Exercices de cours

Exercice 1 : On considère une personne qui aime travailler à son bureau et dans son jardin. Si cette personne travaille à son bureau, la probabilité qu'elle aille travailler dans son jardin l'heure suivante est égale à $0,6$. Si au contraire elle travaille dans son jardin, la probabilité qu'elle aille travailler à son bureau l'heure suivante est égale à $0,3$. Représenter le graphe probabiliste associé à ce système aléatoire.

Exercice 2 : On reprend l'exo précédent. On numérote les états : `bureau = 1` et `jardin = 2`. On suppose que la personne travaille initialement au bureau. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note X_n la v.a.r. égale à l'état dans lequel se situe le système à l'instant n. En particulier, on a $X_0 = 1$.

1. Justifier que (X_n) est une chaîne de Markov.
2. Déterminer la matrice de transition de cette chaîne de Markov.
3. On note, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\alpha_n = \mathbb{P}([X_n = 1])$.
   (a) Exprimer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}([X_n = 2])$ en fonction de α_n.
   (b) Déterminer une relation de récurrence entre α_{n+1} et α_n.
   (c) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}([X_n = 1])$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}([X_n = 2])$.

Exercice 3 : Soit $M = \begin{pmatrix} 0 & 0,2 & 0,8 \\ 0,3 & 0,3 & 0,4 \\ 0,8 & 0,1 & 0,1 \end{pmatrix}$ une matrice de transition. Tracer le graphe probabiliste associé à cette matrice.

Exercice 4 : On considère un·e élève qui souhaite revoir l'intégralité de `GoT` pendant sa période de révisions avant les écrits.

- Après une heure de travail, la probabilité que l'élève aille voir un épisode est égale à $0,8$.
- Après un épisode, la probabilité que l'élève retourne travailler est égale à $0,2$.

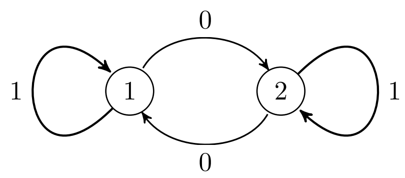
On note $V_0 = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{1,2}(\mathbb{R})$ l'état initial.

1. Tracer le graphe probabiliste associé à cette chaîne de Markov, que l'on notera (X_n).
2. Ecrire la matrice de transition M.
3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer le n^{e} état probabiliste V_n.
4. En déduire un état stable π.
5. Conclure sur le caractère raisonnable d'une telle entreprise.

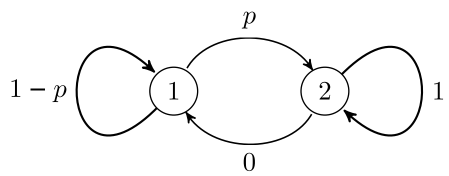
Chaînes de Markov à deux états

Observons qu'il n'y a que 3 cas de chaînes de Markov à 2 états :

- **Cas n°1**. Deux états *absorbants*.
  Auquel cas la chaîne est presque sûrement constante égale à sa valeur initiale. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = X_0$.

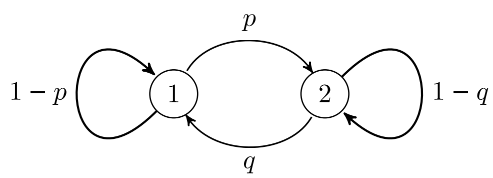


- **Cas n°2**. Un seul état absorbant.
  Soit $p \in]0;1[$. Assez intuitivement, on peut penser que (X_n) va converger en loi vers une loi certaine égale à la valeur de l'état absorbant. On observe d'ailleurs que l'état stable de la chaîne est ici $\pi = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}$.



  En effet, on voit que $(\mathbb{P}([X_n = 1]))$ est une suite géométrique de raison $1 - p$, ce qui permet d'écrire
  $$\mathbb{P}([X_n = 1]) = (1-p)^n \mathbb{P}(X_0 = 1) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0,$$
  et
  $$\mathbb{P}([X_n = 2]) = 1 - \mathbb{P}([X_n = 1]) = 1 - (1-p)^n \mathbb{P}(X_0 = 1) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 1.$$

- **Cas n°3**. Le *zappeur compulsif*.
  Soient $p, q \in]0;1[$. L'état stable de la chaîne est $\pi = \begin{pmatrix} \frac{q}{p+q} & \frac{p}{p+q} \end{pmatrix}$ et il y a convergence, peu importe les valeurs initiales.



