DS6 (vB)

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidat·es sont invité·es à ***encadrer*** *dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*
Aucun document n'est autorisé. ***L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique*** *est* ***interdite****. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*
Si au cours de l'épreuve, un candidat ou une candidate repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

On suppose, et c'est valable pour toute l'épreuve, que la librairie suivante est importée sous son alias habituel :

- `import numpy as np`
- `import numpy.linalg as al`
- `import numpy.random as rd`
- `import matplotlib.pyplot as plt`

Ce problème est constitué de trois parties. Les résultats de la partie 1 sont utilisés dans les parties 2 et 3. Les parties 2 et 3 sont indépendantes entre elles.
Dans tout le sujet, $I =]a, b[$ est un intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$, où a et b sont réels ou infinis.
On dit qu'une densité vérifie l'hypothèse CSP(I) lorsque f est :

- continue sur I ;
- strictement positive sur I ;
- nulle en dehors de I.

On écrira alors simplement : f est CSP(I).
On admettra que les principaux résultats du cours concernant l'indépendance des variables aléatoires discrètes s'appliquent également aux variables aléatoires à densité.

Partie 1 - Calcul d'une probabilité

On considère dans cette partie :

- X une variable aléatoire réelle à densité à valeurs dans I, de fonction de répartition F et admettant une densité de probabilité f qui est CSP(I).
- U une variable aléatoire qui suit une loi uniforme sur $]0, 1[$ et qui est indépendante de X.
- h une fonction continue sur I à valeurs dans $[0, 1]$.

On se propose d'établir la formule suivante :

$$\mathbb{P}([U \leqslant h(X)]) \;=\; \mathbb{P}([U < h(X)]) \;=\; \int_a^b f(t)\, h(t)\, dt$$

On définit sur I la fonction Ψ par : $\Psi(x) = \mathbb{P}([X \leqslant x] \cap [U \leqslant h(X)])$.

1. Pour tous réels x et y dans I rels que $x < y$, on pose $M(x, y) = \max\limits_{t\in[x,y]} h(t)$ et $m(x, y) = \min\limits_{t\in[x,y]} h(t)$.

a) Soit x dans I. Justifier que pour tout y dans l'intervalle $]x, b[$, il existe α_y dans l'intervalle $[x, y]$ tel que $M(x, y) = h(\alpha_y)$.

b) En déduire : $\lim\limits_{\substack{y\to x\\ y>x}} M(x, y) = h(x)$.

c) Montrer de même que, pour tout y dans I, $\lim\limits_{\substack{x\to y\\ x<y}} M(x, y) = h(y)$.

On montrerait de manière analogue (on ne demande pas de le vérifier) :
$\lim\limits_{\substack{y\to x\\ y>x}} m(x, y) = h(x)$ et $\lim\limits_{\substack{x\to y\\ x<y}} m(x, y) = h(y)$.

2. Soit x et y deux réels de I tels que $x < y$.

a) Établir l'inclusion suivante entre évènements :

$$[x < X \leqslant y] \cap [U \leqslant h(X)] \;\subset\; [x < X \leqslant y] \cap [U \leqslant M(x, y)]$$

En déduire l'inégalité :

$$\Psi(y) - \Psi(x) \;\leqslant\; (F(y) - F(x))\, M(x, y)$$

b) Établir une minoration analogue pour $\Psi(y) - \Psi(x)$, puis l'encadrement :

$$\frac{F(y) - F(x)}{y - x}\, m(x, y) \;\leqslant\; \frac{\Psi(y) - \Psi(x)}{y - x} \;\leqslant\; \frac{F(y) - F(x)}{y - x}\, M(x, y)$$

c) Montrer que Ψ est dérivable sur I, et exprimer sa dérivée en fonction de f et h.

