DS6 (vA) - Barème

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidat·es sont invité·es à ***encadrer*** *dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*
Aucun document n'est autorisé. ***L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique*** *est* ***interdite****. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*
Si au cours de l'épreuve, un candidat ou une candidate repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

On suppose, et c'est valable pour toute l'épreuve, que la librairie suivante est importée sous son alias habituel :

- `import numpy as np`
- `import numpy.linalg as al`
- `import numpy.random as rd`
- `import matplotlib.pyplot as plt`

Exercice 1 (EML 2011)

On considère l'application :

$$f : \begin{array}{rcl}]0,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \big(x + \ln(x)\big)\ \mathrm{e}^{x-1} \end{array}$$

Partie I : Étude et représentation graphique de f.

1. Montrer que f est dérivable sur $]0,+\infty[$. On note f' sa fonction dérivée.
Pour tout $x \in]0,+\infty[$, calculer $f'(x)$.

- **1 pt : f est dérivable sur $]0,+\infty[$**
- **1 pt : $f'(x) = \left(x + \ln(x) + 1 + \dfrac{1}{x}\right) \mathrm{e}^{x-1}$**

2. Établir : $\forall x \in]0,+\infty[, \ \ln(x) + \dfrac{1}{x} > 0$.

- **3 pt par concavité de $\ln$ ou par étude de fonction**
  - × **1 pt : $\ln$ est concave donc son graphe se situe en dessous de toutes ses tangentes, en particulier sa tangente en 1**
  - × **1 pt : $\forall y > 0, \ \ln(y) \leqslant y - 1 < y$**
  - × **1 pt : choix de $y = \dfrac{1}{x}$**

3. En déduire : $\forall x \in]0,+\infty[, \ x + \ln(x) + 1 + \dfrac{1}{x} > 0$.

- **1 pt : $x + 1 > 0$ et $\ln(x) + \dfrac{1}{x} > 0$**

4. En déduire le sens de variation de f.

- **1 pt : f est strictement croissante sur $]0,+\infty[$**

5. Dresser le tableau de variation de f, comprenant la limite de f en 0 et la limite de f en $+\infty$.
Calculer $f(1)$ et $f'(1)$.

- **2 pt : tableau de variations (1 pt pour chaque limite correcte)**

x	0	$+\infty$
Signe de $f'(x)$	‖	$+$
Variations de f	‖	$-\infty \nearrow +\infty$

- **1 pt : $f(1) = 1$ et $f'(1) = 3$**

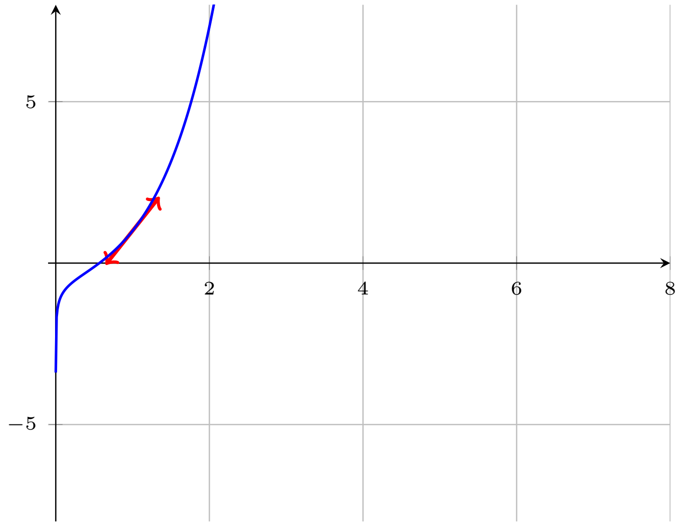
6. Tracer l'allure de $\mathcal{C}$. On précisera la tangente au point d'abscisse 1.

- **1 pt : Le graphe de f admet une tangente au point d'abscisse 1, dont l'équation est :**

$$y = f'(1)(x-1) + f(1) = 3x - 2$$

- **1 pt : tracé de la tangente en 1**
- **1 pt : monotonie respectée**

- **1 pt : limites respectées**
- **1 pt : propreté globale du dessin**



Partie II : Étude d'une suite récurrente associée à f.

On considère la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 2$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

7. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n existe et $u_n \geqslant 2$.

- **1 pt : initialisation**
- **3 pt : hérédité (1 pt pour existence bien traitée)**

8. Établir, par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geqslant \mathrm{e}^n$.
Quelle est la limite de (u_n) ?