  En effet, on peut alors montrer (voir exercice ci-dessous) que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
  $$\mathbb{P}([X_n = 1]) = (1-(p+q))^n \left(\mathbb{P}(X_0 = 1) - \frac{q}{p+q}\right) + \frac{q}{p+q} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \frac{q}{p+q}$$
  et
  $$\mathbb{P}([X_n = 2]) = (1-(p+q))^n \left(\mathbb{P}(X_0 = 2) - \frac{p}{p+q}\right) + \frac{p}{p+q} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \frac{p}{p+q}.$$

Exercice 5 : On se place dans le cas du *zappeur compulsif* ci-dessus et on note A la matrice de transition.

1. Montrer que λ est valeur propre de A si et seulement si
$$\lambda^2 - (2-(p+q))\lambda + (1-p)(1-q) - pq = 0$$
2. Déterminer alors le spectre de A. Montrer que l'état stable de la chaîne est $\pi = \begin{pmatrix} \frac{q}{p+q} & \frac{p}{p+q} \end{pmatrix}$.
3. Montrer que la suite $(\mathbb{P}([X_n = 1]))$ est arithmético-géométrique. Conclure.

Chaînes de Markov à trois états

Exercice 6 : `(Extrait de EDHEC 2010)`

Une urne contient trois boules numérotées de 1 à 3. Un tirage consiste à extraire au hasard une boule de l'urne puis à la remettre dans l'urne pour le tirage suivant.
On définit une suite de variables aléatoires $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ de la manière suivante.

- Pour tout entier naturel k non nul, X_k est définie *après* le k^{e} tirage.
- On procède au premier tirage et X_1 prend la valeur du numéro de la boule obtenue à ce tirage.
- Après le k^{e} tirage ($k \in \mathbb{N}^*$) :
  — soit X_k a pris la valeur 1, dans ce cas on procède au $(k+1)^{\text{e}}$ tirage et X_{k+1} prend la valeur du numéro obtenu à ce $(k+1)^{\text{e}}$ tirage.
  — soit X_k a pris la valeur j, différente de 1. Dans ce cas on procède également au $(k+1)^{\text{e}}$ tirage et X_{k+1} prend la valeur j si la boule tirée porte le numéro j et la valeur 1 sinon.

1. Reconnaître la loi de X_1.
2. Simulation informatique de l'expérience aléatoire décrite dans cette partie.
   On rappelle que `rd.randint(1,n+1)` simule une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[\![1,n]\!]$. Compléter le programme suivant pour qu'il simule l'expérience aléatoire décrite dans cette partie et pour qu'il affiche la valeur de la variable X_k, l'entier k étant entré au clavier par l'utilisateur.

```
k = int(input('Entrez un nombre k supérieur à 2 : '))
X = rd.randint(1,4)
for i in range(k-1):
    tirage = rd.randint(1,4)
    if X == 1:
        X = __________
    else:
        if tirage != X:
            X = ___________
print(X)
```

3. On note U_k la matrice à 1 ligne et 3 colonnes dont l'élément de la j^{e} colonne est $\mathbb{P}\big([X_k = j]\big)$.
   (a) Déterminer les probabilités $\mathbb{P}_{[X_k=i]}\big([X_{k+1} = j]\big)$, pour tout couple (i,j) de $\{1,2,3\}\times\{1,2,3\}$.
   (b) On admet que $([X_k = 1],[X_k = 2],[X_k = 3])$ est un système complet d'évènements.
   Déterminer, grâce à la formule des probabilités totales, la matrice A de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$, telle que, pour tout entier naturel k non nul, on a $U_{k+1} = U_k A$.
   (c) Montrer qu'en posant $U_0 = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\end{pmatrix}$, alors, pour tout k de $\mathbb{N}$, on a : $U_k = U_0 A^k$.
   (d) Vérifier que $A = M + \frac{1}{3} I$ où M est une matrice à déterminer, puis établir que, pour tout k de $\mathbb{N}$, on a : $A^k = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \left(\frac{1}{3}\right)^{k-j} M^j$.
   (e) On admet : $M = P^{-1}DP$ où $P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
   En déduire les 3 éléments de la première ligne de la matrice A^k, puis vérifier que la loi de X_k est donnée par :
   $$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{P}([X_k = 1]) = \frac{1}{2}\left(1 + \left(-\frac{1}{3}\right)^k\right) \quad \text{et} \quad \mathbb{P}([X_k = 2]) = \mathbb{P}([X_k = 3]) = \frac{1}{4}\left(1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^k\right)$$
   (f) Montrer que la suite (X_k) converge en loi vers une variable aléatoire X dont on donnera la loi.

