-\alpha t} & \text{si } t > 0 \end{cases} .$$

On reconnaît la fonction de répartition d'une v.a.r. de loi  $\mathcal{E}(\alpha)$ . Or la fonction de répartition caractérise la loi.

On en déduit :  $T \leftrightarrow \mathcal{E}(\alpha)$ .

□

18. Pour  $t$  positif fixé, on pose pour  $h$  réel positif,  $\tilde{N}_h = N_{t+h} - N_t$ .

a) Montrer que  $\tilde{N}_h$  est la variable aléatoire qui représente le nombre de pannes survenues dans l'intervalle de temps  $]t, t + h]$ .

*Démonstration.*

Soit  $t \geq 0$ . Soit  $h \geq 0$ .

Par définition de  $\tilde{N}_h$  :

$$\tilde{N}_h = N_{t+h} - N_t$$

Or :

× la v.a.r.  $N_t$  est le nombre de pannes survenues dans l'intervalle  $[0, t]$ ,

× la v.a.r.  $N_{t+h}$  est le nombre de pannes survenues dans l'intervalle  $[0, t + h]$ .

On en déduit que  $\tilde{N}_h$  est le nombre de panne survenues dans l'intervalle  $]t, t + h]$ .

□

b) Montrer que la famille  $(\tilde{N}_h)_{h \geq 0}$  est un processus de Poisson de paramètre  $\alpha$ .

*Démonstration.*

• D'après l'énoncé,  $(\tilde{N}_h)_{h \geq 0}$  est un processus de Poisson de paramètre  $\alpha$  s'il vérifie les mêmes propriétés que la famille  $(N_t)_{t \geq 0}$  (en début de Partie III). Vérifions ces 4 points.

• Tout d'abord :

$$\tilde{N}_0 = N_{t+0} - N_t = 0$$

$$\tilde{N}_0 = 0$$

De plus, comme les accroissements du processus  $(N_t)_{t \geq 0}$  sont stationnaires, pour tout  $h > 0$ ,  $\tilde{N}_h = N_{t+h} - N_t$  suit la même loi que  $N_{(t+h)-t} = N_h$ . Ainsi :

$$\mathbb{P}(\tilde{N}_h = 0) = \mathbb{P}(N_h = 0)$$

Comme  $h > 0$ , alors :  $0 < \mathbb{P}(N_h = 0) < 1$ .

Ainsi :  $0 < \mathbb{P}(\tilde{N}_h = 0) < 1$ .

• Soit  $(h_0, h_1, \dots, h_n) \in (\mathbb{R}_+)^{n+1}$  tel que :  $0 \leq h_0 < h_1 < \dots < h_n$ . Démontrons que les v.a.r.  $\tilde{N}_{h_0}, \tilde{N}_{h_1} - \tilde{N}_{h_0}, \dots, \tilde{N}_{h_n} - \tilde{N}_{h_{n-1}}$  sont mutuellement indépendantes.

× Soit  $i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ .

$$\tilde{N}_{h_{i+1}} - \tilde{N}_{h_i} = (N_{t+h_{i+1}} - \cancel{N_t}) - (N_{t+h_i} - \cancel{N_t}) = N_{t+h_{i+1}} - N_{t+h_i}$$

On cherche donc à démontrer que les v.a.r.  $N_{t+h_0} - N_t, N_{t+h_1} - N_{t+h_0}, \dots, N_{t+h_n} - N_{t+h_{n-1}}$  sont mutuellement indépendantes.

× Or les accroissements du processus  $(N_t)_{t \geq 0}$  sont indépendants, *i.e.* pour tout  $(t_0, \dots, t_n) \in (\mathbb{R}_+)^{n+1}$  tels que  $0 \leq t_0 < t_1 < \dots < t_n$ , les v.a.r.  $N_{t_0}, N_{t_1} - N_{t_0}, \dots, N_{t_n} - N_{t_{n-1}}$  sont mutuellement indépendantes.

× On pose alors :

$$\begin{cases} t_0 = t \\ \forall i \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket, t_i = t + h_{i-1} \end{cases}$$

On obtient que les v.a.r.  $N_t, N_{t+h_0} - N_t, N_{t+h_1} - N_{t+h_0}, \dots, N_{t+h_n} - N_{t+h_{n-1}}$  sont mutuellement indépendantes.

On en déduit que les accroissements du processus  $(\tilde{N}_h)_{h \geq 0}$  sont indépendants.

• Soit  $(h, h') \in (\mathbb{R}_+)^2$ .

