DS6 (vA)

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidat·es sont invité·es à ***encadrer*** *dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*
Aucun document n'est autorisé. ***L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique*** *est* ***interdite****. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*
Si au cours de l'épreuve, un candidat ou une candidate repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

On suppose, et c'est valable pour toute l'épreuve, que la librairie suivante est importée sous son alias habituel :

- `import numpy as np`
- `import numpy.linalg as al`
- `import numpy.random as rd`
- `import matplotlib.pyplot as plt`

Exercice 1

On considère l'application :

$$f : \begin{array}{ccl}]0,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \big(x+\ln(x)\big)\,\mathrm{e}^{x-1} \end{array}$$

Partie I : Étude et représentation graphique de f.

1. Montrer que f est dérivable sur $]0,+\infty[$. On note f' sa fonction dérivée.
Pour tout $x \in\,]0,+\infty[$, calculer $f'(x)$.

2. Établir : $\forall x \in\,]0,+\infty[,\ \ln(x)+\dfrac{1}{x} > 0$.

3. En déduire : $\forall x \in\,]0,+\infty[,\ x+\ln(x)+1+\dfrac{1}{x} > 0$.

4. En déduire le sens de variation de f.

5. Dresser le tableau de variation de f, comprenant la limite de f en 0 et la limite de f en $+\infty$.
Calculer $f(1)$ et $f'(1)$.

6. Tracer l'allure de $\mathcal{C}$. On précisera la tangente au point d'abscisse 1.

Partie II : Étude d'une suite récurrente associée à f.

On considère la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 2$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

7. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n existe et $u_n \geqslant 2$.

8. Établir, par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geqslant \mathrm{e}^n$.
Quelle est la limite de (u_n) ?

9. Écrire un programme en **Python** qui calcule et affiche le plus petit entier naturel n tel que $u_n \geqslant 10^{20}$.

Partie III : Étude d'extremums locaux pour une fonction de deux variables associée à f.

On considère l'application :

$$F : \begin{array}{ccl}]0,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \displaystyle\int_1^x f(t)\,dt \end{array}$$

10. Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0,+\infty[$ et exprimer $F'(x)$, pour tout $x \in\,]0,+\infty[$, à l'aide de $f(x)$.

On considère l'application de classe $\mathcal{C}^2$:

$$G : \begin{array}{ccl}]0,+\infty[\ \times\ ]0,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ (x\ ,\ y) & \mapsto & F(x)+F(y)-2\,\mathrm{e}^{\frac{x+y}{2}} \end{array}$$

11. Exprimer les dérivées partielles premières $\partial_1(G)(x,y)$ et $\partial_2(G)(x,y)$, pour tout $(x,y) \in\,]0,+\infty[^2$ à l'aide de $f(x)$, $f(y)$ et $\mathrm{e}^{\frac{x+y}{2}}$.

12. ***a)*** Montrer que f est bijective.

b) Établir que, pour tout $(x, y) \in]0, +\infty[^2$, (x, y) est un point critique de G si et seulement si :

$$x = y \quad \text{et} \quad x + \ln(x) = \mathrm{e}$$

13. Montrer que l'équation $x + \ln(x) = \mathrm{e}$, d'inconnue $x \in]0, +\infty[$ admet une solution et une seule, que l'on notera α, et montrer : $1 < \alpha < \mathrm{e}$.

14. Montrer que G admet un extremum local. Préciser sa nature.

Exercice 2

Soit n un entier naturel non nul.
Dans une fête foraine, un stand propose le jeu suivant : le joueur lance n fois une pièce et compte le nombre de Pile obtenus. Si ce nombre est pair, le joueur est déclaré vainqueur, et s'il est impair, il est déclaré perdant.
Si le joueur est déclaré vainqueur, il gagne 10 euros pour chaque Pile obtenu, mais s'il a perdu, il doit payer 10 euros pour chaque Pile obtenu.
En particulier, s'il n'obtient aucun Pile, il est déclaré vainqueur, mais ne remporte rien. La pièce est truquée, et à chaque lancer, la probabilité d'obtenir Pile est égale à p ($p \in]0, 1[$), et celle d'obtenir Face est de $1 - p$.
On notera X la variable aléatoire égale au nombre de Pile obtenus, et G la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur.
Enfin, on notera A l'événement : « le joueur est déclaré vainqueur » et on dira que le jeu est favorable au joueur si l'espérance mathématique de la variable aléatoire G est positive.

1. *(Informatique)* Écrire une fonction **Python** `simulG(n)` qui prend en paramètre un entier $n \in \mathbb{N}^*$ et qui simule la variable aléatoire G. On pourra utiliser le test `if (-1)**k == 1:` pour vérifier qu'un entier k est pair.

Partie I

Dans cette partie, on suppose que $n = 3$ et $p = \dfrac{2}{3}$.