- **1 pt : initialisation**
- **3 pt : hérédité**
- **1 pt : thm de comparaison**

9. Écrire un programme en **Python** qui calcule et affiche le plus petit entier naturel n tel que $u_n \geqslant 10^{20}$.

```
u = 2
n = 0
while u < 10**20:
    u = (u + np.log(u)) * np.exp(u-1)
    n += 1
print(n)
```

- **1 pt : initialisation de** `u` **et** `n`
- **1 pt :** `while u < 10**20:`
- **1 pt : mise à jour de** `u` **et** `n`
- **1 pt : affichage de** `n`

Partie III : Étude d'extremums locaux pour une fonction de deux variables associée à f.

On considère l'application :

$$F : \begin{array}{rcl}]0,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \displaystyle\int_1^x f(t)\, dt \end{array}$$

10. Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0,+\infty[$ et exprimer $F'(x)$, pour tout $x \in]0,+\infty[$, à l'aide de $f(x)$.

- **1 pt : $F' = f$ par thm fondamental de l'analyse**
- **1 pt : f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$ donc F est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0,+\infty[$**

On considère l'application de classe $\mathcal{C}^2$:

$$G : \begin{array}{rcl}]0,+\infty[\times]0,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto & F(x) + F(y) - 2\,\mathrm{e}^{\frac{x+y}{2}} \end{array}$$

11. Exprimer les dérivées partielles premières $\partial_1(G)(x,y)$ et $\partial_2(G)(x,y)$, pour tout $(x,y) \in]0,+\infty[^2$ à l'aide de $f(x)$, $f(y)$ et $\mathrm{e}^{\frac{x+y}{2}}$.

- **1 pt : La fonction G est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0,+\infty[\times]0,+\infty[$ donc admet des dérivées partielles d'ordre 1 sur $]0,+\infty[\times]0,+\infty[$.**
- **1 pt : $\partial_1(G)(x,y) = F'(x) + 0 - 2 \times \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{\frac{x+y}{2}} = f(x) - \mathrm{e}^{\frac{x+y}{2}}$**
- **1 pt : $\partial_2(G)(x,y) = 0 + F'(y) - 2 \times \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{\frac{x+y}{2}} = f(y) - \mathrm{e}^{\frac{x+y}{2}}$**

12. ***a)*** Montrer que f est bijective.

- **1 pt : La fonction f est :**
  - × **continue sur $]0,+\infty[$**
  - × **strictement croissante sur $]0,+\infty[$**
- **1 pt : thm de la bijection**

b) Établir que, pour tout $(x,y) \in]0,+\infty[^2$, (x,y) est un point critique de G si et seulement si :

$$x = y \quad \text{et} \quad x + \ln(x) = \mathrm{e}$$

- **1 pt : obtention de $x = y$**
- **1 pt : obtention de $x + \ln(x) = \mathrm{e}$**
- **1 pt : utilisation de f bijective au bon moment**
- **1 pt : $\mathrm{e}^x \neq 0$**

13. Montrer que l'équation $x + \ln(x) = \mathrm{e}$, d'inconnue $x \in]0,+\infty[$ admet une solution et une seule, que l'on notera α, et montrer : $1 < \alpha < \mathrm{e}$.

- **1 pt : dérivation de $h : x \mapsto x + \ln(x)$**
- **2 pt : h réalise une bijection de $]0,+\infty[$ sur $\mathbb{R}$ (1 pt pour la qualité de la rédaction)**
- **1 pt : $\mathrm{e} \in \mathbb{R}$**
- **1 pt : $1 < \alpha < \mathrm{e}$ en utilisant $h(1) < h(\alpha) < h(\mathrm{e})$ et la stricte croissance de h**

14. Montrer que G admet un extremum local. Préciser sa nature.

- **1 pt : la fonction G admet un unique point critique : le point** (α, α)
- **1 pt : la fonction G est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0,+\infty[\times]0,+\infty[$ donc admet des dérivées partielles d'ordre 2 sur $]0,+\infty[\times]0,+\infty[$**
- **1 pt :** $H = \nabla^2(G)(\alpha,\alpha) = \begin{pmatrix} f'(\alpha) - \frac{1}{2}\mathbf{e}^{\alpha} & -\frac{1}{2}\mathbf{e}^{\alpha} \\ -\frac{1}{2}\mathbf{e}^{\alpha} & f'(\alpha) - \frac{1}{2}\mathbf{e}^{\alpha} \end{pmatrix}$
- **1 pt :** $H = \begin{pmatrix} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\mathbf{e}} + \frac{1}{\alpha\mathbf{e}}\right)\mathbf{e}^{\alpha} & -\frac{1}{2}\mathbf{e}^{\alpha} \\ -\frac{1}{2}\mathbf{e}^{\alpha} & \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\mathbf{e}} + \frac{1}{\alpha\mathbf{e}}\right)\mathbf{e}^{\alpha} \end{pmatrix}$
- **2 pt : les valeurs propres de H sont :**

$$\lambda_1 = \left(1 + \frac{1}{\mathbf{e}} + \frac{1}{\alpha\mathbf{e}}\right)\mathbf{e}^{\alpha} > 0 \qquad \textbf{et} \qquad \lambda_2 = \left(\frac{1}{\mathbf{e}} + \frac{1}{\alpha\mathbf{e}}\right)\mathbf{e}^{\alpha} > 0$$