(g) Calculer l'espérance $\mathbb{E}(X_k)$ de X_k.

(h) Écrire une fonction **Python**, notée `esp`, qui renvoie $\mathbb{E}(X_k)$ à l'appel de `esp(k)`.

Exercice 7 : `(sujet 0 EML 2022)` *Etude d'une marche aléatoire*

On considère trois points distincts du plan A, B et C. Le but de l'exercice est d'étudier le déplacement aléatoire d'un pion se déplaçant sur ces trois points.

A l'étape $n = 0$, on suppose que le pion se trouve sur le point A. Ensuite, le mouvement aléatoire du pion respecte les deux règles suivantes :

- le mouvement du pion de l'étape n à l'étape $n+1$ ne dépend que de la position du pion à l'étape n : il ne dépend donc pas des positions occupées aux autres étapes précédentes.
- pour passer de l'étape n à l'étape $n+1$, on suppose que le pion a une chance sur deux de rester sur place, sinon il se déplace de manière équiprobable vers l'un des deux autres points.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note :

- A_n l'événement « le pion se trouve en A à l'étape n » et $p_n = \mathbb{P}(A_n)$,
- B_n l'événement « le pion se trouve en B à l'étape n » et $q_n = \mathbb{P}(B_n)$,
- C_n l'événement « le pion se trouve en C à l'étape n » et $r_n = \mathbb{P}(C_n)$,
- $V_n = \begin{pmatrix} p_n & q_n & r_n \end{pmatrix}$ le n^{e} état de cette chaîne de Markov.

Partie I - Modélisation

1. Représenter la situation par un graphe probabiliste et expliquer pourquoi la matrice de transition est :

$$M = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$$

2. (a) Déterminer p_0, q_0, r_0, ainsi que p_1, q_1, r_1.
   (b) Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a la relation : $V_{n+1} = V_n M$.
   (c) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $V_n = V_0 M^n$.

Partie II - Calcul des puissances de la matrice M et application

3. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.
   (a) Justifier que la matrice A est diagonalisable.
   (b) Calculer $A^2 - 5A$. Quelles sont les valeurs propres possibles de A ?
   (c) Déterminer une matrice inversible P ainsi qu'une matrice diagonale D de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $A = PDP^{-1}$. On calculera la matrice P^{-1}.
   (d) Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $A^n = PD^nP^{-1}$.
4. La chaîne de Markov associée au graphe probabiliste de la question 1 a-t-elle un état stable ? Lequel ?
5. Soit $n \in \mathbb{N}$.
   (a) Démontrer que : $M^n = \dfrac{1}{3 \cdot 4^n}\begin{pmatrix} 4^n+2 & 4^n-1 & 4^n-1 \\ 4^n-1 & 4^n+2 & 4^n-1 \\ 4^n-1 & 4^n-1 & 4^n+2 \end{pmatrix}$, où M est la matrice introduite à la question 1.
   (b) Démontrer que $p_n = \dfrac{1}{3}\left(1 + \dfrac{2}{4^n}\right)$ et déterminer alors une expression de q_n et r_n.
6. Déterminer les limites respectives des suites (p_n), (q_n) et (r_n). Interpréter ces résultats.

Partie III - Nombre moyen de passages en A et temps d'attente avant le premier passage en B

7. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la variable aléatoire :

$$X_n = \begin{cases} 1 & \text{si } A_n \text{ est réalisé} \\ 0 & \text{si } \overline{A_n} \text{ est réalisé} \end{cases}$$

   (a) Interpréter la variable aléatoire $S_n = X_1 + \ldots X_n$. Quelle est la signification de l'espérance $\mathbb{E}(S_n)$?
   (b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer l'espérance de la variable aléatoire X_n.
   (c) En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le nombre moyen de passage en A entre l'étape 1 et l'étape n.

