# Colles de Mathématiques en E2A
# v.a.r. à densité
# Semaine 17 : 20-24 janvier

Toutes les définitions et tous les énoncés de théorèmes/propositions du cours sont exigibles des élèves. Les démonstrations des théorèmes du cours ne sont pas exigibles, sauf si elles apparaissent en question de cours.

On pourra à tout moment demander à un·e élève de donner la nature (réel, suite, fonction, ensemble, proposition, etc) d'une expression manipulée dans un exercice, pour vérifier sa bonne compréhension. On pourra aussi demander de préciser quelles sont les variables libres et quelles sont les variables liées (muettes).

On portera une attention toute particulière à ce que les objets soient correctement introduits avant d'être utilisés, et ne soient pas introduits pour rien.

## 1 Chapitre XIV : v.a.r. à densité

Il y a un gros effort à fournir sur ce chapitre pour réussir à manipuler les fonctions définies par morceaux :

- Savoir calculer leurs intégrales.
- Savoir trouver des formules quand on les compose avec d'autres fonctions (utile pour calculer des fonctions de répartition de transformée de v.a.r. ).

| Formulaire des lois usuelles à connaître par coeur pour les lois uniformes, exponentielles et normales. |
|---|

### 1.1 Définitions

- Fonction de répartition d'une v.a.r. (rappel).
- Trois définitions différentes à ne pas confondre :
  1. $X$ est une v.a.r. à densité.
  2. $f$ est une densité de $X$, où $X$ est une v.a.r. à densité.
  3. $f$ est une densité de probabilité.
- Espérance d'une v.a.r. à densité : $\mathbb{E}(X) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x\ f(x)\ dx$.
- Moment d'ordre 2 d'une v.a.r. à densité : $\mathbb{E}(X^2) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x^2\ f(x)\ dx$ et, plus généralement, moments d'ordre $r$.
- Variance d'une v.a.r. à densité : $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}\left((X - \mathbb{E}(X))^2\right)$.
- Variable à densité centrée et réduite.
- Loi uniforme sur un intervalle borné, loi exponentielle.
- Lois normales.

## 1.2 Résultats

- Si $X$ est à densité : $\forall x \in \mathbb{R},\ \mathbb{P}([X = x]) = 0$.
- Calcul de probabilités à l'aide d'une fonction de répartition pour une v.a.r. à densité :

$$\begin{array}{rcl} F_X(b) - F_X(a) & = & \mathbb{P}([a < X \leq b]) \\ & = & \mathbb{P}([a \leq X < b]) \\ & = & \mathbb{P}([a \leq X \leq b]) \\ & = & \mathbb{P}([a < X < b]) \end{array}$$

- Formule fondamentale (calcul de la fonction de répartition à l'aide d'une densité) :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \boxed{F_X(x) \ = \ \mathbb{P}([X \leq x]) \ = \ \int_{-\infty}^{x} f(t)\ \mathrm{d}t}$$

  et ses conséquences (autres formules du théorème).
- La transformée affine d'une v.a.r. à densité est une v.a.r. à densité (à savoir redémontrer).
- Théorème de transfert.
- Propriétés de l'espérance et de la variance.
- Formule de Kœnig-Huygens : $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2$.
- La transformée affine d'une v.a.r. qui suit une loi uniforme est encore une v.a.r. qui suit une loi uniforme (à savoir redémontrer).
- La transformée affine d'une v.a.r. qui suit une loi normale est encore une v.a.r. qui suit une loi normale.
- La somme de v.a.r. indépendantes qui suivent des lois normales est encore une v.a.r. qui suit une loi normale.

## 1.3 Méthodes

On renvoie aux détails du cours pour la marche à suivre. Il faut maîtriser les méthodes suivantes (et les schémas de rédaction qui vont avec) :

1. Montrer qu'une v.a.r. $X$ est une v.a.r. à densité via sa fonction de répartition (très important).
2. Déterminer une densité à partir de la fonction de répartition (très important).
3. Déterminer la fonction de répartition à partir d'une densité (très important).
4. Démontrer qu'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une densité de probabilité (très important).
5. Montrer qu'une fonction $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction de répartition (peu important, à ne travailler que quand tout le reste est compris et maîtrisé).

De nombreux exercices font travailler sur des transformées de v.a.r. à densité. Il faut maîtriser les techniques vues en cours dans les exemples suivants :

1. Transformation affine : $Y = aX + b$ avec $a \neq 0$.
2. Transformation au carré : $Y = X^2$.
3. Transformation exponentielle : $Y = \mathrm{e}^X$.
4. Transformation usuelle : $Y = -\frac{1}{\lambda} \ln(1 - U)$ avec $U \hookrightarrow \mathcal{U}([0, 1[)$ et $\lambda > 0$.
5. Transformation via la valeur absolue : $Y = |X|$ (penser à la formule des probabilités totales dès que l'on doit séparer des cas). *(plus difficile)*
6. Transformation via la partie entière : $Y = \lfloor X \rfloor$ (on obtient alors une v.a.r. discrète).

7. Minimum et maximum de plusieurs v.a.r. indépendantes de même loi : $Y_n = \min(X_1, \dots, X_n)$ et $Z_n = \max(X_1, \dots, X_n)$.
8. Somme de deux v.a.r. à densité (hors programme et plus difficile, il faut donner le résultat de convolution si on veut poser un exo dessus) : $Y = U + V$.