- **1 pt : les valeurs propres de H étant toutes les deux strictement positives, on en déduit que G admet un minimum local au point (α, α).**

Exercice 2 (`ECRICOME 2018`)

Soit n un entier naturel non nul.
Dans une fête foraine, un stand propose le jeu suivant : le joueur lance n fois une pièce et compte le nombre de Pile obtenus. Si ce nombre est pair, le joueur est déclaré vainqueur, et s'il est impair, il est déclaré perdant.
Si le joueur est déclaré vainqueur, il gagne 10 euros pour chaque Pile obtenu, mais s'il a perdu, il doit payer 10 euros pour chaque Pile obtenu.
En particulier, s'il n'obtient aucun Pile, il est déclaré vainqueur, mais ne remporte rien. La pièce est truquée, et à chaque lancer, la probabilité d'obtenir Pile est égale à p ($p \in]0,1[$), et celle d'obtenir Face est de $1-p$.
On notera X la variable aléatoire égale au nombre de Pile obtenus, et G la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur.
Enfin, on notera A l'événement : « le joueur est déclaré vainqueur » et on dira que le jeu est favorable au joueur si l'espérance mathématique de la variable aléatoire G est positive.

1. *(Informatique)* Écrire une fonction **Python** `simulG(n)` qui prend en paramètre un entier $n \in \mathbb{N}^*$ et qui simule la variable aléatoire G. On pourra utiliser le test `if (-1)**k == 1:` pour vérifier qu'un entier k est pair.

```
1 def simulG(n,p):
2 X = rd.binomial(n,p) # nb de Pile obtenus
3 if (-1)**X == 1:
4     return 10*X
5 else:
6     return -10*X
```

- **1 pt :** `X = rd.binomial(n,p)`
- **2 pt : lignes 4 et 6 correctes et cohérentes avec le test**

Partie I

Dans cette partie, on suppose que $n = 3$ et $p = \dfrac{2}{3}$.

2. Reconnaître la loi de X et vérifier que : $\mathbb{P}(A) = \dfrac{13}{27}$.

- **1 pt : l'expérience consiste en la succession de n épreuves de Bernoulli indépendantes et de même paramètre p**
- **1 pt : la v.a.r. X compte le nombre de succès obtenu au cours de cette expérience**
- **1 pt :** $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$
- **1 pt :** $A \ = \ [X = 0] \ \cup \ [X = 2]$
- **1 pt :** $\mathbb{P}(A) = \dfrac{13}{27}$
- **1 pt : argument d'incompatibilité**

3. Montrer que : $G(\Omega) = \{-30, -10, 0, 20\}$, puis expliciter la loi de G.

- **1 pt :** $G(\Omega) = \{-30, -10, 0, 20\}$ **en faisant la liste des cas**
- **3 pt :** $\mathbb{P}\big([G = -30]\big) = \dfrac{8}{27}$, $\mathbb{P}\big([G = -10]\big) = \dfrac{6}{27}$, $\mathbb{P}\big([G = 0]\big) = \dfrac{1}{27}$, $\mathbb{P}\big([G = 20]\big) = \dfrac{12}{27}$
(3 pt si tout est correct, sinon 1 pt par calcul correct avec un maximum de 2 pt)

4. Calculer l'espérance de G. Le jeu est-il favorable au joueur ?

- **1 pt : G admet une espérance car c'est une v.a.r. finie**
- **1 pt :** $\mathbb{E}(G) = -30 \ \mathbb{P}\big([G = -30]\big) - 10 \ \mathbb{P}\big([G = -10]\big) + 0 \ \mathbb{P}\big([G = 0]\big) + 20 \ \mathbb{P}\big([G = 20]\big)$
- **1 pt :** $\mathbb{E}(G) = -\dfrac{20}{9}$
- **1 pt : l'espérance de gain est négative donc le jeu n'est pas favorable au joueur**

Partie II

Dans cette partie, on revient au cas général, où n est entier naturel non nul et $p \in \,]0, 1[$.
Celui qui tient le stand souhaite rendre le jeu plus attractif en affichant « À ce jeu, il y a plus de gagnants que de perdants ! », et cherche donc les conditions nécessaires sur p et n pour que son affichage ne soit pas mensonger.
Soit Y la variable aléatoire définie par : $Y = (-1)^X$.
Autrement dit, Y prend la valeur 1 lorsque X prend une valeur paire, et Y prend la valeur -1 lorsque X prend une valeur impaire.

