DS6 (vA) - Correction

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidat·es sont invité·es à ***encadrer*** *dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*
Aucun document n'est autorisé. ***L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique*** *est* ***interdite****. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*
Si au cours de l'épreuve, un candidat ou une candidate repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

On suppose, et c'est valable pour toute l'épreuve, que la librairie suivante est importée sous son alias habituel :

- `import numpy as np`
- `import numpy.linalg as al`
- `import numpy.random as rd`
- `import matplotlib.pyplot as plt`

Exercice 1 (EML 2011)

On considère l'application :

$$f : \left]0,+\infty\right[\to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \big(x+\ln(x)\big)\,\mathrm{e}^{x-1}$$

Partie I : Étude et représentation graphique de f.

1. Montrer que f est dérivable sur $]0,+\infty[$. On note f' sa fonction dérivée.
Pour tout $x \in]0,+\infty[$, calculer $f'(x)$.

Démonstration.

- La fonction f est de la forme $f_1 \times f_2$ où
  - × $f_1 : x \mapsto x + \ln(x)$ est dérivable sur $]0,+\infty[$ comme somme de fonctions usuelles dérivables sur $]0,+\infty[$
  - × $f_2 : x \mapsto \mathrm{e}^{-1}\mathrm{e}^{x}$ est dérivable sur $]0,+\infty[$ comme produit de la fonction exponentielle par une constante

  donc f est dérivable sur $]0,+\infty[$.
- Soit $x > 0$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(1+\frac{1}{x}\right)\mathrm{e}^{x-1} + \big(x+\ln(x)\big)\,\mathrm{e}^{x-1} \\ &= \left(x+\ln(x)+1+\frac{1}{x}\right)\mathrm{e}^{x-1} \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est dérivable sur }]0,+\infty[\text{ et, pour tout } x>0 : f'(x) = \left(x+\ln(x)+1+\frac{1}{x}\right)\mathrm{e}^{x-1}.}$$

□

2. Établir : $\forall x \in]0,+\infty[,\ \ln(x) + \dfrac{1}{x} > 0$.

Démonstration.
La fonction ln est concave donc son graphe se situe en dessous de toutes ses tangentes, en particulier sa tangente en 1. D'où :

$$\forall y > 0,\ \ln(y) \leqslant y - 1 < y$$

Soit $x > 0$. On a alors :

$$\ln\left(\frac{1}{x}\right) < \frac{1}{x}$$

d'où :

$$-\ln(x) < \frac{1}{x}$$

$$\boxed{\text{On a bien : } \forall x \in]0,+\infty[,\ \ln(x)+\frac{1}{x} > 0.}$$

Commentaire

On pouvait aussi étudier la fonction $g : x \mapsto \ln(x) + \dfrac{1}{x}$ et tracer son tableau de variations.

□

3. En déduire : $\forall x \in \,]0, +\infty[, \; x + \ln(x) + 1 + \dfrac{1}{x} > 0$.

Démonstration.
Soit $x > 0$. D'après la question précédente :

$$\ln(x) + \frac{1}{x} > 0$$

Or, $x + 1 > 0$.

$$\boxed{\text{On a bien : } \forall x \in \,]0, +\infty[, \; x + \ln(x) + 1 + \frac{1}{x} > 0.}$$

□

4. En déduire le sens de variation de f.

Démonstration.
Soit $x > 0$. Rappelons que :

$$f'(x) = \left(x + \ln(x) + 1 + \frac{1}{x} \right) \mathrm{e}^{x-1}$$

Or, $x + \ln(x) + 1 + \dfrac{1}{x} > 0$ d'après la question précédente et $\mathrm{e}^{x-1} > 0$.

$$\boxed{\text{On en déduit que } f \text{ est strictement croissante sur }]0, +\infty[.}$$

□

5. Dresser le tableau de variation de f, comprenant la limite de f en 0 et la limite de f en $+\infty$. Calculer $f(1)$ et $f'(1)$.

Démonstration.
D'après la question précédente, on a le tableau de variations suivant :

x	0		$+\infty$
Signe de $f'(x)$	$\Vert$	$+$	
Variations de f	$\Vert$	$-\infty \nearrow$	$+\infty$

(les limites se calculent sans forme indéterminée).

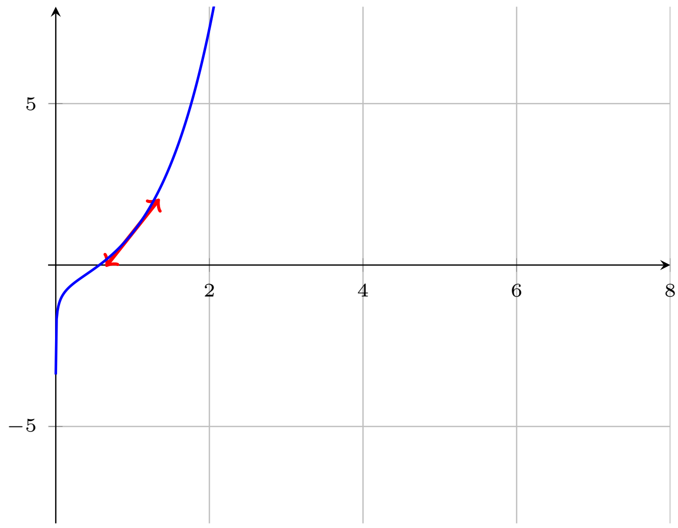
$$\boxed{\text{De plus : } f(1) = 1 \text{ et } f'(1) = 3.}$$

□

6. Tracer l'allure de $\mathcal{C}$. On précisera la tangente au point d'abscisse 1.

Démonstration.
Le graphe de f admet une tangente au point d'abscisse 1, dont l'équation est :

$$y = f'(1)(x - 1) + f(1) = 3x - 2$$



□

Partie II : Étude d'une suite récurrente associée à f.

On considère la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 2$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

7. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n existe et $u_n \geqslant 2$.

Démonstration.
Démontrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}(n)$ où $\mathcal{P}(n)$: « u_n existe et $u_n \geqslant 2$ ».

- **Initialisation** : $u_0 = 2$ donc u_0 existe et $u_0 \geqslant 2$. D'où $\mathcal{P}(0)$.
- **Hérédité** : soit $n \in \mathbb{N}$.
  Supposons $\mathcal{P}(n)$ et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$.
  Par hypothèse de récurrence, u_n existe et $u_n \geqslant 2$. Ainsi, $\ln(u_n)$ est bien défini et donc $u_{n+1} = f(u_n)$ existe.
  De plus, la fonction f est croissante sur $]0, +\infty[$ donc $f(u_n) \geqslant f(2)$. Or :
  $$f(2) = (2 + \ln(2))e^{2-1} = (2 + \ln(2))e$$
  et $\ln(2) \geqslant 0$ et $e \geqslant 1$. Donc $f(2) \geqslant 2$.
  D'où $\mathcal{P}(n+1)$.

$$\boxed{\text{Ainsi, par principe de récurrence : pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_n \text{ existe et } u_n \geqslant 2.}$$

□

8. Établir, par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geqslant e^n$.
Quelle est la limite de (u_n) ?

Démonstration.
Démontrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}(n)$ où $\mathcal{P}(n)$: « $u_n \geqslant e^n$ ».

- **Initialisation** :
  - D'une part : $u_0 = 2$.
  - D'autre part : $e^0 = 1$.

  D'où $\mathcal{P}(0)$.

- **Hérédité** : soit $n \in \mathbb{N}$.
  Supposons $\mathcal{P}(n)$ et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$. On a :

$$\begin{aligned}
u_{n+1} &= f(u_n) \\
&= (u_n + \ln(u_n))\, \mathrm{e}^{u_n - 1} \\
&\geqslant (\mathrm{e}^n + n)\, \mathrm{e}^{u_n - 1} && \textit{(par hypothèse de récurrence)} \\
&\geqslant \mathrm{e}^n \mathrm{e}^{u_n - 1} && \textit{(car } n \geqslant 0\textit{)} \\
&\geqslant \mathrm{e}^n \mathrm{e}^{2-1} && \textit{(d'après la question } \textbf{\textit{7.}}\textit{)} \\
&= \mathrm{e}^{n+1}
\end{aligned}$$

  D'où $\mathcal{P}(n+1)$.

$$\boxed{\text{Ainsi, par principe de récurrence : pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_n \geqslant \mathrm{e}^n.}$$

De plus : $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathrm{e}^n = +\infty$.

$$\boxed{\text{Par théorème de comparaison : } \lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty.}$$

□

9. Écrire un programme en **Python** qui calcule et affiche le plus petit entier naturel n tel que $u_n \geqslant 10^{20}$.

Démonstration.
On propose le programme **Python** suivant :

```
u = 2
n = 0
while u < 10**20:
    u = (u + np.log(u)) * np.exp(u-1)
    n += 1
print(n)
```

□

Partie III : Étude d'extremums locaux pour une fonction de deux variables associée à f.

On considère l'application :

$$\begin{array}{rccc}
F & : &]0,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\
 & & x & \mapsto & \displaystyle\int_1^x f(t)\, dt
\end{array}$$

10. Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0,+\infty[$ et exprimer $F'(x)$, pour tout $x \in \,]0,+\infty[$, à l'aide de $f(x)$.

Démonstration.
La fonction f est continue sur $]0,+\infty[$ donc, d'après le théorème fondamental de l'analyse, la fonction F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$ et :

$$\boxed{\forall x > 0,\ F'(x) = f(x).}$$

En reprenant la démonstration de la question ***1*** et en remplaçant partout le mot « dérivable » par « de classe $\mathcal{C}^1$ », on montre que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$.

$$\boxed{\text{Ainsi, } F' \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur }]0,+\infty[\text{ et donc } F \text{ est de classe } \mathcal{C}^2 \text{ sur }]0,+\infty[.}$$

□

On considère l'application de classe $\mathcal{C}^2$:

$$G : \begin{array}{ccccc}]0,+\infty[& \times &]0,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ (x & , & y) & \mapsto & F(x) + F(y) - 2\,\mathrm{e}^{\frac{x+y}{2}} \end{array}$$

11. Exprimer les dérivées partielles premières $\partial_1(G)(x, y)$ et $\partial_2(G)(x, y)$, pour tout $(x, y) \in\ ]0, +\infty[^2$ à l'aide de $f(x)$, $f(y)$ et $\mathrm{e}^{\frac{x+y}{2}}$.