2. Reconnaître la loi de X et vérifier que : $\mathbb{P}(A) = \dfrac{13}{27}$.

3. Montrer que : $G(\Omega) = \{-30, -10, 0, 20\}$, puis expliciter la loi de G.

4. Calculer l'espérance de G. Le jeu est-il favorable au joueur ?

Partie II

Dans cette partie, on revient au cas général, où n est entier naturel non nul et $p \in]0, 1[$.
Celui qui tient le stand souhaite rendre le jeu plus attractif en affichant « À ce jeu, il y a plus de gagnants que de perdants ! », et cherche donc les conditions nécessaires sur p et n pour que son affichage ne soit pas mensonger.
Soit Y la variable aléatoire définie par : $Y = (-1)^X$.
Autrement dit, Y prend la valeur 1 lorsque X prend une valeur paire, et Y prend la valeur -1 lorsque X prend une valeur impaire.

5. ***a)*** On note $Z = \dfrac{Y + 1}{2}$.

Déterminer $Y(\Omega)$, puis montrer que Z suit une loi de Bernoulli de paramètre $\mathbb{P}(A)$.

b) Démontrer que : $\mathbb{E}(Y) = 2\mathbb{P}(A) - 1$.

6. *a)* Donner la loi de X.

b) En déduire que l'on a également :

$$\mathbb{E}(Y) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

puis que : $\mathbb{E}(Y) = (1-2p)^n$.

7. Exprimer alors la valeur de $\mathbb{P}(A)$ en fonction de n et p.

8. Démontrer que :

$$\mathbb{P}(A) \geqslant \frac{1}{2} \Leftrightarrow \left[p \leqslant \frac{1}{2} \text{ OU « } n \text{ est pair »}\right]$$

Partie III

Le concepteur du jeu souhaite cependant vérifier que, tout en laissant son jeu attractif (c'est à dire en faisant en sorte que $\mathbb{P}(A) \geqslant \frac{1}{2}$), son activité soit rentable pour lui, autrement dit que le jeu soit défavorable au joueur (c'est à dire que $\mathbb{E}(G) \leqslant 0$).

9. Exprimer G en fonction de X et Y. En déduire que : $\mathbb{E}(G) = 10 \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \, k \, \mathbb{P}([X=k])$.

10. Démontrer que : $\forall k \in [\![1, n]\!],\ k \dbinom{n}{k} = n \dbinom{n-1}{k-1}$.

11. Montrer que : $\mathbb{E}(G) = -10 \, np \, (1-2p)^{n-1}$.

12. Démontrer alors que :

$$\begin{cases} \mathbb{P}(A) \geqslant \dfrac{1}{2} \\ \mathbb{E}(G) \leqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow p \leqslant \frac{1}{2}$$

13. *a)* Étudier la fonction f définie sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ par : $\forall x \in \left[0, \frac{1}{2}\right],\ f(x) = x\,(1-2x)^{n-1}$.

b) Pour une valeur de n fixée, comment le concepteur du jeu doit-il truquer sa pièce (c'est à dire quelle valeur doit-il donner à $p \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$) pour optimiser la rentabilité de son activité ?

Partie IV

Le forain décide de fixer $n = 2$ et $p = \dfrac{1}{4}$. En période estivale, il pense pouvoir compter sur la participation de 200 clients dans le journée. Avant de se décider à installer son stand, il voudrait être certain, avec un risque d'erreur inférieur à 10%, qu'il gagnera plus de 100 euros dans la journée.
Pour tout entier i compris ente 1 et 200, on note alors G_i le gain algébrique du $i^{\text{ème}}$ joueur.
On note aussi J la variable aléatoire égale au gain du forain sur toute la journée.

14. Pour tout entier $i \in [\![1, 200]\!]$, donner la loi de G_i et calculer son espérance et sa variance.

15. Exprimer la variable aléatoire J en fonction des variables aléatoires G_i.
Démontrer alors que $\mathbb{E}(J) = 500$ et $\mathbb{V}(J) = 11250$.

16. Justifier que : $\mathbb{P}\big([J \leqslant 100]\big) \leqslant \mathbb{P}\big([|J - 500| \geqslant 400]\big)$.

17. Rappeler l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, puis montrer que : $\mathbb{P}([J \leqslant 100]) \leqslant \dfrac{9}{128}$.

18. Compte tenu de ses exigences de rentabilité, le forain peut-il installer son stand ?

Partie V - Bases de données

Le forain se lance maintenant à l'international : il possède des stands dans différents pays et il gère une base de données recensant les résultats des parties effectuées.
On se place à nouveau dans la situation de la **Partie I** : $n = 3$ et $p = \dfrac{2}{3}$.
Le schéma relationnel de la base de données est :

- `Stands` (<u>id_stand</u> `(INTEGER)`, ville `(TEXT)`, pays `(TEXT)`)
- `Parties` (<u>id_partie</u> `(INTEGER)`, jour `(TEXT)`, stand `(INTEGER)`, gain_joueur `(INTEGER)`)

19. Identifier les clés primaires et les éventuelles clés étrangères de chacune des tables.

20. Écrire les commandes `SQL` permettant de créer la table `Stands`. On suppose dans la suite que les deux tables sont correctement créées et contiennent des données.