5. ***a)*** On note $Z = \dfrac{Y + 1}{2}$.

Déterminer $Y(\Omega)$, puis montrer que Z suit une loi de Bernoulli de paramètre $\mathbb{P}(A)$.

- **1 pt :** $Y(\Omega) = \{-1, 1\}$
- **1 pt :** $Z(\Omega) = \{0, 1\}$
- **1 pt :** $Z \hookrightarrow \mathcal{B}(\mathbb{P}(A))$

b) Démontrer que : $\mathbb{E}(Y) = 2\mathbb{P}(A) - 1$.

- **1 pt : Y admet une espérance car elle est finie**
- **1 pt :** $\mathbb{E}(Y) = 2\mathbb{P}(A) - 1$
- **1 pt : linéarité de l'espérance**

6. ***a)*** Donner la loi de X.

- **1 pt :** $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$

b) En déduire que l'on a également :

$$\mathbb{E}(Y) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

puis que : $\mathbb{E}(Y) = (1-2p)^n$.

- **1 pt : théorème de transfert cité**
- **1 pt :** $\mathbb{E}(Y) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$
- **1 pt : binôme de Newton pour obtenir** $\mathbb{E}(Y) = (1-2p)^n$

7. Exprimer alors la valeur de $\mathbb{P}(A)$ en fonction de n et p.

- **1 pt :** $\mathbb{P}(A) = \dfrac{1+(1-2p)^n}{2} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{(1-2p)^n}{2}$

8. Démontrer que :

$$\mathbb{P}(A) \geqslant \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \left[p \leqslant \frac{1}{2} \text{ OU « } n \text{ est pair »} \right]$$

- **1 pt :** $\mathbb{P}(A) \geqslant \dfrac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{(1-2p)^n}{2} \geqslant 0 \quad \Leftrightarrow \quad (1-2p)^n \geqslant 0$
- **1 pt :** $\mathbb{P}(A) \geqslant \dfrac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \left[p \leqslant \dfrac{1}{2} \textbf{ OU « } n \textbf{ est pair »} \right]$ **(explications pertinentes)**

Partie III

Le concepteur du jeu souhaite cependant vérifier que, tout en laissant son jeu attractif (c'est à dire en faisant en sorte que $\mathbb{P}(A) \geqslant \dfrac{1}{2}$), son activité soit rentable pour lui, autrement dit que le jeu soit défavorable au joueur (c'est à dire que $\mathbb{E}(G) \leqslant 0$).

9. Exprimer G en fonction de X et Y. En déduire que : $\mathbb{E}(G) = 10 \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \, k \, \mathbb{P}([X=k])$.

- **1 pt :** $G \; = \; 10 \; XY$
- **1 pt :** $G \; = \; 10 \; (-1)^X \; X$ **pour appliquer le thm de transfert**

10. Démontrer que : $\forall k \in [\![1,n]\!], \; k \dbinom{n}{k} = n \dbinom{n-1}{k-1}$.

- **1 pt :** $k \dbinom{n}{k} = k \; \dfrac{n!}{k! \; (n-k)!} = \dfrac{n!}{(k-1)! \; (n-k)!}$
- **1 pt :** $n \dbinom{n-1}{k-1} = n \; \dfrac{(n-1)!}{(k-1)! \; ((n-\cancel{1}) - (k-\cancel{1}))!} = \dfrac{n!}{(k-1)! \; (n-k)!}$

11. Montrer que : $\mathbb{E}(G) = -10 \; np \; (1-2p)^{n-1}$.

- **3 pt**

12. Démontrer alors que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbb{P}(A) \geqslant \dfrac{1}{2} \\ \mathbb{E}(G) \leqslant 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \; p \leqslant \frac{1}{2}$$

- **1 pt :** $\begin{cases} \mathbb{P}(A) \geqslant \dfrac{1}{2} \\ \mathbb{E}(G) \leqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (1-2p)^n \geqslant 0 \\ -10\ np\ (1-2p)^{n-1} \leqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (1-2p)^n \geqslant 0 \\ (1-2p)^{n-1} \geqslant 0 \end{cases}$
- **1 pt : étude du signe en fonction de la parité de** n

13. a) Étudier la fonction f définie sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ par : $\forall x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$, $f(x) = x\ (1-2x)^{n-1}$.