Démonstration.
La fonction G est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0, +\infty[\times]0, +\infty[$ donc admet des dérivées partielles d'ordre 1 sur $]0, +\infty[\times]0, +\infty[$. Soit $(x, y) \in]0, +\infty[\times]0, +\infty[$. On a :

$$\boxed{\begin{array}{c} \partial_1(G)(x,y) = F'(x) + 0 - 2 \times \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{\frac{x+y}{2}} = f(x) - \mathrm{e}^{\frac{x+y}{2}} \\ \text{et} \\ \partial_2(G)(x,y) = 0 + F'(y) - 2 \times \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{\frac{x+y}{2}} = f(y) - \mathrm{e}^{\frac{x+y}{2}}. \end{array}}$$

□

12. ***a)*** Montrer que f est bijective.

Démonstration.
La fonction f est :

× continue sur $]0, +\infty[$

× strictement croissante sur $]0, +\infty[$

Ainsi, d'après le théorème de la bijection, la fonction f réalise une bijection de $]0, +\infty[$ sur $f(]0, +\infty[) = \mathbb{R}$ (d'après les limites calculées en question ***5.***). □

b) Établir que, pour tout $(x, y) \in\ ]0, +\infty[^2$, (x, y) est un point critique de G si et seulement si :

$$x = y \quad \text{et} \quad x + \ln(x) = \mathrm{e}$$

Démonstration.

Soit $(x, y) \in]0, +\infty[^2$.

$$\begin{aligned}
(x,y) \text{ est un point critique de } G &\Longleftrightarrow \begin{cases} f(x) - \mathrm{e}^{\frac{x+y}{2}} = 0 \\ f(y) - \mathrm{e}^{\frac{x+y}{2}} = 0 \end{cases} \\
&\Longleftrightarrow \begin{cases} f(x) = \mathrm{e}^{\frac{x+y}{2}} \\ f(y) = \mathrm{e}^{\frac{x+y}{2}} \end{cases} \\
&\Longleftrightarrow \begin{cases} f(x) = f(y) \\ f(y) = \mathrm{e}^{\frac{x+y}{2}} \end{cases} \\
&\Longleftrightarrow \begin{cases} x & = y \\ f(y) & = \mathrm{e}^{\frac{x+y}{2}} \end{cases} \qquad \textit{(car } f \textit{ est bijective d'après la question } \textbf{\textit{12.a)}}\textit{)} \\
&\Longleftrightarrow \begin{cases} x & = y \\ f(x) & = \mathrm{e}^{x} \end{cases} \\
&\Longleftrightarrow \begin{cases} x & = y \\ (x + \ln(x))\mathrm{e}^{x-1} & = \mathrm{e}^{x} \end{cases} \\
&\Longleftrightarrow \begin{cases} x & = y \\ x + \ln(x) & = \mathrm{e} \end{cases} \qquad \textit{(car } \mathrm{e}^x \neq 0\textit{)}
\end{aligned}$$

□

13. Montrer que l'équation $x + \ln(x) = \mathrm{e}$, d'inconnue $x \in]0, +\infty[$ admet une solution et une seule, que l'on notera α, et montrer : $1 < \alpha < \mathrm{e}$.

Démonstration.
On pose $h : x \mapsto x + \ln(x)$. La fonction h est dérivable sur $]0, +\infty[$ et, pour tout $x > 0$:

$$h'(x) = 1 + \frac{1}{x} > 0$$

Ainsi, la fonction h est :

- × continue sur $]0, +\infty[$
- × strictement croissante sur $]0, +\infty[$

D'après le théorème de la bijection, la fonction h réalise une bijection de $]0, +\infty[$ sur $h(]0, +\infty[) =]\lim\limits_{x \to 0} h(x), \lim\limits_{x \to +\infty} h(x)[= \mathbb{R}$.
De plus, $\mathrm{e} \in \mathbb{R}$.
Ainsi, e admet un unique antécédent par h. Autrement dit, l'équation $x + \ln(x) = \mathrm{e}$, d'inconnue $x \in]0, +\infty[$ admet une solution et une seule. On la note α.
On a :

- × $h(1) = 1$
- × $h(\alpha) = \mathrm{e}$
- × $h(\mathrm{e}) = \mathrm{e} + 1$

On en déduit que : $h(1) < h(\alpha) < h(\mathrm{e})$ et, par stricte croissance de h sur $]0, +\infty[$, on peut conclure que :

$$\boxed{1 < \alpha < \mathrm{e}.}$$

□

14. Montrer que G admet un extremum local. Préciser sa nature.

Démonstration.
La fonction G étant définie sur un ouvert, ses extrema locaux sont à chercher parmi ses points critiques. Soit $(x, y) \in \,]0, +\infty[^2$.

$$\begin{aligned}
(x, y) \text{ est un point critique de } G &\iff \begin{cases} x &= y \\ x + \ln(x) &= \mathrm{e} \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x &= y \\ x &= \alpha \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x &= \alpha \\ y &= \alpha \end{cases}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{La fonction } G \text{ admet un unique point critique : le point } (\alpha, \alpha).}$$

La fonction G est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0, +\infty[\times]0, +\infty[$ donc admet des dérivées partielles d'ordre 2 sur $]0, +\infty[\times]0, +\infty[$. On a :

$$\partial^2_{1,1}(G)(x, y) = f'(x) - \frac{1}{2}\mathrm{e}^{\frac{x+y}{2}} \qquad \partial^2_{1,2}(G)(x, y) = -\frac{1}{2}\mathrm{e}^{\frac{x+y}{2}}$$

$$\partial^2_{2,1}(G)(x, y) = -\frac{1}{2}\mathrm{e}^{\frac{x+y}{2}} \qquad \partial^2_{2,2}(G)(x, y) = f'(y) - \frac{1}{2}\mathrm{e}^{\frac{x+y}{2}}$$

et on pose :

$$H = \nabla^2(G)(\alpha, \alpha) = \begin{pmatrix} f'(\alpha) - \frac{1}{2}\mathrm{e}^{\alpha} & -\frac{1}{2}\mathrm{e}^{\alpha} \\ -\frac{1}{2}\mathrm{e}^{\alpha} & f'(\alpha) - \frac{1}{2}\mathrm{e}^{\alpha} \end{pmatrix}$$

Or :

$$\begin{aligned}
f'(\alpha) &= \left(\alpha + \ln(\alpha) + 1 + \frac{1}{\alpha}\right)\mathrm{e}^{\alpha - 1} \\
&= \left(\mathrm{e} + 1 + \frac{1}{\alpha}\right)\mathrm{e}^{\alpha - 1} && \textit{(par définition de } \alpha\textit{)} \\
&= \left(1 + \frac{1}{\mathrm{e}} + \frac{1}{\alpha\mathrm{e}}\right)\mathrm{e}^{\alpha}
\end{aligned}$$

D'où :

$$H = \begin{pmatrix} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\mathrm{e}} + \frac{1}{\alpha\mathrm{e}}\right)\mathrm{e}^{\alpha} & -\frac{1}{2}\mathrm{e}^{\alpha} \\ -\frac{1}{2}\mathrm{e}^{\alpha} & \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\mathrm{e}} + \frac{1}{\alpha\mathrm{e}}\right)\mathrm{e}^{\alpha} \end{pmatrix}$$

On pose $a = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\mathrm{e}} + \frac{1}{\alpha\mathrm{e}}\right)\mathrm{e}^{\alpha}$ et $b = -\frac{1}{2}\mathrm{e}^{\alpha}$ de sorte que $H = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$.
Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
\lambda \text{ est valeur propre de } H &\iff \det(H - \lambda I_2) = 0 \\
&\iff \begin{vmatrix} a - \lambda & b \\ b & a - \lambda \end{vmatrix} = 0 \\
&\iff (a - \lambda)^2 - b^2 = 0 \\
&\iff (a - b - \lambda)(a + b - \lambda) = 0
\end{aligned}$$

Ainsi, les valeurs propres de H sont :

$$\lambda_1 = a - b = \left(1 + \frac{1}{\mathrm{e}} + \frac{1}{\alpha \mathrm{e}}\right) \mathrm{e}^{\alpha} > 0 \qquad \text{et} \qquad \lambda_2 = a + b = \left(\frac{1}{\mathrm{e}} + \frac{1}{\alpha \mathrm{e}}\right) \mathrm{e}^{\alpha} > 0$$

Les valeurs propres de H étant toutes les deux strictement positives, on en déduit que G admet un minimum local au point (α, α).

Commentaire

On a utilisé la forme très particulière de $H = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$ pour calculer ses valeurs propres en fonction de α en reconnaissant l'identité remarquable $x^2 - y^2 = (x-y)(x+y)$.
On aurait aussi pu appliquer la méthode classique en cas de matrice hessienne dépendant d'un paramètre et déterminer le produit et la somme des valeurs propres de H. On aurait alors trouvé :

$$\begin{cases} \lambda_1 \lambda_2 & = \left(\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\mathrm{e}} + \frac{1}{\alpha \mathrm{e}}\right) \mathrm{e}^{\alpha}\right)^2 - \left(-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{\alpha}\right)^2 = \left(\frac{1}{\mathrm{e}} + \frac{1}{\alpha \mathrm{e}}\right) \mathrm{e}^{\alpha} \times \left(1 + \frac{1}{\mathrm{e}} + \frac{1}{\alpha \mathrm{e}}\right) \mathrm{e}^{\alpha} > 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 & = 2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\mathrm{e}} + \frac{1}{\alpha \mathrm{e}}\right) \mathrm{e}^{\alpha} > 0 \end{cases}$$

□

Exercice 2 (ECRICOME 2018)

Soit n un entier naturel non nul.
Dans une fête foraine, un stand propose le jeu suivant : le joueur lance n fois une pièce et compte le nombre de Pile obtenus. Si ce nombre est pair, le joueur est déclaré vainqueur, et s'il est impair, il est déclaré perdant.
Si le joueur est déclaré vainqueur, il gagne 10 euros pour chaque Pile obtenu, mais s'il a perdu, il doit payer 10 euros pour chaque Pile obtenu.
En particulier, s'il n'obtient aucun Pile, il est déclaré vainqueur, mais ne remporte rien. La pièce est truquée, et à chaque lancer, la probabilité d'obtenir Pile est égale à p ($p \in \,]0,1[$), et celle d'obtenir Face est de $1-p$.
On notera X la variable aléatoire égale au nombre de Pile obtenus, et G la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur.
Enfin, on notera A l'événement : « le joueur est déclaré vainqueur » et on dira que le jeu est favorable au joueur si l'espérance mathématique de la variable aléatoire G est positive.

1. *(Informatique)* Écrire une fonction **Python** `simulG(n)` qui prend en paramètre un entier $n \in \mathbb{N}^*$ et qui simule la variable aléatoire G. On pourra utiliser le test `if (-1)**k == 1:` pour vérifier qu'un entier k est pair.