8. On définit la variable aléatoire T_B de la façon suivante : T_B est le numéro de l'étape à laquelle le pion passe pour la première fois en B, et dans le cas où le pion ne passe jamais en B, on pose $T_B = 0$.
   Le but de cette question est de déterminer la loi de la variable aléatoire T_B ainsi que son espérance.
   (a) Calculer $\mathbb{P}([T_B = 1])$ et $\mathbb{P}([T_B = 2])$.
   (b) Soit $n \in \mathbb{N}$. Exprimer l'événement $\overline{B_n}$ à l'aide des événements A_n et C_n.
   (c) Démontrer que $\mathbb{P}(B_3 \cap \overline{B_2} \cap \overline{B_1}) = \dfrac{1}{4}\mathbb{P}(\overline{B_2} \cap \overline{B_1})$. En déduire que $\mathbb{P}_{\overline{B_2}\cap\overline{B_1}}(B_3) = \dfrac{1}{4}$.

   Dans la suite de l'exercice, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note D_n l'événement $\bigcap_{k=1}^{n} \overline{B_k}$ et on admettra que : $\mathbb{P}_{D_n}(B_{n+1}) = \dfrac{1}{4}$.

   (d) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Calculer la probabilité $\mathbb{P}([T_B = k])$. En déduire la probabilité $\mathbb{P}([T_B = 0])$.
   (e) Justifier que la variable aléatoire T_B admet une espérance. Quelle est l'espérance de T_B ?

Exercice 8 : On considère la matrice M définie par :

$$M = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 6 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

1. (a) La matrice M est-elle inversible ?
   (b) Montrer que M admet trois valeurs propres $\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3$ que l'on précisera. Expliciter trois vecteurs U_1, U_2, U_3 tels que, pour tout $i \in [\![1, 3]\!]$, $E_{\lambda_i}(M) = \text{Vect}\,(U_i)$.
   (c) Justifier que la famille (U_1, U_2, U_3) forme une base de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.
   (d) Déterminer les coordonnées (α, β, γ), dans la base (U_1, U_2, U_3), du vecteur $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Une urne contient une boule rouge et deux boules blanches. On effectue dans cette urne une succession de tirages d'une boule selon le protocole suivant :

- si la boule tirée est rouge, elle est remise dans l'urne.
- si la boule tirée est blanche, elle n'est pas remise dans l'urne.

Pour tout entier i supérieur ou égal à 1, on note B_i (respectivement R_i) l'événement "on obtient une boule blanche (respectivement une boule rouge) lors du i^{e} tirage".

Pour tout entier n supérieur ou égal à 1, on note X_n le nombre de boules blanches contenues dans l'urne à l'issue du $n^{\text{ème}}$ tirage et on pose $X_0 = 2$. On admet que (X_n) est une chaîne de Markov à 3 états (notés ici 0, 1 et 2) et on note V_n son n^{e} état probabiliste.

On note enfin T_1 le numéro du tirage où l'on extrait pour la première fois une boule blanche et T_2 le numéro du tirage où l'on extrait la dernière boule blanche.

2. (a) Représenter le graphe probabiliste auquel la chaîne (X_n) est associée et préciser la matrice de transition A de celui-ci. Exprimer A en fonction de M.

(b) Justifier rigoureusement que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $V_{n+1} = V_n A$.

(c) Montrer que, pour tout entier naturel n,

$$V_n = \alpha\ {}^tU_1 + \beta\left(\frac{1}{2}\right)^n\ {}^tU_2 + \gamma\left(\frac{1}{3}\right)^n\ {}^tU_3,$$

où α, β, γ sont les réels trouvés à la Question (1d).

(d) Donner la loi de la variable X_n .

3. Calculer $\mathbb{E}(X_n)$, espérance de X_n , ainsi que sa limite lorsque n tend vers $+\infty$.
4. Reconnaître la loi de T_1.
5. Écrire les événements $[T_2 = 2]$ et $[T_2 = 3]$ à l'aide de certains des événements B_i et en déduire les valeurs des probabilités $\mathbb{P}([T_2 = 2])$ et $\mathbb{P}([T_2 = 3])$.
6. (a) Pour tout entier n supérieur ou égal à 2, écrire l'événement $[T_2 = n]$ en fonction des événements $[X_{n-1} = 1]$ et $[X_n = 0]$.