- **1 pt :** f **est dérivable sur** $[0, \frac{1}{2}]$ **car polynomiale**
- **1 pt :** $f'(x) = (1-2x)^{n-2}\ \ (1-2nx)$
- **1 pt : tableau de variations de** f

x	0		$\frac{1}{2n}$		$\frac{1}{2}$
Signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	0
Variations de f	0	$\nearrow$	$f\left(\frac{1}{2n}\right)$	$\searrow$	0

- **1 pt :** $f\left(\dfrac{1}{2n}\right) = \dfrac{1}{2n}\left(1 - \cancel{2}\ \dfrac{1}{\cancel{2}n}\right)^{n-1} = \dfrac{1}{2n}\left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^{n-1}$
- **1 pt : cas** $n = 1$ **traité à part**

b) Pour une valeur de n fixée, comment le concepteur du jeu doit-il truquer sa pièce (c'est à dire quelle valeur doit-il donner à $p \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$) pour optimiser la rentabilité de son activité ?

- **1 pt : Si** $n = 1$**, le concepteur doit choisir** $p = \dfrac{1}{2}$ **(la pièce est alors non truquée)**
- **2 pt : Si** $n \geqslant 2$**, le concepteur doit truquer la pièce de sorte que** $p = \dfrac{1}{2n}$ **(1pt pour les explications)**

Partie IV

Le forain décide de fixer $n = 2$ et $p = \dfrac{1}{4}$. En période estivale, il pense pouvoir compter sur la participation de 200 clients dans le journée. Avant de se décider à installer son stand, il voudrait être certain, avec un risque d'erreur inférieur à 10%, qu'il gagnera plus de 100 euros dans la journée.
Pour tout entier i compris ente 1 et 200, on note alors G_i le gain algébrique du $i^{\text{ème}}$ joueur.
On note aussi J la variable aléatoire égale au gain du forain sur toute la journée.

14. Pour tout entier $i \in [\![1, 200]\!]$, donner la loi de G_i et calculer son espérance et sa variance.

- **1 pt :** $G_i(\Omega) = \{-10, 0, 20\}$
- **1 pt :** $\mathbb{P}\big([G_i = -10]\big) = \dfrac{6}{16}$, $\mathbb{P}\big([G_i = 0]\big) = \dfrac{9}{16}$, $\mathbb{P}\big([G_i = 20]\big) = \dfrac{1}{16}$
- **1 pt :** $\mathbb{E}(G_i) = -\dfrac{5}{2}$
- **1 pt :** $\mathbb{E}\big(G_i^2\big) = \dfrac{125}{2}$
- **1 pt :** $\mathbb{V}(G_i) = \dfrac{225}{4}$

15. Exprimer la variable aléatoire J en fonction des variables aléatoires G_i.
Démontrer alors que $\mathbb{E}(J) = 500$ et $\mathbb{V}(J) = 11250$.

- **1 pt :** $J = -\sum\limits_{i=1}^{200} G_i$

- **1 pt :** $\mathbb{E}(J) = 500$
- **1 pt : argument de linéarité de l'espérance (sous réserve de calcul correct)**
- **1 pt :** $\mathbb{V}(J) = 11250$
- **1 pt : argument d'indépendance (sous réserve de calcul correct)**

16. Justifier que : $\mathbb{P}\big([J \leqslant 100]\big) \leqslant \mathbb{P}\big([|J-500| \geqslant 400]\big)$.

- **1 pt :** $\mathbb{P}\big([|J-500| \geqslant 400]\big) = \mathbb{P}\big([J \leqslant 100]\big) + \mathbb{P}\big([J \geqslant 900]\big)$
- **1 pt : argument d'incompatibilité**
- **1 pt :** $\mathbb{P}\big([J \leqslant 100]\big) \leqslant \mathbb{P}\big([|J-500| \geqslant 400]\big)$

17. Rappeler l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, puis montrer que : $\mathbb{P}\left([J \leqslant 100]\right) \leqslant \dfrac{9}{128}$.