Démonstration.
On propose la fonction **Python** suivante :

```
def simulG(n,p):
X = rd.binomial(n,p) # nb de Pile obtenus
if (-1)**X == 1:
    return 10*X
else:
    return -10*X
```

□

Partie I

Dans cette partie, on suppose que $n = 3$ et $p = \dfrac{2}{3}$.

2. Reconnaître la loi de X et vérifier que : $\mathbb{P}(A) = \dfrac{13}{27}$.

Démonstration.

- Commençons par décrire l'expérience.
  - Chaque lancer de pièce est une épreuve à deux issues : Pile (issue nommée succès), obtenu avec la probabilité p et Face, obtenu avec la probabilité $1 - p$.
  - Ainsi, l'expérience consiste en la succession de n épreuves de Bernoulli indépendantes et de même paramètre p.

  La v.a.r. X compte le nombre de succès obtenu au cours de cette expérience.

  $$\boxed{\text{Ainsi : } X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p).}$$

- L'événement A est réalisé si et seulement si le joueur a obtenu un nombre pair de Pile.
  Comme $n = 3$, ceci ne se produit que si le joueur n'obtient aucun Pile ou en obtient deux.
  On en déduit :

  $$A \;=\; [X = 0] \;\cup\; [X = 2]$$

  Ainsi, en appliquant $\mathbb{P}$ de part et d'autre :

  $$\begin{aligned}
  \mathbb{P}(A) &= \mathbb{P}\big([X = 0] \;\cup\; [X = 2]\big) \\
  &= \mathbb{P}\big([X = 0]\big) + \mathbb{P}\big([X = 2]\big) && \textit{(car } [X=0] \textit{ et } [X=2] \textit{ sont incompatibles)} \\
  &= \binom{3}{0}\, p^0 (1-p)^3 + \binom{3}{2}\, p^2 (1-p)^1 && \textit{(car } X \hookrightarrow \mathcal{B}(3,p)\textit{)} \\
  &= \left(\frac{2}{3}\right)^0 \left(\frac{1}{3}\right)^3 + 3 \left(\frac{2}{3}\right)^2 \left(\frac{1}{3}\right) && \textit{(car } p = \tfrac{2}{3}\textit{)} \\
  &= \frac{1}{27} + 3\, \frac{4}{27} \;=\; \frac{13}{27}
  \end{aligned}$$

  $$\boxed{\text{On obtient bien : } \mathbb{P}(A) = \frac{13}{27}.}$$

□

3. Montrer que : $G(\Omega) = \{-30, -10, 0, 20\}$, puis expliciter la loi de G.

Démonstration.

- Le gain du joueur dépend du nombre de Pile obtenus :
  × si le joueur obtient 0 Pile, il est déclaré vainqueur et touche : $0 \times 10 = 0$ euros.
  × si le joueur obtient 1 Pile, il est déclaré perdant et touche : $1 \times (-10) = -10$ euros.
  × si le joueur obtient 2 Pile, il est déclaré vainqueur et touche : $2 \times 10 = 20$ euros.
  × si le joueur obtient 3 Pile, il est déclaré perdant et touche : $3 \times (-10) = -30$ euros.

  $$\boxed{\text{Ainsi, } G(\Omega) = \{-30, -10, 0, 20\}.}$$

Commentaire

La variable G représente le gain **algébrique** du joueur. Cela signifie que G peut prendre des valeurs positives (en cas de victoire du joueur) ou négatives (en cas de défaite). Si le gain algébrique du joueur est de -30, cela signifie que le joueur doit payer 30 euros.

- D'après ce qui précède :

$$\begin{array}{rclclclcl}
\mathbb{P}\big([G=0]\big) & = & \mathbb{P}\big([X=0]\big) & = & \binom{3}{0}\, p^0(1-p)^3 & = & \left(\frac{1}{3}\right)^3 & = & \frac{1}{27} \\
\mathbb{P}\big([G=-10]\big) & = & \mathbb{P}\big([X=1]\big) & = & \binom{3}{1}\, p^1(1-p)^2 & = & 3\ \frac{2}{3}\ \left(\frac{1}{3}\right)^2 & = & \frac{6}{27} \\
\mathbb{P}\big([G=20]\big) & = & \mathbb{P}\big([X=2]\big) & = & \binom{3}{2}\, p^2(1-p)^1 & = & 3\ \left(\frac{2}{3}\right)^2\ \left(\frac{1}{3}\right)^1 & = & \frac{12}{27} \\
\mathbb{P}\big([G=-30]\big) & = & \mathbb{P}\big([X=3]\big) & = & \binom{3}{3}\, p^3(1-p)^0 & = & \left(\frac{2}{3}\right)^3 & = & \frac{8}{27}
\end{array}$$

$$\boxed{\mathbb{P}\big([G=-30]\big)=\frac{8}{27},\ \mathbb{P}\big([G=-10]\big)=\frac{6}{27},\ \mathbb{P}\big([G=0]\big)=\frac{1}{27},\ \mathbb{P}\big([G=20]\big)=\frac{12}{27}}$$

Commentaire

- Dans cette question, on calcule $\mathbb{P}\big([G=x]\big)$ pour tout $x \in G(\Omega)$. On peut s'affranchir du dernier calcul (à savoir $\mathbb{P}\big([G=-30]\big)$), puisque, comme $\Big([G=x]\Big)_{x\in\{-30,-10,0,20\}}$ est un système complet d'événements, on a :

$$\mathbb{P}\big([G=0]\big)+\mathbb{P}\big([G=-10]\big)+\mathbb{P}\big([G=20]\big)+\mathbb{P}\big([G=-30]\big)=1$$

et donc :

$$\mathbb{P}\big([G=-30]\big)=1-\mathbb{P}\big([G=0]\big)-\mathbb{P}\big([G=-10]\big)-\mathbb{P}\big([G=20]\big)$$

- Toutefois, il est vivement conseillé de réaliser tous ces calculs et d'utiliser la propriété ci-dessus comme mesure de vérification.

☐

4. Calculer l'espérance de G. Le jeu est-il favorable au joueur ?

Démonstration.

- La v.a.r. G admet une espérance car c'est une v.a.r. finie.
- Par définition :

$$\begin{array}{rcl}
\mathbb{E}(G) & = & \sum\limits_{x\in G(\Omega)} x\ \mathbb{P}\big([G=x]\big) \\
& = & -30\ \mathbb{P}\big([G=-30]\big) - 10\ \mathbb{P}\big([G=-10]\big) + 0\ \mathbb{P}\big([G=0]\big) + 20\ \mathbb{P}\big([G=20]\big) \\
& = & -30\ \frac{8}{27} - 10\ \frac{6}{27} + 20\ \frac{12}{27} \\
& = & \dfrac{-\cancel{240}-60+\cancel{240}}{27} \\
& = & \dfrac{-60}{27} \ = \ -\dfrac{20}{9}
\end{array}$$

$$\boxed{\text{L'espérance de gain est négative donc le jeu n'est pas favorable au joueur.}}$$

(le joueur perd en moyenne environ $2,22$ *euros par partie)* ☐

Partie II

Dans cette partie, on revient au cas général, où n est entier naturel non nul et $p \in \,]0,1[$.
Celui qui tient le stand souhaite rendre le jeu plus attractif en affichant « À ce jeu, il y a plus de gagnants que de perdants ! », et cherche donc les conditions nécessaires sur p et n pour que son affichage ne soit pas mensonger.
Soit Y la variable aléatoire définie par : $Y = (-1)^X$.
Autrement dit, Y prend la valeur 1 lorsque X prend une valeur paire, et Y prend la valeur -1 lorsque X prend une valeur impaire.

5. a) On note $Z = \dfrac{Y+1}{2}$.

Déterminer $Y(\Omega)$, puis montrer que Z suit une loi de Bernoulli de paramètre $\mathbb{P}(A)$.

Démonstration.

- Soit $\omega \in \Omega$. Deux cas se présentent.
  - × Si $X(\omega)$ est pair : alors $Y(\omega) = (-1)^{X(\omega)} = 1$. Et dans ce cas :

$$Z(\omega) \;=\; \frac{Y(\omega)+1}{2} \;=\; \frac{2}{2} \;=\; 1$$

  - × Si $X(\omega)$ est impair : alors $Y(\omega) = (-1)^{X(\omega)} = -1$. Et dans ce cas :

$$Z(\omega) \;=\; \frac{Y(\omega)+1}{2} \;=\; \frac{0}{2} \;=\; 0$$

$$\boxed{Y(\Omega) = \{-1, 1\} \quad \text{et} \quad Z(\Omega) = \{0, 1\}}$$

- Comme $Z(\Omega) = \{0, 1\}$, la v.a.r. Z suit une loi de Bernoulli dont le paramètre vaut :

$$\mathbb{P}\big([Z=1]\big) \;=\; \mathbb{P}\big([Y=1]\big) \;=\; \mathbb{P}\big([X \text{ est pair}]\big) \;=\; \mathbb{P}(A)$$

$$\boxed{Z \hookrightarrow \mathcal{B}(\mathbb{P}(A))}$$

□

b) Démontrer que : $\mathbb{E}(Y) = 2\mathbb{P}(A) - 1$.

Démonstration.
La v.a.r. Y admet une espérance car elle est finie.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Y) &= \mathbb{E}(2Z-1) \\ &= 2\mathbb{E}(Z) - 1 && \textit{(par linéarité de l'espérance)} \\ &= 2\mathbb{P}(A) - 1 && \textit{(car } Z \hookrightarrow \mathcal{B}(\mathbb{P}(A))\textit{)} \end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{E}(Y) \;=\; 2\mathbb{P}(A) - 1}$$

□

6. a) Donner la loi de X.

Démonstration.

$$\boxed{\text{Comme vu en question } \textbf{\textit{1.}} : X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p).}$$

□

b) En déduire que l'on a également :

$$\mathbb{E}(Y) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

puis que : $\mathbb{E}(Y) = (1-2p)^n$.

Démonstration.

- D'après le théorème de transfert :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Y) &= \sum_{k \in X(\Omega)} (-1)^k \, \mathbb{P}\big([X=k]\big) \\ &= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \, \mathbb{P}\big([X=k]\big) \\ &= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \quad \textit{(car } X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)\textit{)} \end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{E}(Y) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}}$$

- On en déduit :

$$\mathbb{E}(Y) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-p)^k (1-p)^{n-k} = (-p + (1-p))^n = (1-2p)^n$$

$$\boxed{\mathbb{E}(Y) = (1-2p)^n}$$

□

7. Exprimer alors la valeur de $\mathbb{P}(A)$ en fonction de n et p.

Démonstration.
D'après la question ***1.b)*** et ***2.b)*** :

$$(1-2p)^n = \mathbb{E}(Y) = 2\mathbb{P}(A) - 1$$

On en déduit : $2\mathbb{P}(A) = 1 + (1-2p)^n$.

$$\boxed{\mathbb{P}(A) = \frac{1 + (1-2p)^n}{2} = \frac{1}{2} + \frac{(1-2p)^n}{2}}$$

□

8. Démontrer que :

$$\mathbb{P}(A) \geqslant \frac{1}{2} \;\Leftrightarrow\; \left[p \leqslant \frac{1}{2} \text{ OU « } n \text{ est pair »}\right]$$

Démonstration.