   (b) En déduire que pour tout entier n supérieur ou égal à 2, on a :

$$\mathbb{P}([T_2 = n]) = 2\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} - \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right)$$

   (c) Monter que la variable aléatoire T_2 admet une espérance et calculer $\mathbb{E}(T_2)$.

Exercice 9 : Une personne commande son dîner en ligne une fois par semaine, sur trois plateformes différentes numérotées de 1 à 3 de manière aléatoire selon le protocole suivant :

- La première semaine, chaque plateforme a la même probabilité d'être choisie ;
- La plateforme 1 étant la meilleure mais la plus chère, elle ne commande jamais deux fois de suite sur celle-ci ;
- Si elle commande une certaine semaine *via* la plateforme 1, elle commandera la semaine suivante sur 2 ou 3 avec autant de chance ;
- Si elle commande une certaine semaine *via* 2 ou 3, il y a une chance sur deux qu'elle change de plateforme la semaine suivante et dans ce cas, autant de chance de choisir une des deux autres.

On note, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, X_n la variable aléatoire qui prend pour valeur le numéro de la plateforme choisie lors de la n^e commande. On note, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, V_n le n^e état probabiliste de la chaîne, c'est à dire le vecteur ligne de $\mathcal{M}_{1,3}(\mathbb{R})$ défini par $V_n = \begin{pmatrix} \mathbb{P}([X_n = 1]) & \mathbb{P}([X_n = 2]) & \mathbb{P}([X_n = 3]) \end{pmatrix}$.

1. (a) Quelle est la loi de X_1 ? Préciser son espérance et sa variance.

   (b) Proposer une fonction Python permettant de simuler X_1.
2. Représenter le graphe probabiliste ainsi que la matrice de transition A associés à la chaîne (X_n).
3. Justifier soigneusement, en citant les résultats utilisés, que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$V_{n+1} = V_n A.$$

4. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $V_n = V_1 A^{n-1}$.
5. (a) Vérifier que $V = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ est vecteur propre de ${}^tA$. On précisera la valeur propre associée.

   (b) Les commandes

```
import numpy as np
import numpy.linalg as al
A=np.array([[0, 1/2, 1/2], [1/4, 1/2, 1/4], [1/4, 1/4, 1/2]])
B=A.transpose()
C=16*al.matrix_power(B, 2)-np.eye(3)
print(np.dot(C, B-np.eye(3)))
```

renvoient

```
[[0. ,  0. ,  0.] ,
 [0. ,  0. ,  0.] ,
 [0. ,  0. ,  0.]]
```

En déduire deux autres valeurs propres possibles de ${}^tA$.

(c) Vérifier que les deux valeurs précédentes sont bien valeurs propres de ${}^tA$, puis exhiber, en rédigeant soigneusement, une matrice D diagonale (dont les éléments diagonaux sont rangés dans l'ordre croissant) et une matrice P inversible telles que
$$ {}^tA = PDP^{-1}. $$

(d) Calculer P^{-1}.

(e) Calculer explicitement, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la matrice $({}^tA)^n$ puis A^n et en déduire la loi de X_n.

(f) Conclure que (X_n) converge en loi vers une variable Z que l'on explicitera. Établir un lien avec le vecteur V.

Chaînes de Markov à quatres états ou plus

Exercice 10 : `(extrait de HEC 2008)`

Dans tout l'exercice, N désigne un entier naturel fixé supérieur ou égal à 2, p un réel fixé de l'intervalle $]0,1[$ et $q = 1 - p$.

Dans une population de N individus, on s'intéresse à la propagation d'un certain virus.

Chaque jour, on distingue dans cette population trois catégories d'individus : en premier lieu, les individus sains, c'est-à-dire ceux qui ne sont pas porteurs du virus, ensuite les individus qui viennent d'être contaminés et qui sont inoffensifs pour les autres, et enfin, les individus contaminés par le virus et qui sont contagieux.