21. Donner des requêtes `SQL` permettant d'afficher :

a) La liste des gains positifs obtenus par les joueurs au stand numéro 2.

b) Toutes les lignes de la table `Parties` concernant les parties jouées en France.

c) Le gain moyen des joueurs recensés dans cette base de données.
(On admettra que la commande `AVG` permet de calculer la moyenne des valeurs présentes sur une même colonne)

22. Si la table contient suffisamment d'entrées, quelle valeur doit-on s'attendre à obtenir après exécution de la requête précédente ?

Exercice 3

Dans ce problème, on identifie une matrice de $\mathscr{M}_1(\mathbb{R})$ à un réel.
On considère deux urnes A et B contenant initialement une boule blanche et une boule noire chacune.
On procède à une suite d'épreuves, chaque épreuve consistant à tirer au hasard une boule dans chaque urne, la boule tirée dans A étant remise dans B et la boule tirée de B étant remise dans A.
Pour tout entier naturel n, on note X_n la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches présentes dans A avant la $(n+1)^{\text{e}}$ épreuve.
On pose : $a_n = \mathbb{P}(X_n = 0)$, $b_n = \mathbb{P}(X_n = 1)$, $c_n = \mathbb{P}(X_n = 2)$ et $U_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n & c_n \end{pmatrix}$.

1. ***a)*** Donner les valeurs de a_0, b_0 et c_0.

b) Déterminer la loi de X_1 et en déduire les valeurs de a_1, b_1 et c_1.

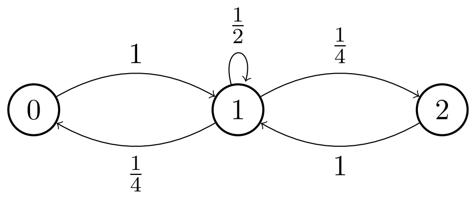
c) Justifier rapidement que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, $((X_n = 0), (X_n = 1), (X_n = 2))$ est un système complet d'événements.

d) En déduire, pour tout entier naturel n, la valeur de la somme $a_n + b_n + c_n$.

On admet dans la suite que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, les probabilités a_n, b_n et c_n sont non nulles.

2. Soit n un entier naturel non nul.

a) Déterminer, en les justifiant, les probabilités conditionnelles $\mathbb{P}_{(X_n=i)}(X_{n+1} = j)$, pour tout $(i,j) \in [\![0,2]\!]^2$, puis en déduire que le graphe suivant représente la chaîne de Markov décrite ci-dessus.



b) Écrire la matrice de transition $M = (m_{i,j})_{(i,j)\in[\![0,2]\!]^2}$, où $m_{i,j} = \mathbb{P}_{(X_n=i)}(X_{n+1} = j)$, associée à cette chaîne de Markov. On remarquera que la première ligne et la première colonne de cette matrice sont numérotées 0, la deuxième ligne et la deuxième colonne sont numérotées 1 et la troisième ligne et la troisième colonne sont numérotées 2. On vérifiera avant de poursuivre que la somme des éléments de chaque ligne de M est égale à 1.

c) Utiliser la formule des probabilités totales pour exprimer a_{n+1}, b_{n+1} et c_{n+1} en fonction de a_n, b_n et c_n.

3. Vérifier que les relations trouvées à la question ***2.c)*** restent valables pour $n = 0$.

4. ***a)*** Pour tout n de $\mathbb{N}$, exprimer $\mathbb{E}(X_{n+1})$ en fonction de b_{n+1} et c_{n+1}.

b) En déduire que, pour tout n de $\mathbb{N}$, on a $\mathbb{E}(X_{n+1}) = 1$.

c) Établir finalement la relation :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ b_n + 2c_n = 1$$

5. On pose $V = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et on considère, pour tout entier naturel n, la matrice-ligne $U_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n & c_n \end{pmatrix}$ élément de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

a) Montrer que la suite $(U_nV)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique et donner sa raison.

b) Pour tout entier naturel n, en déduire explicitement $2a_n - b_n + 2c_n$ en fonction de n.

6. Déterminer, pour tout entier naturel n, a_n, b_n et c_n puis donner la loi de X_n.

7. Montrer que la suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi vers une variable aléatoire X dont on déterminera la loi.

8. On se propose de retrouver la loi de X_n par une autre méthode.

a) Calculer M^2 et M^3, puis vérifier que $2M^3 = M^2 + M$.

b) En déduire les valeurs propres de M et donner une base de chacun de ses sous-espaces propres.

c) On pose $P = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Justifier sans calcul que P est inversible.

d) On pose $D = \begin{pmatrix} -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer MP et PD, puis conclure que M est diagonalisable.

e) Établir la relation suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ U_{n+1} = U_nM$$

f) En déduire la relation, valable pour tout entier naturel n :

$$U_n = U_0M^n$$

g) Donner, sans faire les calculs, une stratégie pour obtenir la loi de X_n à partir de cette dernière relation (on précisera les différentes étapes permettant de conclure).