- D'après la question précédente : $\mathbb{P}(A) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{(1-2p)^n}{2}$. Ainsi :

$$\mathbb{P}(A) \geqslant \frac{1}{2} \;\Leftrightarrow\; \frac{(1-2p)^n}{2} \geqslant 0 \;\Leftrightarrow\; (1-2p)^n \geqslant 0$$

- Déterminons le signe de $(1-2p)^n$. Deux cas se présentent :
  × si $1-2p \geqslant 0$ (*i.e.* $p \leqslant \frac{1}{2}$) alors $(1-2p)^n \geqslant 0$.
  × si $1-2p < 0$ (*i.e.* $p > \frac{1}{2}$) alors le signe de $(1-2p)^n$ dépend de n. Plus précisément :
    – si n est pair : alors $(1-2p)^n > 0 \geqslant 0$.
    – si n est impair : alors $(1-2p)^n < 0$.

  On en déduit :

$$\begin{aligned}
(1-2p)^n \geqslant 0 \;&\Leftrightarrow\; (p \leqslant \tfrac{1}{2}) \texttt{ OU } \big((p > \tfrac{1}{2}) \texttt{ ET } (n \text{ est pair})\big) \\
&\Leftrightarrow\; \Big((p \leqslant \tfrac{1}{2}) \texttt{ OU } (p > \tfrac{1}{2})\Big) \texttt{ ET } \Big((p \leqslant \tfrac{1}{2}) \texttt{ OU } (n \text{ est pair})\Big) \quad \textit{(par distributivité de } \texttt{OU} \textit{ sur } \texttt{ET}\textit{)} \\
&\Leftrightarrow\; \text{Vrai} \texttt{ ET } \Big((p \leqslant \tfrac{1}{2}) \texttt{ OU } (n \text{ est pair})\Big) \\
&\Leftrightarrow\; \Big((p \leqslant \tfrac{1}{2}) \texttt{ OU } (n \text{ est pair})\Big)
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{P}(A) \geqslant \frac{1}{2} \;\Leftrightarrow\; (p \leqslant \tfrac{1}{2}) \texttt{ OU } (n \text{ est pair})}$$

Commentaire

Dans l'énoncé, l'expression demandée est présentée à l'aide de crochets. Cela peut amener à confusion : dans le contexte d'un exercice de probabilité, on préfère, si cela est possible, réserver les crochets à l'écriture d'événements du type $[X \in I]$ où X est une v.a.r. et I une partie de $\mathbb{R}$.

□

Partie III

Le concepteur du jeu souhaite cependant vérifier que, tout en laissant son jeu attractif (c'est à dire en faisant en sorte que $\mathbb{P}(A) \geqslant \dfrac{1}{2}$), son activité soit rentable pour lui, autrement dit que le jeu soit défavorable au joueur (c'est à dire que $\mathbb{E}(G) \leqslant 0$).

9. Exprimer G en fonction de X et Y. En déduire que : $\mathbb{E}(G) = 10 \sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k \ k \ \mathbb{P}([X = k])$.

Démonstration.

- Démontrons :

$$G \ = \ 10 \ XY$$

Soit $\omega \in \Omega$. Deux cas se présentent :

× si $X(\omega)$ est pair alors le joueur est déclaré vainqueur. Dans ce cas :

$$G(\omega) \ = \ 10 \ X(\omega) \ = \ 10 \ X(\omega)Y(\omega)$$

car $Y(\omega) = 1$ dans ce cas (*cf* question ***1.a)*** de la partie II).

× si $X(\omega)$ est impair alors le joueur est déclaré perdant. Dans ce cas :

$$G(\omega) \ = \ -10 \ X(\omega) \ = \ 10 \ X(\omega)Y(\omega)$$

car $Y(\omega) = -1$ dans ce cas (*cf* question ***1.a)*** de la partie II).

$$\boxed{G \ = \ 10 \ XY}$$

- Par définition de la v.a.r. Y, on obtient :

$$G \ = \ 10 \ (-1)^X \ X$$

D'après le théorème de transfert :

$$\mathbb{E}(G) \ = \ \sum_{k \in X(\Omega)} 10 \ (-1)^k \ k \ \mathbb{P}\big([X = k] \big)$$

$$\boxed{\mathbb{E}(G) \ = \ 10 \sum_{k \in X(\Omega)} (-1)^k \ k \ \mathbb{P}\big([X = k] \big)}$$

□

10. Démontrer que : $\forall k \in [\![1, n]\!], \ k \dbinom{n}{k} = n \dbinom{n-1}{k-1}$.

Démonstration.
Soit $k \in [\![1, n]\!]$.

- Tout d'abord :

$$k \binom{n}{k} = k \ \frac{n!}{k! \ (n-k)!} = \frac{n!}{(k-1)! \ (n-k)!}$$

- Par ailleurs :

$$n \binom{n-1}{k-1} = n \ \frac{(n-1)!}{(k-1)! \ ((n-\cancel{1}) - (k-\cancel{1}))!} = \frac{n!}{(k-1)! \ (n-k)!}$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } \forall k \in [\![1, n]\!], \ k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1}.}$$

Commentaire

La relation sur les coefficients binomiaux peut aussi se faire par dénombrement.
Pour ce faire, on considère un ensemble E à n éléments.
(on peut penser à une pièce qui contient n individus)
On souhaite alors construire une partie P à k éléments de cet ensemble contenant un élément distingué *(on peut penser à choisir dans la pièce un groupe de k individus dans lequel figure un représentant de ces individus).*
Pour ce faire, on peut procéder de deux manières :

1) On choisit d'abord la partie à k éléments de E : $\binom{n}{k}$ possibilités.

On distingue ensuite un élément de cet ensemble P : $\binom{k}{1} = k$ possibilités.
(on choisit d'abord les k individus et on élit ensuite un représentant de ces individus)
Ainsi, il y a $k \binom{n}{k}$ manières de construire P.

2) On choisit d'abord, dans E, l'élément à distinguer : $\binom{n}{1} = n$ possibilités.

On choisit ensuite $k-1$ éléments dans E qui, pour former P, en y ajoutant l'élément précédent : $\binom{n-1}{k-1}$ possibilités.
(on choisit d'abord le représentant puis on lui adjoint un groupe de $k-1$ individus)
Ainsi, il y a $n \binom{n-1}{k-1}$ manières de construire P.

On retrouve ainsi le résultat. □

11. Montrer que : $\mathbb{E}(G) = -10\ np\ (1-2p)^{n-1}$.

Démonstration.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(G) &= 10 \sum_{k=0}^{n} (-1)^k\ k\ \mathbb{P}\big([X=k]\big) && \text{(d'après la question } \textbf{1.} \text{ de la partie III)} \\
&= 10 \sum_{k=0}^{n} (-1)^k\ k \binom{n}{k}\ p^k\ (1-p)^{n-k} && \text{(car } X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)\text{)} \\
&= 10 \sum_{k=1}^{n} (-1)^k\ k \binom{n}{k}\ p^k\ (1-p)^{n-k} && \text{(car le terme d'indice 0 est nul)} \\
&= 10 \sum_{k=1}^{n} (-1)^k\ n \binom{n-1}{k-1}\ p^k\ (1-p)^{n-k} && \text{(d'après la question précédente et car } k \in [\![1,n]\!]\text{)} \\
&= 10\ n \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^{k+1} \binom{n-1}{k}\ p^{k+1}\ (1-p)^{n-(k+1)} && \text{(par décalage d'indice)} \\
&= -10\ np \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \binom{n-1}{k}\ p^k\ (1-p)^{(n-1)-k} \\
&= -10\ np \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k}\ (-p)^k\ (1-p)^{(n-1)-k} \\
&= -10\ np\ \left((-p)+(1-p)\right)^{n-1} \ = \ -10\ np\ (1-2p)^{n-1}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{E}(G) \ = \ -10\ np\ (1-2p)^{n-1}}$$

□

12. Démontrer alors que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbb{P}(A) \geqslant \dfrac{1}{2} \\ \mathbb{E}(G) \leqslant 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \ p \leqslant \dfrac{1}{2}$$

Démonstration.

- On procède de la même manière qu'en question ***4.*** de la partie II. On obtient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbb{P}(A) \geqslant \dfrac{1}{2} \\ \mathbb{E}(G) \leqslant 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} (1-2p)^n \geqslant 0 \\ -10\ np\ (1-2p)^{n-1} \leqslant 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} (1-2p)^n \geqslant 0 \\ (1-2p)^{n-1} \geqslant 0 \end{array} \right.$$

- Étudions les signes de $(1-2p)^n$ et $(1-2p)^{n-1}$. Deux cas se présentent :
  - × si $1-2p \geqslant 0$ (*i.e.* $p \leqslant \frac{1}{2}$) alors $(1-2p)^n \geqslant 0$ et $(1-2p)^{n-1} \geqslant 0$
  - × si $1-2p < 0$ (*i.e.* $p > \frac{1}{2}$) alors les signes des quantités étudiées dépendent de n.
    Plus précisément :
    - si n est pair : alors $(1-2p)^n > 0$ et $(1-2p)^{n-1} < 0$ car $n-1$ est impair.
    - si n est impair : alors $(1-2p)^n < 0$ et $(1-2p)^{n-1} > 0$ car $n-1$ est pair.

$$\boxed{\text{On obtient bien : } \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{P}(A) \geqslant \dfrac{1}{2} \\ \mathbb{E}(G) \leqslant 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} (1-2p)^n \geqslant 0 \\ (1-2p)^{n-1} \geqslant 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \ p \leqslant \dfrac{1}{2}.}$$

□

13. a) Étudier la fonction f définie sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ par : $\forall x \in \left[0, \frac{1}{2}\right],\ f(x) = x\ (1-2x)^{n-1}$.

Démonstration.
Dans le cas $n = 1$, la fonction f est la fonction identité : $f : x \mapsto x$.
Étudions maintenant le cas $n \geqslant 2$.