- **1 pt :** $\forall \varepsilon > 0,\ \mathbb{P}\big([|X - \mathbb{E}(X)| \geqslant \varepsilon]\big) \ \leqslant\ \dfrac{\mathbb{V}(X)}{\varepsilon^2}$
- **1 pt : cette inégalité à la v.a.r.** $X = J$ **qui admet une variance (d'après la question *2.*) et à** $\varepsilon = 400 > 0$
- **1 pt :** $\dfrac{\mathbb{V}(J)}{400^2} = \dfrac{9}{128}$

18. Compte tenu de ses exigences de rentabilité, le forain peut-il installer son stand ?

- **1 pt :** $\dfrac{9}{128} \ \leqslant\ \dfrac{9}{100} < 10\%$
- **1 pt : les exigences de rentabilité sont bien réalisées : avec un risque inférieur à** 10%, **le forain gagne plus de** 100 **euros dans la journée**

Partie V - Bases de données

Le forain se lance maintenant à l'international : il possède des stands dans différents pays et il gère une base de données recensant les résultats des parties effectuées.

On se place à nouveau dans la situation de la **Partie I** : $n = 3$ et $p = \dfrac{2}{3}$.

Le schéma relationnel de la base de données est :

- `Stands` (id_stand `(INTEGER)`, ville `(TEXT)`, pays `(TEXT)`)
- `Parties` (id_partie `(INTEGER)`, jour `(TEXT)`, stand `(INTEGER)`, gain_joueur `(INTEGER)`)

19. Identifier les clés primaires et les éventuelles clés étrangères de chacune des tables.

- **1 pt : les deux clés primaires**
- **1 pt : la clé secondaire**

20. Écrire les commandes `SQL` permettant de créer la table `Stands`. On suppose dans la suite que les deux tables sont correctement créées et contiennent des données.

```
CREATE TABLE Stands(
id_stand INTEGER PRIMARY KEY,
ville TEXT,
pays TEXT)
```

- **1 pt : commande** `CREATE TABLE`
- **1 pt :** `id_stand INTEGER PRIMARY KEY`
- **1 pt : le reste**

21. Donner des requêtes `SQL` permettant d'afficher :

a) La liste des gains positifs obtenus par les joueurs au stand numéro 2.

```
SELECT gain_joueur
FROM Parties
WHERE stand = 2 and gain_joueur >= 0
```

- **1 pt : lignes `SELECT` et `FROM`**
- **1 pt : ligne `WHERE`**

b) Toutes les lignes de la table `Parties` concernant les parties jouées en France.

```
SELECT *
FROM Parties INNER JOIN Stands
ON Parties.stand = Stands.id_stand
WHERE pays = 'France'
```

- **1 pt par ligne (4pt au total)**

c) Le gain moyen des joueurs recensés dans cette base de données.
(On admettra que la commande `AVG` permet de calculer la moyenne des valeurs présentes sur une même colonne)

```
SELECT AVG(gain_joueur)
FROM Parties
```

- **1 pt**

22. Si la table contient suffisamment d'entrées, quelle valeur doit-on s'attendre à obtenir après exécution de la requête précédente ?

- **1 pt : G admet une variance**
- **1 pt : loi faible des grands nombres citée**
- **1 pt : la requête précédente renvoie une valeur approchée de $\mathbb{E}(G) = -\dfrac{20}{9}$**

Exercice 3 (EDHEC 2024)

Dans ce problème, on identifie une matrice de $\mathscr{M}_1(\mathbb{R})$ à un réel.
On considère deux urnes A et B contenant initialement une boule blanche et une boule noire chacune.
On procède à une suite d'épreuves, chaque épreuve consistant à tirer au hasard une boule dans chaque urne, la boule tirée de A étant remise dans B et la boule tirée de B étant remise dans A.
Pour tout entier naturel n, on note X_n la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches présentes dans A avant la $(n+1)^{\text{e}}$ épreuve.
On pose : $a_n = \mathbb{P}(X_n = 0)$, $b_n = \mathbb{P}(X_n = 1)$, $c_n = \mathbb{P}(X_n = 2)$ et $U_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n & c_n \end{pmatrix}$.

1. a) Donner les valeurs de a_0, b_0 et c_0.

- **1 pt : $a_0 = 0$, $b_0 = 1$ et $c_0 = 0$**

b) Déterminer la loi de X_1 et en déduire les valeurs de a_1, b_1 et c_1.

- **1 pt : lors de la première épreuve, il y a quatre issues équiprobables**
- **1 pt : explications**
- **1 pt : $a_1 = \dfrac{1}{4}$, $b_1 = \dfrac{1}{2}$ et $c_1 = \dfrac{1}{4}$**

c) Justifier rapidement que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, $((X_n = 0), (X_n = 1), (X_n = 2))$ est un système complet d'événements.

