Exercice 1 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère trois urnes contenant chacune n boules numérotées de 1 à n. On tire une boule au hasard dans chacune de ces trois urnes. On note X_n la variable aléatoire égale à la somme des trois numéros obtenus.

Compléter la fonction **Python** qui suit pour qu'elle renvoie une simulation de X_n.

```
def simulX(n):
    tirages = rd.randint( 1 , n+1 , 3 )
    return np.sum(tirage)
```

Expliquer ce que renvoie la fonction `mystere(n)` écrite ci-dessous. On citera le ou les résultat(s) du cours utilisé(s) et on justifiera leur utilisation.

```
def mystere(n):
    E = np.zeros(10**5)
    for k in range(10**5):
        E[k] = simulX(n)
    return np.mean(E)
```

- La fonction `mystere(n)` simule un N-échantillon de X_n (où $N = 10^5$) et renvoie une réalisation de la moyenne empirique associée à ce N-échantillon.
- D'après la loi faible des grands nombres (valide car X_n est finie donc admet une variance), la fonction `mystere(n)` renvoie donc une approximation de $\mathbb{E}(X_n)$.

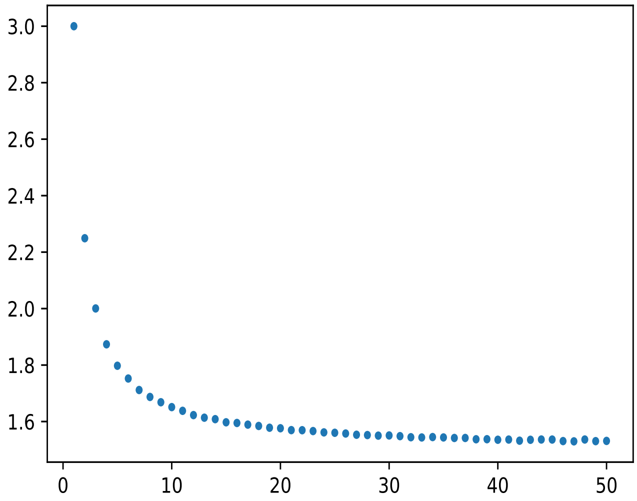
Compléter la fonction suivante pour qu'elle renvoie une approximation de la probabilité $\mathbb{P}([X_n \geq n])$.

```
def approx(n):
    S = 0
    for k in range(10**4):
        if simulX(n) >= n :
            S += 1
    return S / 10**4
```

On exécute le script suivant :

```
Xabs = [n for n in range(1,51)]
Yord = [mystere(n)/n for n in Xabs]
plt.plot(Xabs, Yord, '.')
```

et on obtient la figure représentée à la page suivante.



Que peut-on conjecturer ?

- Ce graphique représente l'approximation trouvée grâce à la fonction `mystere(n)` de $\dfrac{\mathbb{E}(X_n)}{n}$ pour n variant de 1 à 50.
- Par lecture du graphique, on conjecture que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\mathbb{E}(X_n)}{n} = 1,5 = \dfrac{3}{2}$.
- Ainsi, on peut conjecturer que $\mathbb{E}(X_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{3n}{2}$.

(Question facultative) En écrivant X_n à l'aide d'autres variables aléatoires, calculer $\mathbb{E}(X_n)$ et démontrer la conjecture.