- La fonction f est dérivable sur $[0, \frac{1}{2}]$ car polynomiale.
- Soit $x \in [0, \frac{1}{2}]$.

$$\begin{array}{rcl} f'(x) & = & (1-2x)^{n-1} + x\ (n-1)\ (1-2x)^{n-2}\ (-2) \\ & = & (1-2x)^{n-2}\ \left((1-2x) - 2(n-1)\ x\right) \\ & = & (1-2x)^{n-2}\ (1-2nx) \end{array}$$

  - Si $x = \frac{1}{2}$ ou $x = \frac{1}{2n}$ alors $f'(x) = 0$.
  - Si $x \in [0, \frac{1}{2}[$, $1-2x > 0$ et ainsi $(1-2x)^{n-2} > 0$.
    La quantité $f'(x)$ est donc du signe de $1-2nx$.
- On en déduit le tableau de variations de f.

x	0		$\frac{1}{2n}$		$\frac{1}{2}$
Signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	0
Variations de f	0	↗	$f\left(\frac{1}{2n}\right)$	↘	0

Avec $f\left(\dfrac{1}{2n}\right) = \dfrac{1}{2n}\ \left(1 - \cancel{2}\ \dfrac{1}{\cancel{2}n}\right)^{n-1} = \dfrac{1}{2n}\ \left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^{n-1}$.

Commentaire

- Il est plus prudent de traiter le cas $n = 1$ à part. Dans ce cas, $\frac{1}{2n}$ et $\frac{1}{2}$ coïncident et la fonction f est strictement croissante sur $[0, \frac{1}{2}]$. Le tableau de variations obtenu est ainsi un cas dégénéré du tableau obtenu lorsque $n \geqslant 2$.
- Si l'on se place du point de vue du jeu, ce cas n'a aucun intérêt pratique.
  En effet, si le joueur n'effectue qu'un lancer :
  - × soit il obtient Face et est déclaré vainqueur puisqu'il a obtenu un nombre pair (0) de Pile. Dans ce cas, son gain est de $0 \times 10 = 0$.
  - × soit il obtient Pile et est déclaré perdant puisqu'il a obtenu un nombre impair (1) de Pile. Dans ce cas, son gain est de $(-1) \times 10 = -10$.

  L'énoncé aurait pu écarter le cas $n = 1$ (« considérons par la suite un entier $n \geqslant 2$ ») : il est peu probable que le forain attire des clients assurés de ne jamais gagner d'argent en jouant.

□

b) Pour une valeur de n fixée, comment le concepteur du jeu doit-il truquer sa pièce (c'est à dire quelle valeur doit-il donner à $p \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$) pour optimiser la rentabilité de son activité ?

Démonstration.
Le concepteur du jeu souhaite que les conditions $\mathbb{P}(A) \leqslant \dfrac{1}{2}$ et $\mathbb{E}(G) \leqslant 0$ soient vérifiées.
D'après la question *4.*, ceci équivaut à :

$$p \leqslant \frac{1}{2}$$

On considère donc $p \leqslant \dfrac{1}{2}$ dans cette question. La rentabilité est optimale lorsque le gain du joueur est le plus faible. Il s'agit donc de trouver la valeur de p qui rend minimale la quantité :

$$\mathbb{E}(G) = -10\ np\ (1 - 2p)^{n-1}$$

Autrement dit, la valeur de p pour laquelle la quantité $f(p) = p\ (1 - 2p)^{n-1}$ est maximale.

- Dans le cas $n = 1$, $f(p) = p$.

$$\boxed{\text{Si } n = 1\text{, le concepteur doit choisir } p = \frac{1}{2} \text{ (la pièce est alors non truquée).}}$$

- Dans le cas $n \geqslant 2$, f atteint son maximum pour $x = \dfrac{1}{2n}$ (*cf* question précédente).

$$\boxed{\text{Si } n \geqslant 2\text{, le concepteur doit truquer la pièce de sorte que } p = \frac{1}{2n}.}$$

□

Partie IV

Le forain décide de fixer $n = 2$ et $p = \frac{1}{4}$. En période estivale, il pense pouvoir compter sur la participation de 200 clients dans le journée. Avant de se décider à installer son stand, il voudrait être certain, avec un risque d'erreur inférieur à 10%, qu'il gagnera plus de 100 euros dans la journée.
Pour tout entier i compris ente 1 et 200, on note alors G_i le gain algébrique du $i^{\text{ème}}$ joueur.
On note aussi J la variable aléatoire égale au gain du forain sur toute la journée.

14. Pour tout entier $i \in [\![1, 200]\!]$, donner la loi de G_i et calculer son espérance et sa variance.

Démonstration.
On procède comme en partie I. En particulier, on note X_i le nombre de Pile obtenus par le $i^{\text{ème}}$ joueur. On rappelle : $X_i \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$.

- Le gain du joueur dépend du nombre de Pile obtenus :
  - × si le joueur obtient 0 Pile, il est déclaré vainqueur et touche : $0 \times 10 = 0$ euros.
  - × si le joueur obtient 1 Pile, il est déclaré perdant et touche : $1 \times (-10) = -10$ euros.
  - × si le joueur obtient 2 Pile, il est déclaré vainqueur et touche : $2 \times 10 = 20$ euros.

$$\boxed{\text{Ainsi, } G(\Omega) = \{-10, 0, 20\}.}$$

- D'autre part :

$$\begin{array}{lclclclcl}
\mathbb{P}([G = 0]) & = & \mathbb{P}([X = 0]) & = & \binom{2}{0} p^0 (1-p)^2 & = & \left(\frac{3}{4}\right)^2 & = & \frac{9}{16} \\
\mathbb{P}([G = -10]) & = & \mathbb{P}([X = 1]) & = & \binom{2}{1} p^1 (1-p)^1 & = & 2\, \frac{1}{4}\, \frac{3}{4} & = & \frac{6}{16} \\
\mathbb{P}([G = 20]) & = & \mathbb{P}([X = 2]) & = & \binom{2}{2} p^2 (1-p)^0 & = & \left(\frac{1}{4}\right)^2 & = & \frac{1}{16}
\end{array}$$

$$\boxed{\mathbb{P}([G = -10]) = \frac{6}{16}, \ \mathbb{P}([G = 0]) = \frac{9}{16}, \ \mathbb{P}([G = 20]) = \frac{1}{16}}$$

Commentaire

Comme on l'a mentionné précédemment, l'égalité :

$$\mathbb{P}([G = 0]) + \mathbb{P}([G = -10]) + \mathbb{P}([G = 20]) = 1$$

permet de vérifier que l'on ne s'est pas trompé dans les calculs.

- La v.a.r. G admet une espérance et une variance car c'est une v.a.r. finie.
- Par définition :

$$\begin{array}{rcl}
\mathbb{E}(G) & = & \displaystyle\sum_{x \in G(\Omega)} x\, \mathbb{P}([G = x]) \\
& = & -10\, \mathbb{P}([G = -10]) + 0\, \mathbb{P}([G = 0]) + 20\, \mathbb{P}([G = 20]) \\
& = & -10\, \frac{6}{16} + 20\, \frac{1}{16} \ = \ -\frac{40}{16} \ = \ -\frac{5}{2}
\end{array}$$

$$\boxed{\mathbb{E}(G) = -\frac{5}{2}}$$

- Par le théorème de transfert :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(G^2) &= \sum_{x \in G(\Omega)} x^2 \, \mathbb{P}\big([G = x]\big) \\
&= (-10)^2 \, \mathbb{P}\big([G = -10]\big) + 0^2 \, \mathbb{P}\big([G = 0]\big) + 20^2 \, \mathbb{P}\big([G = 20]\big) \\
&= 100 \, \frac{6}{16} + 400 \, \frac{1}{16} \; = \; \frac{1000}{16} \; = \; \frac{125}{2}
\end{aligned}$$

- On obtient alors $\mathbb{V}(G)$ par la formule de Kœnig-Huygens.

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}(G) &= \mathbb{E}(G^2) - \big(\mathbb{E}(G)\big)^2 \\
&= \frac{125}{2} - \left(-\frac{5}{2}\right)^2 \\
&= \frac{125}{2} - \frac{25}{4} \; = \; \frac{225}{4}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{V}(G) = \frac{225}{4}}$$

□

15. Exprimer la variable aléatoire J en fonction des variables aléatoires G_i.
Démontrer alors que $\mathbb{E}(J) = 500$ et $\mathbb{V}(J) = 11250$.

Démonstration.

- Le gain algébrique cumulé des joueurs sur une journée est donné par la v.a.r. : $\sum\limits_{i=1}^{200} G_i$.
  Sur la journée, le gain algébrique du forain est l'opposé de celui des joueurs.

$$\boxed{\text{Ainsi : } J = -\sum_{i=1}^{200} G_i.}$$

Commentaire

On rappelle que les gains des joueurs et du forain sont des gains algébriques et peuvent donc être négatifs ou positifs. Par exemple, sur la journée :

× si les joueurs ont touché 100 alors le forain touche -100 (ce qui représente une perte cumulée de 100 euros).

× si les joueurs ont touché -100 (ce qui correspond à une perte cumulée de 100 euros), le forain a touché 100.

- La v.a.r. J admet une espérance comme somme de v.a.r. admettant une espérance.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(J) &= \mathbb{E}\left(-\sum_{i=1}^{200} G_i\right) \\
&= -\sum_{i=1}^{200} \mathbb{E}(G_i) && \textit{(par linéarité de l'espérance)} \\
&= \cancel{-}\sum_{i=1}^{200} \frac{\cancel{-}5}{2} && \textit{(d'après la question précédente)} \\
&= 200 \, \frac{5}{2} \; = \; 500
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{E}(J) = 500}$$

- On fait l'hypothèse raisonnable d'indépendance des v.a.r. X_i, ce qui permet d'établir, par le lemme des coalitions que les v.a.r. $G_i = 10\,(-1)^{X_i}\, X_i$ sont elles aussi indépendantes.
La v.a.r. J admet une variance comme somme de v.a.r. indépendantes admettant une variance.

$$\begin{array}{rcll}
\mathbb{V}(J) & = & \mathbb{V}\left(-\sum\limits_{i=1}^{200} G_i\right) & \\
& = & (-1)^2\ \mathbb{V}\left(\sum\limits_{i=1}^{200} G_i\right) & \textit{(par propriété de la variance)} \\
& = & \sum\limits_{i=1}^{200}\ \mathbb{V}(G_i) & \textit{(car les v.a.r. } G_i \textit{ sont indépendantes)} \\
& = & \sum\limits_{i=1}^{200}\ \dfrac{225}{4} & \textit{(d'après la question précédente)} \\
& = & 200\ \dfrac{225}{4}\ =\ 11250 &
\end{array}$$

$$\boxed{\mathbb{V}(J) = 11250}$$

Commentaire

- Insistons sur le fait que l'opérateur variance n'est pas linéaire. Cela provient notamment de son comportement vis à vis de la multiplication externe.
Plus précisément, si X est une v.a.r. qui admet une variance :
$$\mathbb{V}(aX)\ =\ a^2\ \mathbb{V}(X)$$
- Si X et Y sont deux v.a.r. indépendantes qui admettent une variance, alors :
$$\mathbb{V}(X+Y)\ =\ \mathbb{V}(X)+\mathbb{V}(Y)$$
Pour autant, cela ne signifie pas que la variance est linéaire (le premier point est toujours vérifié). En particulier, dans le cas de l'indépendance, insistons sur la formule :
$$\mathbb{V}(X-Y)\ =\ \mathbb{V}(X)+\mathbb{V}(Y)$$
Cette formule est une source classique d'erreur.
Rappelons donc : $\mathbb{V}(X-Y)\ \cancel{=}\ \mathbb{V}(X)-\mathbb{V}(Y)$.
- Il faut garder en tête que, par définition : $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}\big((X-\mathbb{E}(X))^2\big)$.
Ainsi, $\mathbb{V}(X)$ est forcément un réel positif puisque c'est l'espérance de la v.a.r. $(X-\mathbb{E}(X))^2$ qui ne prend que des valeurs positives.