Il faut connaître par cœur les rédactions usuelles pour montrer qu'une v.a.r. définie à l'aide d'autres v.a.r. admet une espérance :

1. Si par exemple $Z = 2X + 5$, on écrira : la v.a.r. $Z$ admet une espérance car elle est la transformée affine d'une v.a.r. qui admet une espérance.
2. Si par exemple $Z = \sum_{k=1}^{n} X_k$, on écrira : la v.a.r. $Z$ admet une espérance en tant que somme / combinaison linéaire de v.a.r. qui admettent chacune une espérance.

Il faut également connaître par coeur les rédactions usuelles pour montrer qu'une v.a.r. admet une espérance / variance à l'aide d'une densité :

1. La v.a.r. $X$ admet une espérance si et seulement si l'intégrale doublement impropre $\int_{-\infty}^{+\infty} t\, f(t)\, \mathrm{d}t$ est absolument convergente, ce qui revient à démontrer la convergence pour ce calcul de moment.
2. La v.a.r. $X$ admet une variance si et seulement si l'intégrale doublement impropre $\int_{-\infty}^{+\infty} t^2\, f(t)\, \mathrm{d}t$ est absolument convergente, ce qui revient à démontrer la convergence pour ce calcul de moment.

# 2 Chapitre XV : Fonctions de deux variables

L'objet de ce chapitre est de fournir des outils pour trouver les extrema locaux d'une fonction de deux variables. Les résultats doivent être pensés comme des généralisations de ceux connus pour les fonctions d'une variable. La grosse différence entre les fonctions d'une variable et les fonctions de deux variables, c'est qu'on ne peut plus utiliser les concepts de croissance ou de décroissance pour les fonctions de deux variables. Adieu donc les tableaux de variations pour ces fonctions, qui nous permettaient de visualiser (et trouver) facilement les extrema.

## 2.1 Définitions

- Vocabulaire de topologie : distance euclidienne, boule ouverte, boule fermée, partie bornée, partie fermée, partie ouverte. Aucune preuve n'est exigible. L'énoncé doit donner la nature d'une partie de $\mathbb{R}^2$. Ce vocabulaire est uniquement introduit pour pouvoir formuler correctement les théorèmes du cours, mais aucune question ne doit porter dessus excepté une éventuelle représentation graphique d'un ouvert $U$ très simple (cf exemples du cours).
- Graphe et lignes de niveaux d'une fonction de deux variables.
- Fonction de deux variables continue / de classe $\mathcal{C}^1$ / de classe $\mathcal{C}^2$ sur une partie $D$ de $\mathbb{R}^2$.
- Dérivées partielles d'ordre 1 : $\partial_1(f)$ et $\partial_2(f)$. Gradient de $f$. Notion de point critique. DL à l'ordre 1.
- Dérivée partielle d'ordre 2 : $\partial^2_{11}(f)$, $\partial^2_{21}(f)$, $\partial^2_{12}(f)$, $\partial^2_{22}(f)$. Matrice hessienne de $f$. Notion de point col / point selle.
- Maximum local/global, minimum local/global, extremum local/global.

## 2.2 Résultats

- Les fonctions polynomiales sont de classe $C^2$ sur $\mathbb{R}^2$.

- Stabilité de la classe $C^0$ (applications continues), $C^1$ ou $C^2$ par opérations algébriques et par composition.
- Formule de Taylor-Young à l'ordre 1.
- Condition nécessaire d'extremum local en un point $(x_0, y_0)$ d'un ouvert.
  Analogue en 1D : si $f$ est dérivable sur un intervalle $I$ ouvert et si $f$ admet un extremum local en $x_0 \in I$, alors $f'(x_0) = 0$.
- Théorème de Schwarz. Conséquence : la hessienne est une matrice symétrique donc diagonalisable.
- Condition suffisante d'extremum local en un point critique.
  Analogue en 1D : si $f$ est $C^2$ sur un intervalle $I$ ouvert, si $x_0 \in I$ est un point critique de $f$ (*i.e.* $f'(x_0) = 0$) et si $f''(x_0) > 0$ (resp. $f''(x_0) < 0$), alors $x_0$ est un minimum (resp. maximum) local de $f$.

### 2.3 Méthodes

- Il faut savoir déterminer les points critiques de $f$ en raisonnant par équivalence.
- Si $(a, b)$ est un point critique, il faut être capable de déterminer le signe des valeurs propres de la hessienne au point $(a, b)$ (deux cas possibles : soit par calcul explicite, soit par calcul de la somme et du produit). Si une des valeurs propres est nulle, on se laisse guider par l'énoncé et on regarde un équivalent au voisinage du point critique de $f(x, y) - f(a, b)$ pour trouver une éventuelle alternance de signe.

## 3 Questions de cours

1. Soit $f : (x, y) \mapsto xy - e^x \ln(y)$ définie sur $U = \mathbb{R} \times ]0, +\infty[$. Démontrer avec précision que la fonction $f$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $U$.
2. Soit $f : (x, y) \mapsto \frac{x}{y^2} + y^2 + \frac{1}{x}$ définie sur $U = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$. On admet que $f$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $U$. Montrer que $f$ admet exactement un point critique : le point $(1, 1)$.
3. Déterminer puis étudier les points critiques de $f : (x, y) \mapsto xy$.
4. Soit $f : (x, y) \mapsto x^3 + y^3 - 3xy$. On admet que $f$ admet exactement deux points critiques : les points $(0, 0)$ et $(1, 1)$. Vérifier que $f$ ne présente un extremum local qu'en un de ses points critiques et préciser sa nature et sa valeur.