× On remarque :

$$\tilde{N}_{h'} - \tilde{N}_h = (N_{t+h'} - \cancel{N_t}) - (N_{t+h} - \cancel{N_t}) = N_{t+h'} - N_{t+h}$$

Or les accroissements du processus  $(N_t)_{t \geq 0}$  sont stationnaires. On en déduit que la v.a.r.  $N_{t+h'} - N_{t+h}$  suit la même loi que la v.a.r.  $N_{(t+h')-(t+h)} = N_{h'-h}$ .

× De plus d'après le premier point de cette question, la v.a.r.  $N_{h'-h}$  suit la même loi que la v.a.r.  $\tilde{N}_{h'-h}$ . Ainsi la v.a.r.  $\tilde{N}_{h'} - \tilde{N}_h$  suit la même loi que la v.a.r.  $\tilde{N}_{h'-h}$ .

On en déduit que les accroissements du processus  $(\tilde{N}_h)_{h \geq 0}$  sont stationnaires.

• Soit  $h > 0$ . Toujours en remarquant que les v.a.r.  $\tilde{N}_h$  et  $N_h$  ont la même loi, on obtient :

$$\frac{\mathbb{P}(\tilde{N}_h > 1)}{h} = \frac{\mathbb{P}(N_h > 1)}{h}$$

Or, comme  $(N_t)_{t \geq 0}$  est un processus de Poisson :  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\mathbb{P}(N_h > 1)}{h} = 0$ .

On obtient :  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\mathbb{P}(\tilde{N}_h > 1)}{h} = 0$ .

Finalement, la famille  $(\tilde{N}_h)_{h \geq 0}$  est bien un processus de Poisson. □

c) En déduire que la première panne survenant après la date  $t$  se produit à une date suivant la loi exponentielle de paramètre  $\alpha$ .

*Démonstration.*

Soit  $t \geq 0$ .

- On note  $T_t$  la v.a.r. désignant la date de la 1<sup>ère</sup> panne après l'instant  $t$ .
- Soit  $h > 0$ .

- ↳ L'événement  $[T_t > h]$  est réalisé
- ⇔ la 1<sup>ère</sup> panne après l'instant  $t$  survient après avoir attendu (au moins) un temps  $h$  supplémentaire
- ⇔ la date de la 1<sup>ère</sup> panne après l'instant  $t$  est strictement postérieure à l'instant  $t + h$
- ⇔ il n'est survenu aucune panne dans l'intervalle  $]t, t + h]$

Or, d'après **18.a)**, la v.a.r.  $\tilde{N}_h$  correspond au nombre de pannes survenues dans l'intervalle de temps  $]t, t + h]$ . Ainsi :

- L'événement  $[T_t > h]$  est réalisé  
 $\Leftrightarrow$  il n'est survenu aucune panne dans l'intervalle  $]t, t + h]$   
 $\Leftrightarrow$  l'événement  $[\tilde{N}_h = 0]$  est réalisé

On en déduit :  $\forall h > 0, [T_t > h] = [\tilde{N}_h = 0]$ .

- De plus, la famille  $(\tilde{N}_h)_{h \geq 0}$  est un processus de Poisson de paramètre  $\alpha$  d'après la question précédente. On déduit alors de la question **16.d)** :

$$\tilde{N}_h \hookrightarrow \mathcal{P}(\alpha h)$$

- Ainsi, avec un raisonnement identique à celui de la question **17.** (la v.a.r.  $T_t$  joue le rôle de la v.a.r.  $T$  et le processus  $(\tilde{N}_h)_{h \geq 0}$  joue le rôle du processus  $(N_t)_{t \geq 0}$ ), on en déduit :  $T_t \hookrightarrow \mathcal{E}(\alpha)$ .

Autrement dit, la date de la première panne survenant après l'instant  $t$  suit une loi  $\mathcal{E}(\alpha)$ .

□

- d)** En déduire que le processus de Poisson a la propriété que, pour chaque date  $t$  donnée, le taux de défaillance du système après  $t$  est constant.

*Démonstration.*

Soit  $t \geq 0$ .

- D'après la question précédente :  $T_t \hookrightarrow \mathcal{E}(\alpha)$ .
- Ainsi, d'après la question **9.a)**, son taux de défaillance  $\lambda_{T_t}$  est la fonction :

$$\lambda_{T_t} : x \mapsto \alpha$$

Autrement dit, pour tout  $t \geq 0$ , le taux de défaillance du système après l'instant  $t$  est constant égal à  $\alpha$ .

□