$\square$

16. Justifier que : $\mathbb{P}\big(\,[J \leqslant 100]\,\big) \leqslant \mathbb{P}\big(\,[|J-500| \geqslant 400]\,\big)$.

Démonstration.

$$\begin{array}{rcll}
\mathbb{P}\big(\,[|J-500| \geqslant 400]\,\big) & = & \mathbb{P}\big(\,[J-500 \leqslant -400] \cup [J-500 \geqslant 400]\,\big) & \\
& = & \mathbb{P}\big(\,[J-500 \leqslant -400]\,\big) + \mathbb{P}\big(\,[J-500 \geqslant 400]\,\big) & \textit{(par incompatibilité des événements)} \\
& = & \mathbb{P}\big(\,[J \leqslant 100]\,\big) + \mathbb{P}\big(\,[J \geqslant 900]\,\big)\ \geqslant\ \mathbb{P}\big(\,[J \leqslant 100]\,\big) &
\end{array}$$

$$\boxed{\text{On obtient bien : } \mathbb{P}\big(\,[J \leqslant 100]\,\big) \leqslant \mathbb{P}\big(\,[|J-500| \geqslant 400]\,\big).}$$

Commentaire

- Rappelons que si $x \in \mathbb{R}$ alors pour tout $\varepsilon \geqslant 0$:

$$|x| < \varepsilon \ \Leftrightarrow \ -\varepsilon < x < \varepsilon \ \Leftrightarrow \ (-\varepsilon < x) \ \texttt{ET} \ (x < \varepsilon)$$

- Par négation de cette propriété on obtient la propriété utilisée dans la question précédente :

$$|x| \geqslant \varepsilon \ \Leftrightarrow \ (-\varepsilon \geqslant x) \ \texttt{OU} \ (x \geqslant \varepsilon) \ \Leftrightarrow \ (x \leqslant -\varepsilon) \ \texttt{OU} \ (x \geqslant \varepsilon)$$

□

17. Rappeler l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, puis montrer que : $\mathbb{P}([J \leqslant 100]) \leqslant \dfrac{9}{128}$.

Démonstration.

- L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev stipule que pour toute v.a.r. X qui admet une variance :

$$\forall \varepsilon > 0, \ \mathbb{P}\big([|X - \mathbb{E}(X)| \geqslant \varepsilon] \big) \ \leqslant \ \frac{\mathbb{V}(X)}{\varepsilon^2}$$

- Il suffit d'appliquer cette inégalité à la v.a.r. $X = J$ qui admet une variance (d'après la question ***2.***) et à $\varepsilon = 400 > 0$. On obtient :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{P}\big([|J - \mathbb{E}(J)| \geqslant 400] \big) & \leqslant & \dfrac{\mathbb{V}(J)}{400^2} \\ \shortparallel & & \shortparallel \\ \mathbb{P}\big([|J - 500| \geqslant 400] \big) & & \dfrac{11250}{400 \times 400} \end{array}$$

Puis par calcul :

$$\frac{11250}{400 \times 400} = \frac{50 \times 225}{400 \times 400} = \frac{225}{8 \times 100} = \frac{9 \times 25}{8 \times 4 \times 100} = \frac{9}{8 \times 4 \times 4} = \frac{9}{128}$$

- Enfin, on obtient l'inégalité souhaitée à l'aide de la question précédente :

$$\mathbb{P}\big([J \leqslant 100] \big) \ \leqslant \ \mathbb{P}\big([|J - 500| \geqslant 400] \big) \ \leqslant \ \frac{9}{128}$$

$$\boxed{\mathbb{P}\big([J \leqslant 100] \big) \ \leqslant \ \frac{9}{128}}$$

□

18. Compte tenu de ses exigences de rentabilité, le forain peut-il installer son stand ?

Démonstration.
D'après la question précédente :

$$\mathbb{P}\big([J > 100] \big) \ = \ 1 - \mathbb{P}\big([J \leqslant 100] \big) \ \geqslant \ 1 - \frac{9}{128}$$

Ainsi, le risque que le gain du forain ne dépasse 100 euros sur la journée est de $\dfrac{9}{128}$.
Comme $128 \geqslant 100$:

$$\frac{9}{128} \ \leqslant \ \frac{9}{100}$$

Les exigences de rentabilité sont bien réalisées : avec un risque inférieur à 10%, le forain gagne plus de 100 euros dans la journée.

□

Partie V - Bases de données

Le forain se lance maintenant à l'international : il possède des stands dans différents pays et il gère une base de données recensant les résultats des parties effectuées.

On se place à nouveau dans la situation de la **Partie I** : $n = 3$ et $p = \dfrac{2}{3}$.

Le schéma relationnel de la base de données est :

- `Stands` (id_stand (`INTEGER`), ville (`TEXT`), pays (`TEXT`))
- `Parties` (id_partie (`INTEGER`), jour (`TEXT`), stand (`INTEGER`), gain_joueur (`INTEGER`))

19. Identifier les clés primaires et les éventuelles clés étrangères de chacune des tables.

Démonstration.

- L'attribut id_stand est une clé primaire pour la table `Stands`.
- L'attribut id_partie est une clé primaire pour la table `Parties`.
- L'attribut stand est une clé secondaire de la table `Parties` pointant vers la table `Stands`.

□

20. Écrire les commandes `SQL` permettant de créer la table `Stands`. On suppose dans la suite que les deux tables sont correctement créées et contiennent des données.

Démonstration.

```
CREATE TABLE Stands(
id_stand INTEGER PRIMARY KEY,
ville TEXT,
pays TEXT)
```

□

21. Donner des requêtes `SQL` permettant d'afficher :

a) La liste des gains positifs obtenus par les joueurs au stand numéro 2.

Démonstration.

```
SELECT gain_joueur
FROM Parties
WHERE stand = 2 and gain_joueur >= 0
```

□

b) Toutes les lignes de la table `Parties` concernant les parties jouées en France.

Démonstration.

```
SELECT *
FROM Parties INNER JOIN Stands
ON Parties.stand = Stands.id_stand
WHERE pays = 'France'
```

☐

c) Le gain moyen des joueurs recensés dans cette base de données.
(On admettra que la commande `AVG` permet de calculer la moyenne des valeurs présentes sur une même colonne)

Démonstration.

```
SELECT AVG(gain_joueur)
FROM Parties
```

☐

22. Si la table contient suffisamment d'entrées, quelle valeur doit-on s'attendre à obtenir après exécution de la requête précédente ?

Démonstration.
La variable aléatoire G admet une variance. Ainsi, d'après la loi faible des grands nombres, on peut s'attendre à ce que la requête précédente renvoie une valeur approchée de $\mathbb{E}(G)$. ☐

Exercice 3 (EDHEC 2024)

Dans ce problème, on identifie une matrice de $\mathscr{M}_1(\mathbb{R})$ à un réel.
On considère deux urnes A et B contenant initialement une boule blanche et une boule noire chacune.
On procède à une suite d'épreuves, chaque épreuve consistant à tirer au hasard une boule dans chaque urne, la boule tirée de A étant remise dans B et la boule tirée de B étant remise dans A.
Pour tout entier naturel n, on note X_n la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches présentes dans A avant la $(n+1)^{\text{e}}$ épreuve.
On pose : $a_n = \mathbb{P}(X_n = 0)$, $b_n = \mathbb{P}(X_n = 1)$, $c_n = \mathbb{P}(X_n = 2)$ et $U_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n & c_n \end{pmatrix}$.

1. a) Donner les valeurs de a_0, b_0 et c_0.

Démonstration.
Initialement (avant la première épreuve), l'urne A contient une boule blanche et une boule noire. Ainsi, $X_0 = 1$.

$$\boxed{\text{On en déduit que } a_0 = 0,\ b_0 = 1 \text{ et } c_0 = 0.}$$

☐

b) Déterminer la loi de X_1 et en déduire les valeurs de a_1, b_1 et c_1.

Démonstration.
Tout d'abord, remarquons qu'à chaque épreuve les tirages dans les deux urnes sont simultanés et donc sont indépendants. Ainsi, lors de la première épreuve, il y a quatre issues équiprobables :

- Deux boules blanches ont été tirées. Dans ce cas le contenu des deux urnes ne changent pas et l'urne A contient toujours une boule blanche.
- Deux boules noires ont été tirées. Dans ce cas le contenu des deux urnes ne changent pas et l'urne A contient toujours une boule blanche.
- On a extrait la boule blanche de A et la boule noire de B. Dans ce cas l'urne A ne contient plus de boules blanches.

- On a extrait la boule noire de A et la boule blanche de B. Dans ce cas l'urne A contient deux boules blanches.

On en déduit que :

$$\mathbb{P}([X_1 = 0]) = \frac{1}{4}, \qquad \mathbb{P}([X_1 = 1]) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}, \qquad \mathbb{P}([X_1 = 2]) = \frac{1}{4}$$

$$\boxed{\text{Autrement dit : } a_1 = \frac{1}{4},\ b_1 = \frac{1}{2} \text{ et } c_1 = \frac{1}{4}.}$$

□

c) Justifier rapidement que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, $((X_n = 0), (X_n = 1), (X_n = 2))$ est un système complet d'événements.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On sait que X_n est une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{N}$ (elle compte le nombre de boules blanches dans l'urne A) et donc, d'après le cours, la famille $([X = k])_{k \in X(\Omega)}$ est un système complet d'événements.
Il s'agit donc de montrer que $X_n(\Omega) = \{0, 1, 2\}$. Or :

- D'après les questions ***1.a)*** et ***1.b)***, $\{0, 1, 2\} \subset X_n(\Omega)$.
- Il y a en tout deux boules blanches dans les deux urnes donc $X_n(\Omega) \subset \{0, 1, 2\}$.