3. ***a)*** En déduire que, pour tout x et y dans I :

$$\Psi(y) - \Psi(x) \ = \ \int_x^y \ f(t)\, h(t) \ dt$$

b) Établir : pour tout x dans I, $\Psi(x) \leqslant F(x)$, puis montrer : $\lim\limits_{x \to a} \Psi(x) = 0$. En déduire :

$$\forall x \in I, \quad \Psi(x) = \int_a^x \ f(t)\, h(t) \ dt$$

c) Établir, pour tout x dans I : $\mathbb{P}([X > x] \cap [U \leqslant h(X)]) = \mathbb{P}([U \leqslant h(X)]) - \Psi(x)$.
En déduire : $\lim\limits_{x \to b} \Psi(x) = \mathbb{P}([U \leqslant h(X)])$ puis :

$$\mathbb{P}([U \leqslant h(X)]) = \int_a^b \ f(t)\, h(t) \ dt$$

4. Montrer : $\mathbb{P}([U < h(X)]) = 1 - \mathbb{P}([1 - U \leqslant 1 - h(X)])$, en déduire :

$$\mathbb{P}([U < h(X)]) \ = \ \int_a^b \ f(t)\, h(t) \ dt$$

Partie 2 - Le modèle économique de Leontiev fermé

Soit α et β deux nombres réels appartenant à l'intervalle $]0, 1[$.
On s'intéresse à un modèle économique composé de trois secteurs d'activité S_1, S_2 et S_3. On suppose que :

- pour produire une unité de biens du secteur 1, il faut α unités du secteur 1 et α unités du secteur 2.
- pour produire une unité de biens du secteur 2, il faut β unités du secteur 1 et α unités du secteur 3.
- pour produire une unité de biens du secteur 3, il faut β unités du secteur 2 et β unités du secteur 3.

On dira que ce modèle est *viable* s'il existe des quantités de productions x_1, x_2 et x_3 des secteurs respectifs S_1, S_2 et S_3, strictement positives et telles que chaque secteur soit excédentaire en quantité.

5. ***a)*** Montrer que le modèle est viable si et seulement s'il existe $x_1 > 0$, $x_2 > 0$, $x_3 > 0$, tels que :

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 > \alpha x_1 + \beta x_2 \\ x_2 > \alpha x_1 + \beta x_3 \\ x_3 > \alpha x_2 + \beta x_3 \end{array} \right.$$

b) On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & 0 \\ \alpha & 0 & \beta \\ 0 & \alpha & \beta \end{pmatrix}$. Montrer que le modèle est viable si et seulement s'il existe une matrice colonne X à composantes strictement positives telle que la matrice colonne $X - AX$ n'a que des composantes strictement positives.

6. ***a)*** Vérifier que $\alpha + \beta$ est valeur propre de A et déterminer le sous espace vectoriel associé.

b) En déduire que si $\alpha + \beta < 1$, alors le modèle est viable.

On admet pour la suite que le modèle est viable si et seulement si le spectre de A est inclus dans $]-1, 1[$.

7. ***a)*** Montrer que le modèle est viable si et seulement si $\alpha + \beta < 1$.

b) Déterminer les valeurs propres de A autres que $\alpha + \beta$, et vérifier qu'elles sont dans l'intervalle $]-1, 1[$.

8. On suppose, dans cette question seulement, que α est une variable aléatoire qui suit la loi uniforme sur $]0,1[$ et que β est une variable aléatoire à valeurs dans $]0,1[$, admettant une densité de probabilité f qui est CSP($]0,1[$).
En utilisant les résultats de la ***Partie 1***, montrer que la probabilité que le modèle soit viable vaut $1 - \mathbb{E}(\beta)$.

9. On suppose désormais que α et β sont tels que le modèle est viable. Pour $i = 1, 2$ ou 3, on note y_i le coût de production d'une unité de bien dans le secteur i, et $y_i + z_i$, le prix de vente d'une unité de bien du secteur i. La marge z_i est appliquée uniquement en cas de vente à un autre secteur, l'achat à l'intérieur d'un même secteur se faisant au prix coûtant y_i.
On définit les deux matrices lignes : $Y = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix}$ et $Z = \begin{pmatrix} z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix}$ ainsi que la matrice carrée $B = \begin{pmatrix} 0 & \beta & 0 \\ \alpha & 0 & \beta \\ 0 & \alpha & 0 \end{pmatrix}$

a) Établir la relation matricielle (1) : $Y = Y\,A + Z\,B$.

b) Justifier sans calculs l'inversibilité de $I_3 - A$.
En déduire que pour Z fixé, il existe un unique Y vérifiant la relation (1).