Ces trois catégories évoluent jour après jour selon le modèle suivant (où n est un entier naturel quelconque) :

- chaque jour n, chaque individu sain peut être contaminé par n'importe lequel des individus contagieux ce jour avec la même probabilité p, ces contaminations éventuelles étant indépendantes les unes des autres,
- un individu contaminé le jour n devient contagieux le jour $n+1$,
- chaque individu contagieux le jour n redevient sain le jour $n+1$.

On note alors X_n le nombre aléatoire d'individus contagieux le jour n. On remarquera que si, pour un certain entier naturel i, on a $X_i = 0$, alors on a aussi $X_{i+1} = 0$.

On va dans cet exercice[1] ne traiter que le cas $N = 3$ et $p = 1/3$.

On considère les matrices S et R suivantes :
$$ S = \begin{pmatrix} 9 & 4 & 4 & 9 \\ 0 & 4 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -6 & 1 \\ 1 & 0 & 5 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. $$

1. Montrer que la matrice R est inversible et calculer son inverse R^{-1}.
2. (a) Montrer que les réels -1, 0, 5 et 9 sont des valeurs propres de S.

   (b) Calculer le produit matriciel $R^{-1}SR$.

   (c) En déduire, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, l'expression de la matrice S^n.

1. Dans le sujet original dont cet exercice est extrait, on traitait également le cas général

3. Soit n un entier fixé de $\mathbb{N}$.
   (a) Déterminer la loi de probabilité conditionnelle de X_{n+1} sachant l'événement $[X_n = 0]$.
   (b) Déterminer la loi de probabilité conditionnelle de X_{n+1} sachant l'événement $[X_n = 3]$.
   (c) Vérifier que la loi de probabilité conditionnelle de X_{n+1} sachant l'événement $[X_n = 1]$. (resp $[X_n = 2]$) est la loi binomiale de paramètres $\left(2, \frac{1}{3}\right)$ (resp. $\left(1, \frac{5}{9}\right)$).
   (d) Représenter le graphe probabiliste de la chaîne de Markov (X_n) (dont les états sont 0, 1, 2 et 3).
   (e) On introduit l'*espérance conditionnelle*, notée $\mathbb{E}(X_{n+1} | [X_n = i])$, qui correspond à l'espérance de la loi de probabilité conditionnelle de X_{n+1} sachant l'événement $[X_n = i]$ *(on écrit la formule pour* $\mathbb{E}(X_{n+1})$ *en remplaçant* $\mathbb{P}$ *par* $\mathbb{P}_{[X_n=i]}$*)*.
   Déterminer les valeurs respectives de $\mathbb{E}(X_{n+1} | [X_n = 1])$ et $\mathbb{E}(X_{n+1} | [X_n = 2])$.
4. On suppose, **uniquement dans cette question**, que $X_0 \hookrightarrow \mathcal{B}\left(3, \frac{1}{3}\right)$.
   (a) Déterminer la loi de X_1 et calculer $\mathbb{E}(X_1)$.
   (b) Vérifier la formule suivante :
$$\mathbb{E}(X_1) = \sum_{i=0}^{3} \mathbb{E}(X_1 | [X_0 = i]) \mathbb{P}([X_0 = i]).$$
5. On introduit alors le vecteur ligne U_n, correspondant au n^{e} état probabiliste de la chaîne, défini par
$$U_n = \begin{pmatrix} u_n & v_n & w_n & t_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbb{P}([X_n = 0]) & \mathbb{P}([X_n = 1]) & \mathbb{P}([X_n = 2]) & \mathbb{P}([X_n = 3]) \end{pmatrix}$$
   (a) Déterminer une relation entre u_n, v_n, w_n et t_n.
   (b) A l'aide de la formule des probabilités totales appliquée au système complet d'événements $([X_n = i])_{0 \leqslant i \leqslant 3}$, déterminer une matrice M indépendante de n, telle que
$$U_{n+1} = U_n M.$$
   (c) Exprimer M en fonction de S.
   (d) Quel est l'état stable de la chaîne de Markov (X_n) ?
   (e) Donner l'expression des réels u_n, et v_n en fonction de n, v_0 et w_0.
6. On pose
$$F = \bigcup_{n=0}^{+\infty} [X_n = 0].$$
   (a) Interpréter le fait que F soit réalisé.
   (b) Montrer la convergence de la chaîne vers l'état stable, peu importe la loi suivie par X_0. Interpréter.