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{On a bien } X_n(\Omega) = \{0,1,2\} \text{ et } ((X_n = 0), (X_n = 1), (X_n = 2)) \\ \text{est un système complet d'événements.}\end{array}}$$

□

d) En déduire, pour tout entier naturel n, la valeur de la somme $a_n + b_n + c_n$.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}$.

- Si $n = 0$, on a $a_0 + b_0 + c_0 = 1$ d'après la question ***1.a)***.
- Si $n \geqslant 1$, $((X_n = 0), (X_n = 1), (X_n = 2))$ est un système complet d'événements d'après la question précédente et donc :
$$\sum_{k=0}^{2} \mathbb{P}([X_n = k]) = 1$$
Autrement dit : $a_n + b_n + c_n = 1$.

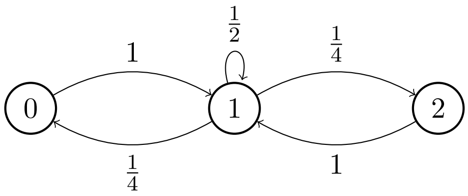
$$\boxed{\text{Pour tout entier naturel } n : a_n + b_n + c_n = 1.}$$

□

On admet dans la suite que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, les probabilités a_n, b_n et c_n sont non nulles.

2. Soit n un entier naturel non nul.

a) Déterminer, en les justifiant, les probabilités conditionnelles $\mathbb{P}_{(X_n = i)}(X_{n+1} = j)$, pour tout $(i, j) \in [\![0, 2]\!]^2$, puis en déduire que le graphe suivant représente la chaîne de Markov décrite ci-dessus.



Démonstration.
Soit $(i, j) \in [\![0, 2]\!]^2$.
Supposons que l'événement $[X_n = i]$ soit réalisé et distinguons les cas selon la valeur de i. Remarquons que toutes les probabilités conditionnelles écrites dans la suite sont bien définies d'après le résultat admis dans l'énoncé (car $n \geqslant 1$).

- Premier cas : $i = 0$. Alors l'urne A contient les deux boules noires tandis que l'urne B contient les deux boules blanches. On va forcément échanger une boule noire de A avec une boule blanche de B. Il y aura donc une boule blanche dans l'urne A à l'issue du $(n+1)^{\text{e}}$ tirage. D'où :

$$\mathbb{P}_{[X_n=0]}([X_{n+1} = 0]) = 0, \qquad \mathbb{P}_{[X_n=0]}([X_{n+1} = 1]) = 1, \qquad \mathbb{P}_{[X_n=0]}([X_{n+1} = 2]) = 0$$

- Deuxième cas : $i = 2$ (cas symétrique du précédent). Alors l'urne A contient les deux boules blanches tandis que l'urne B contient les deux boules noires. On va forcément échanger une boule blanche de A avec une boule noire de B. Il y aura donc une boule blanche dans l'urne A à l'issue du $(n+1)^{\text{e}}$ tirage. D'où :

$$\mathbb{P}_{[X_n=2]}([X_{n+1} = 0]) = 0, \qquad \mathbb{P}_{[X_n=2]}([X_{n+1} = 1]) = 1, \qquad \mathbb{P}_{[X_n=2]}([X_{n+1} = 2]) = 0$$

- Troisième cas : $i = 1$. Les urnes A et B sont alors dans la position initiale et donc la loi conditionnelle de X_{n+1} sachant $[X_n = 1]$ est la loi de X_1. D'où :

$$\mathbb{P}_{[X_n=1]}([X_{n+1} = 0]) = \frac{1}{4}, \qquad \mathbb{P}_{[X_n=1]}([X_{n+1} = 1]) = \frac{1}{2}, \qquad \mathbb{P}_{[X_n=1]}([X_{n+1} = 2]) = \frac{1}{4}$$

En reportant la probabilité conditionnelle $\mathbb{P}_{[X_n=i]}([X_{n+1} = j])$ sur l'arête allant de i vers j dans le graphe probabiliste, on retrouve bien le graphe proposé dans l'énoncé. □

b) Écrire la matrice de transition $M = (m_{i,j})_{(i,j)\in[\![0,2]\!]^2}$, où $m_{i,j} = \mathbb{P}_{(X_n=i)}(X_{n+1} = j)$, associée à cette chaîne de Markov. On remarquera que la première ligne et la première colonne de cette matrice sont numérotées 0, la deuxième ligne et la deuxième colonne sont numérotées 1 et la troisième ligne et la troisième colonne sont numérotées 2. On vérifiera avant de poursuivre que la somme des éléments de chaque ligne de M est égale à 1.

Démonstration.

$$\boxed{\text{On a : } M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}.}$$

□

c) Utiliser la formule des probabilités totales pour exprimer a_{n+1}, b_{n+1} et c_{n+1} en fonction de a_n, b_n et c_n.

Démonstration.
Soit $j \in \{0,1,2\}$. On applique la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $([X_n = k])_{k\in\{0,1,2\}}$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([X_{n+1} = j]) &= \sum_{i=0}^{2} \mathbb{P}([X_{n+1} = j] \cap [X_n = i]) \\
&= \sum_{i=0}^{2} \mathbb{P}([X_n = i])\mathbb{P}_{[X_n=i]}([X_{n+1} = j]) \\
&= \sum_{i=0}^{2} m_{i,j}\mathbb{P}([X_n = i]) \\
&= m_{0,j}a_n + m_{1,j}b_n + m_{2,j}c_n
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{D'où : } \begin{cases} a_{n+1} &= \dfrac{1}{4}b_n \\ b_{n+1} &= a_n + \dfrac{1}{2}b_n + c_n \\ c_{n+1} &= \dfrac{1}{4}b_n \end{cases}.}$$

□

3. Vérifier que les relations trouvées à la question ***2.c)*** restent valables pour $n = 0$.

Démonstration.

- D'une part : $a_1 = \dfrac{1}{4}$, $b_1 = \dfrac{1}{2}$ et $c_1 = \dfrac{1}{4}$ (d'après la question ***1.b)***).
- D'autre part :

$$\frac{1}{4}b_0 = \frac{1}{4} \times 1 = \frac{1}{4}$$

$$a_0 + \frac{1}{2}b_0 + c_0 = 0 + \frac{1}{2} \times 1 + 0 = \frac{1}{2}$$

$$\boxed{\text{Les relations précédentes restent valables pour } n = 0.}$$

□

4. ***a)*** Pour tout n de $\mathbb{N}$, exprimer $\mathbb{E}(X_{n+1})$ en fonction de b_{n+1} et c_{n+1}.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}$. La variable aléatoire X_{n+1} est finie donc admet une espérance.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X_{n+1}) &= \sum_{i=0}^{2} i \ \mathbb{P}([X_{n+1} = i]) \\
&= 0 \times a_{n+1} + b_{n+1} + 2c_{n+1}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{D'où : } \mathbb{E}(X_{n+1}) = b_{n+1} + 2c_{n+1}.}$$

□

b) En déduire que, pour tout n de $\mathbb{N}$, on a $\mathbb{E}(X_{n+1}) = 1$.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}$. Reprenons le calcul précédent.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X_{n+1}) &= b_{n+1} + 2c_{n+1} \\
&= a_n + \frac{1}{2}b_n + c_n + 2 \times \frac{1}{4}b_n && \textit{(d'après la question } \textbf{\textit{2.c)}}\textit{)} \\
&= a_n + b_n + c_n \\
&= 1 && \textit{(d'après la question } \textbf{\textit{1.d)}}\textit{)}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{D'où : } \forall n \in \mathbb{N},\ \mathbb{E}(X_{n+1}) = 1.}$$

□

c) Établir finalement la relation :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ b_n + 2c_n = 1$$

Démonstration.
D'après le calcul de la question précédente :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ b_n + 2c_n = 1$$

Il reste à vérifier cette relation pour $n = 0$. Or :

$$b_0 + 2c_0 = 1 + 2 \times 0 = 1$$

$$\boxed{\text{On a bien : } \forall n \in \mathbb{N},\ b_n + 2c_n = 1.}$$

□

5. On pose $V = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et on considère, pour tout entier naturel n, la matrice-ligne $U_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n & c_n \end{pmatrix}$ élément de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

a) Montrer que la suite $(U_n V)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique et donner sa raison.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}
U_{n+1}V &= \begin{pmatrix} a_{n+1} & b_{n+1} & c_{n+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \\
&= 2a_{n+1} - b_{n+1} + 2c_{n+1} \\
&= \frac{1}{2}b_n - a_n - \frac{1}{2}b_n - c_n + \frac{1}{2}b_n && \textit{(d'après la question } \textbf{\textit{2.c)}}\textit{)} \\
&= -a_n + \frac{1}{2}b_n - c_n \\
&= -\frac{1}{2}\left(2a_n - b_n + 2c_n\right) \\
&= -\frac{1}{2}U_n V
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{La suite } (U_n V)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est géométrique de raison } q = -\frac{1}{2}.}$$

□

b) Pour tout entier naturel n, en déduire explicitement $2a_n - b_n + 2c_n$ en fonction de n.