- **1 pt :** $\{0, 1, 2\} \subset X_n(\Omega)$
- **1 pt :** $X_n(\Omega) \subset \{0, 1, 2\}$

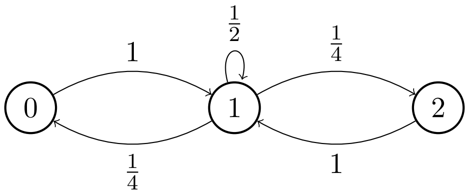
d) En déduire, pour tout entier naturel n, la valeur de la somme $a_n + b_n + c_n$.

- **1 pt : si** $n = 0$**, on a** $a_0 + b_0 + c_0 = 1$
- **1 pt : si** $n \geqslant 1$**,** $((X_n = 0), (X_n = 1), (X_n = 2))$ **est un système complet d'événements**

On admet dans la suite que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, les probabilités a_n, b_n et c_n sont non nulles.

2. Soit n un entier naturel non nul.

a) Déterminer, en les justifiant, les probabilités conditionnelles $\mathbb{P}_{(X_n=i)}(X_{n+1} = j)$, pour tout $(i, j) \in [\![0, 2]\!]^2$, puis en déduire que le graphe suivant représente la chaîne de Markov décrite ci-dessus.



- **3 pt : explications pour chaque valeur de** i

b) Écrire la matrice de transition $M = (m_{i,j})_{(i,j)\in[\![0,2]\!]^2}$, où $m_{i,j} = \mathbb{P}_{(X_n=i)}(X_{n+1} = j)$, associée à cette chaîne de Markov. On remarquera que la première ligne et la première colonne de cette matrice sont numérotées 0, la deuxième ligne et la deuxième colonne sont numérotées 1 et la troisième ligne et la troisième colonne sont numérotées 2. On vérifiera avant de poursuivre que la somme des éléments de chaque ligne de M est égale à 1.

- **1 pt :** $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}$

c) Utiliser la formule des probabilités totales pour exprimer a_{n+1}, b_{n+1} et c_{n+1} en fonction de a_n, b_n et c_n.

- **1 pt :** $\mathbb{P}([X_{n+1} = j]) = m_{0,j}a_n + m_{1,j}b_n + m_{2,j}c_n$
- **1 pt :** $\begin{cases} a_{n+1} & = \frac{1}{4}b_n \\ b_{n+1} & = a_n + \frac{1}{2}b_n + c_n \\ c_{n+1} & = \frac{1}{4}b_n \end{cases}$

3. Vérifier que les relations trouvées à la question ***2.c)*** restent valables pour $n = 0$.

- **1 pt : d'une part :** $a_1 = \dfrac{1}{4}$**,** $b_1 = \dfrac{1}{2}$ **et** $c_1 = \dfrac{1}{4}$
- **1 pt : d'autre part :**

$$\frac{1}{4}b_0 = \frac{1}{4} \times 1 = \frac{1}{4}$$

$$a_0 + \frac{1}{2}b_0 + c_0 = 0 + \frac{1}{2} \times 1 + 0 = \frac{1}{2}$$

4. *a)* Pour tout n de $\mathbb{N}$, exprimer $\mathbb{E}(X_{n+1})$ en fonction de b_{n+1} et c_{n+1}.

- **1 pt : la variable aléatoire** X_{n+1} **est finie donc admet une espérance**

- **1 pt :** $\mathbb{E}(X_{n+1}) = b_{n+1} + 2c_{n+1}$

b) En déduire que, pour tout n de $\mathbb{N}$, on a $\mathbb{E}(X_{n+1}) = 1$.

- **2 pt : utilisation des questions précédentes**

c) Établir finalement la relation :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ b_n + 2c_n = 1$$

- **1 pt : vérification pour** $n = 0$
- **1 pt : vérification pour** $n \geqslant 1$

5. On pose $V = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et on considère, pour tout entier naturel n, la matrice-ligne $U_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n & c_n \end{pmatrix}$ élément de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

a) Montrer que la suite $(U_n V)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique et donner sa raison.

- **2 pt : la suite $(U_n V)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison** $q = -\dfrac{1}{2}$

b) Pour tout entier naturel n, en déduire explicitement $2a_n - b_n + 2c_n$ en fonction de n.

- **1 pt :** $2a_0 - b_0 + 2c_0 = -1$
- **1 pt :** $\forall n \in \mathbb{N},\ 2a_n - b_n + 2c_n = -\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n = \dfrac{(-1)^{n+1}}{2^n}$

6. Déterminer, pour tout entier naturel n, a_n, b_n et c_n puis donner la loi de X_n.

- **1 pt :** $X_n(\Omega) = \{0, 1, 2\}$
- **1 pt :** $\mathbb{P}([X_n = 0]) = \dfrac{1}{6}\left(1 + \dfrac{(-1)^{n+1}}{2^n}\right)$
- **1 pt :** $\mathbb{P}([X_n = 1]) = \dfrac{1}{3}\left(2 + \dfrac{(-1)^{n}}{2^n}\right)$
- **1 pt :** $\mathbb{P}([X_n = 2]) = \dfrac{1}{6}\left(1 + \dfrac{(-1)^{n+1}}{2^n}\right)$

7. Montrer que la suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi vers une variable aléatoire X dont on déterminera la loi.