Démonstration.
D'après la question précédente, la suite $(2a_n - b_n + 2c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison $-\frac{1}{2}$. De plus, d'après la question ***1.a)*** :

$$2a_0 - b_0 + 2c_0 = -1$$

$$\boxed{\text{D'où : } \forall n \in \mathbb{N},\ 2a_n - b_n + 2c_n = -\left(-\frac{1}{2}\right)^n = \frac{(-1)^{n+1}}{2^n}.}$$

□

6. Déterminer, pour tout entier naturel n, a_n, b_n et c_n puis donner la loi de X_n.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après les questions ***1.d)***, ***4.c)*** et ***5.b)*** , on a :

$$\left\{\begin{array}{rrrl} a_n & +\, b_n & +\ \ c_n & = 1 \\ & b_n & +\, 2c_n & = 1 \\ 2a_n & -\, b_n & +\, 2c_n & = \dfrac{(-1)^{n+1}}{2^n} \end{array}\right. \qquad (*)$$

Or :

$$(*) \iff \left\{\begin{array}{rrrl} a_n & +\ \ b_n & +\ \ c_n & = 1 \\ & b_n & +\, 2c_n & = 1 \\ & -\, 3b_n & & = \dfrac{(-1)^{n+1}}{2^n} - 2 \qquad L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rrl} a_n & & = \dfrac{1}{6}\left(1 + \dfrac{(-1)^{n+1}}{2^n}\right) \\ & c_n & = \dfrac{1}{6}\left(1 + \dfrac{(-1)^{n+1}}{2^n}\right) \\ b_n & & = \dfrac{1}{3}\left(2 + \dfrac{(-1)^{n}}{2^n}\right) \qquad \textit{(par remontées successives)} \end{array}\right.$$

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{On peut conclure que la loi de } X_n \text{ est donnée par : } X_n(\Omega) = \{0,1,2\} \text{ et} \\ \mathbb{P}([X_n = 0]) = \dfrac{1}{6}\left(1 + \dfrac{(-1)^{n+1}}{2^n}\right),\ \mathbb{P}([X_n = 1]) = \dfrac{1}{3}\left(2 + \dfrac{(-1)^{n}}{2^n}\right) \text{ et } \mathbb{P}([X_n = 2]) = \dfrac{1}{6}\left(1 + \dfrac{(-1)^{n+1}}{2^n}\right).\end{array}}$$

□

7. Montrer que la suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi vers une variable aléatoire X dont on déterminera la loi.

Démonstration.
Tout d'abord :

$$\left|\frac{(-1)^{n+1}}{2^n}\right| = \frac{1}{2^n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

D'où :

$$\mathbb{P}([X_n = 0]) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{6}$$

$$\mathbb{P}([X_n = 1]) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{2}{3}$$

$$\mathbb{P}([X_n = 2]) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{6}$$

On définit alors X la variable aléatoire à valeurs dans $\{0, 1, 2\}$ telle que :

$$\mathbb{P}([X = 0]) = \frac{1}{6}, \qquad \mathbb{P}([X = 1]) = \frac{2}{3}, \qquad \mathbb{P}([X = 2]) = \frac{1}{6}$$

$$\boxed{\text{La suite de variables aléatoires } (X_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge en loi vers } X.}$$

□

8. On se propose de retrouver la loi de X_n par une autre méthode.

a) Calculer M^2 et M^3, puis vérifier que $2M^3 = M^2 + M$.

Démonstration.
On a :

$$M = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

donc :

$$M^2 = \frac{1}{4^2}\begin{pmatrix} 4 & 8 & 4 \\ 2 & 12 & 2 \\ 4 & 8 & 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 1 & 6 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

et finalement :

$$M^3 = \frac{1}{4\times 8}\begin{pmatrix} 4 & 24 & 4 \\ 6 & 20 & 6 \\ 4 & 24 & 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{4^2}\begin{pmatrix} 2 & 12 & 2 \\ 3 & 10 & 3 \\ 2 & 12 & 2 \end{pmatrix}$$

Ainsi :

$$2M^3 = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 2 & 12 & 2 \\ 3 & 10 & 3 \\ 2 & 12 & 2 \end{pmatrix}$$

et

$$M^2 + M = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 1 & 6 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix} + \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 0 & 8 & 0 \\ 2 & 4 & 2 \\ 0 & 8 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 2 & 12 & 2 \\ 3 & 10 & 3 \\ 2 & 12 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\text{On a bien : } 2M^3 = M^2 + M.}$$

□

b) En déduire les valeurs propres de M et donner une base de chacun de ses sous-espaces propres.

Démonstration.
D'après la question précédente, le polynôme $P(x) = 2x^3 - x^2 - x$ est un polynôme annulateur de M. Ainsi :

$$\mathrm{Sp}(M) \subset \{\text{racines de } P(x)\}$$

Or :

$$P(x) = x(2x^2 - x - 1) = 2x(x-1)\left(x + \frac{1}{2}\right)$$

$$\boxed{\text{Les valeurs propres possibles de } M \text{ sont les réels : } -\frac{1}{2}, 0 \text{ et } 1.}$$

Soit $U = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

$$\begin{aligned} U \in E_0(M) &\iff MU = 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \\ &\iff \begin{cases} 4y = 0 \\ x + 2y + z = 0 \\ 4y = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} y = 0 \\ x + z = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} y = 0 \\ x = -z \end{cases} \end{aligned}$$

D'où :

$$E_0(M) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$$

Puisque $E_0(M) \neq \{0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})}\}$, 0 est bien valeur propre de M.

La famille $\mathcal{F}_0 = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$:

× engendre $E_0(M)$,

× est libre car constituée d'un unique vecteur non nul.

$$\boxed{\text{La famille } \mathcal{F}_0 \text{ est une base de } E_0(M).}$$

$$\begin{aligned}
U \in E_1(M) &\iff (M - I_3)U = 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \\
&\iff \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -4 & 4 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 4 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&\iff \left\{\begin{array}{rcl} -4x + 4y & & = 0 \\ x - 2y + & z & = 0 \\ 4y - & 4z & = 0 \end{array}\right. \\
&\iff \left\{\begin{array}{rcl} -4x + 4y & & = 0 \\ - 4y + & 4z & = 0 \\ 4y - & 4z & = 0 \end{array}\right. \quad L_2 \leftarrow 4L_2 + L_1 \\
&\iff \left\{\begin{array}{rcl} -4x + 4y & & = 0 \\ - 4y + 4z & & = 0 \\ & 0 & = 0 \end{array}\right. \quad L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \\
&\iff \left\{\begin{array}{rl} x & = y \\ z & = y \end{array}\right.
\end{aligned}$$

D'où :

$$E_1(M) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

Puisque $E_1(M) \neq \{0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})}\}$, 1 est bien valeur propre de M.

La famille $\mathcal{F}_1 = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$:

- × engendre $E_1(M)$,
- × est libre car constituée d'un unique vecteur non nul.

$$\boxed{\text{La famille } \mathcal{F}_1 \text{ est une base de } E_1(M).}$$

$$
\begin{aligned}
U \in E_1(M) &\iff (M + \frac{1}{2}I_3)U = 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \\
&\iff \left(\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&\iff \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&\iff \begin{cases} 2x + 4y \phantom{{}+ z} = 0 \\ x + 4y + z = 0 \\ \phantom{x+{}} 4y + 2z = 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x + 2y \phantom{{}+z} = 0 \\ x + 4y + z = 0 \\ \phantom{x+{}} 2y + z = 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x + 2y \phantom{{}+z} = 0 \\ \phantom{x+{}} 2y + z = 0 \qquad L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ \phantom{x+{}} 2y + z = 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x \phantom{{}+z} = -2y \\ \phantom{x+{}} z = -2y \end{cases}
\end{aligned}
$$

D'où :

$$E_{-\frac{1}{2}}(M) = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right)$$

Puisque $E_{-\frac{1}{2}}(M) \neq \{0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})}\}$, $-\dfrac{1}{2}$ est bien valeur propre de M.

La famille $\mathcal{F}_{-\frac{1}{2}} = \left(\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right)$:

- × engendre $E_{-\frac{1}{2}}(M)$,
- × est libre car constituée d'un unique vecteur non nul.

$$\boxed{\text{La famille } \mathcal{F}_{-\frac{1}{2}} \text{ est une base de } E_{-\frac{1}{2}}(M).}$$

□

c) On pose $P = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Justifier sans calcul que P est inversible.

Démonstration.

D'après la question précédente, les vecteurs $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ sont des vecteurs propres de M associés à trois valeurs propres distinctes.

Ainsi, par théorème de concaténation, la famille $\mathcal{B}' = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est libre.

De plus, $\text{Card}(\mathcal{B}') = 3 = \dim(\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}))$.
Donc $\mathcal{B}'$ est une base de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

$$\boxed{\text{La matrice } P \text{ est donc inversible.}}$$

□

d) On pose $D = \begin{pmatrix} -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer MP et PD, puis conclure que M est diagonalisable.

Démonstration.
Tout d'abord :

$$MP = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Ensuite :

$$PD = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

D'où $MP = PD$ et donc $M = PDP^{-1}$.

$$\boxed{\text{La matrice } M \text{ est semblable à la matrice } D \text{ qui est diagonale donc } M \text{ est diagonalisable.}}$$

□

e) Établir la relation suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ U_{n+1} = U_n M$$

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$\begin{aligned} U_n M &= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} a_n & b_n & c_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{4} b_n & a_n + \frac{1}{2} b_n + c_n & \frac{1}{4} b_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_{n+1} & b_{n+1} & c_{n+1} \end{pmatrix} && \textit{(d'après la question } \textbf{2.c)}\textit{)} \\ &= U_{n+1} \end{aligned}$$

□

f) En déduire la relation, valable pour tout entier naturel n :

$$U_n = U_0 M^n$$

Démonstration.
Démontrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}(n)$ où $\mathcal{P}(n)$: « $U_n = U_0 M^n$ ».

▸ **Initialisation** : $U_0 M^0 = U_0 I_3 = U_0$. D'où $\mathcal{P}(0)$.

- **Hérédité** : soit $n \in \mathbb{N}$.
  Supposons $\mathcal{P}(n)$ et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$.

$$\begin{aligned} U_{n+1} &= U_n M && \textit{(d'après la question } \textbf{\textit{8.e)}}\textit{)} \\ &= U_0 M^n M && \textit{(par hypothèse de récurrence)} \\ &= U_0 M^{n+1} \end{aligned}$$

  D'où $\mathcal{P}(n+1)$.

$$\boxed{\text{Ainsi, par principe de récurrence : pour tout } n \in \mathbb{N},\ U_n = U_0 M^n.}$$

□

g) Donner, sans faire les calculs, une stratégie pour obtenir la loi de X_n à partir de cette dernière relation (on précisera les différentes étapes permettant de conclure).

Démonstration.
Donnons les étapes dans l'ordre :

- On montre par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}$, $M^n = PD^nP^{-1}$.
- On en déduit : $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_n = U_0PD^nP^{-1}$ $(*)$.
- On obtient sans calcul : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $D^n = \begin{pmatrix} \left(-\frac{1}{2}\right)^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (on prend n non nul car $0^0 = 1$).
- On calcule P^{-1} en utilisant la méthode de Gauss-Jordan.
- U_0 étant le deuxième vecteur de la base canonique, U_0P est la deuxième ligne de P.
- On continue ensuite les produits matriciels de la gauche vers la droite dans la formule $(*)$. En effet, on s'évite ainsi de multiplier des matrices carrées entre elles et à chaque étape on multiplie une matrice ligne avec une matrice carrée, ce qui diminue le nombre de calculs.
  On calcule donc, dans cet ordre : U_0P, puis $(U_0P)D^n$ puis $(U_0PD^n)P^{-1}$.

□