- **1 pt :** $\left|\dfrac{(-1)^{n+1}}{2^n}\right| = \dfrac{1}{2^n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$
- **1 pt : la suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi vers X dont la loi est donnée par**

$$\mathbb{P}([X = 0]) = \frac{1}{6}, \qquad \mathbb{P}([X = 1]) = \frac{2}{3}, \qquad \mathbb{P}([X = 2]) = \frac{1}{6}$$

8. On se propose de retrouver la loi de X_n par une autre méthode.

a) Calculer M^2 et M^3, puis vérifier que $2M^3 = M^2 + M$.

- **1 pt :** $M^2 = \dfrac{1}{4^2}\begin{pmatrix} 4 & 8 & 4 \\ 2 & 12 & 2 \\ 4 & 8 & 4 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{8}\begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 1 & 6 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{8} & \frac{3}{4} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$
- **1 pt :** $M^3 = \dfrac{1}{4 \times 8}\begin{pmatrix} 4 & 24 & 4 \\ 6 & 20 & 6 \\ 4 & 24 & 4 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{4^2}\begin{pmatrix} 2 & 12 & 2 \\ 3 & 10 & 3 \\ 2 & 12 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{8} & \frac{3}{4} & \frac{1}{8} \\ \frac{3}{16} & \frac{5}{8} & \frac{3}{16} \\ \frac{1}{8} & \frac{3}{4} & \frac{1}{8} \end{pmatrix}$
- **1 pt : gestion des fractions pour la vérification de la formule**

b) En déduire les valeurs propres de M et donner une base de chacun de ses sous-espaces propres.

- **1 pt : les valeurs propres possibles de M sont les réels :** $-\dfrac{1}{2}$**,** 0 **et** 1

- **1 pt :** $E_0(M) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\right)$
- **1 pt :** $E_1(M) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right)$
- **1 pt :** $E_{-\frac{1}{2}}(M) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix}-2\\1\\-2\end{pmatrix}\right)$
- **1 pt : argument bien écrit au moins une fois pour la base**
- **1 pt : argument pour montrer que les vp possibles sont bien des vp**

c) On pose $P = \begin{pmatrix}2 & -1 & 1\\-1 & 0 & 1\\2 & 1 & 1\end{pmatrix}$. Justifier sans calcul que P est inversible.

- **1 pt : par théorème de concaténation, la famille** $\mathcal{B}' = \left(\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right)$ **est libre**
- **1 pt :** $\text{Card}(\mathcal{B}') = 3 = \dim(\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}))$

d) On pose $D = \begin{pmatrix}-1/2 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}$. Calculer MP et PD, puis conclure que M est diagonalisable.

- **1 pt :** $MP = \dfrac{1}{4}\begin{pmatrix}0 & 4 & 0\\1 & 2 & 1\\0 & 4 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & -1 & 1\\-1 & 0 & 1\\2 & 1 & 1\end{pmatrix} = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}-2 & 0 & 2\\1 & 0 & 2\\-2 & 0 & 2\end{pmatrix}$
- **1 pt :** $PD = \begin{pmatrix}2 & -1 & 1\\-1 & 0 & 1\\2 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1/2 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix} = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}-2 & 0 & 2\\1 & 0 & 2\\-2 & 0 & 2\end{pmatrix}$
- **1 pt :** M **est semblable à la matrice** D **qui est diagonale donc** M **est diagonalisable**

e) Établir la relation suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ U_{n+1} = U_n M$$

- **1 pt : utilisation de la question *2.c)***

f) En déduire la relation, valable pour tout entier naturel n :

$$U_n = U_0 M^n$$

- **1 pt : initialisation**
- **1 pt : hérédité**

g) Donner, sans faire les calculs, une stratégie pour obtenir la loi de X_n à partir de cette dernière relation (on précisera les différentes étapes permettant de conclure).

- **1 pt :** $\forall n \in \mathbb{N}$, $M^n = PD^nP^{-1}$
- **1 pt :** U_0 **étant le deuxième vecteur de la base canonique,** U_0P **est la deuxième ligne de** P
- **1 pt : toute autre explication pertinente**