Partie 3 - Simulation de variables aléatoires

La plupart des langages informatiques possèdent un générateur de nombres aléatoires. En **Python** par exemple, on dispose de la fonction `rd.random()`. Cette fonction simule une v.a.r. de loi uniforme sur $]0,1[$.
On propose dans la suite deux méthodes permettant de simuler des lois à densité quelconques en utilisant ce générateur aléatoire.
Jusqu'à la fin du problème : on note Z une variable aléatoire à densité à valeurs dans I, de fonction de répartition G et admettant une densité g qui est CSP(I).

3a - Simulation par la méthode d'inversion

10. ***a)*** On note H la restriction de G à I. Montrer que H réalise une bijection de I sur $]0,1[$.
On note H^{-1} la bijection réciproque. Dresser le tableau de variation de H^{-1}.

Soit U une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $]0,1[$.
On pose $X = H^{-1}(U)$, et on note F la fonction de répartition de X.

b) Montrer que pour tout x dans I, $F(x) = G(x)$.

c) En déduire que X suit la même loi que Z.

11. Simulation de lois exponentielles.
On suppose dans cette question que Z suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.

a) Expliciter l'intervalle I et les fonctions g, G et H^{-1}.

b) En déduire une fonction **Python** d'en-tête `def expo(lam)` qui simule la loi exponentielle de paramètre `lam`. On n'utilisera pas la commande `rd.exponential(...)`.

12. Simulation de la loi de Laplace.
On cherche dans cette question à simuler une variable aléatoire de densité g donnée par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-|x|} \qquad \text{(densité de Laplace)}$$

Soit Y une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre 1.

Soit V une variable aléatoire indépendante de Y suivant la loi uniforme sur $\{-1, 1\}$, ce qui signifie $\mathbb{P}([V = -1]) = \mathbb{P}([V = 1]) = \dfrac{1}{2}$.
On pose $X = VY$.

a) Vérifier que g est une densité de probabilité qui est CSP($\mathbb{R}$).

b) Établir :

- pour tout $x \geqslant 0$, $\mathbb{P}([X > x]) = \dfrac{1}{2}\, \mathbb{P}([Y > x])$;
- pour tout $x \leqslant 0$, $\mathbb{P}([X \leqslant x]) = \dfrac{1}{2}\, \mathbb{P}([Y \geqslant -x])$;

c) En déduire une expression de la fonction de répartition de X.

d) Conclure que X est une variable aléatoire à densité admettant g comme densité.

e) Compléter la fonction **Python** suivante pour qu'elle simule la loi de Laplace :

```
def laplace():
    Y = expo(1)
    U = rd.random()
    if ___________:
        Z = Y
    else:
        Z = ______
    return Z
```

3b - Simulation par la méthode du rejet

Dans la méthode dite du rejet, pour simuler la loi de Z de densité g (voir les notations en préambule de la partie 3), on commence par déterminer une loi de probabilité que l'on sait simuler, de densité f qui est CSP(I), et qui vérifie : il existe une constante $c > 0$ telle que : $\forall x \in I,\ g(x) \leqslant c\, f(x)$.

13. Montrer qu'il existe une fonction h continue sur I et à valeurs dans $[0, 1]$ telle que, pour tout $x \in I$, $g(x) = c\, f(x)\, h(x)$.

On considère alors :

- une suite de variable aléatoires $(U_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ qui suivent une loi uniforme sur $]0, 1[$.
- une suite de variable aléatoires $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ à valeur dans $]a, b[$ ayant toutes la même loi de densité de probabilité f et de fonction de répartition F.
  On suppose de plus que pour tout entier $n \geq 1$, les variables X_1, …, X_n, U_1, …, U_n sont mutuellement indépendantes.

On définit N la variable aléatoire prenant comme valeur le premier indice k vérifiant $U_k \leqslant h(X_k)$.

14. En utilisant la ***Partie 1***, prouver l'égalité, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$: $\mathbb{P}([U_k \leqslant h(X_k)]) = \dfrac{1}{c}$.
En déduire que N suit une loi géométrique dont on précisera le paramètre, l'espérance et la variance.

On définit la variable aléatoire X comme étant la valeur de X_N, c'est à dire la valeur de X_k pour le premier indice k vérifiant $U_k \leqslant h(X_k)$.

15. Soit $x \in I$.

a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
Exprimer l'événement $[X \leqslant x] \cap [N = n]$ à partir des événements $[X_n \leqslant x] \cap [U_n \leqslant h(X_n)]$ et $[U_k > h(X_k)]$ pour $k \in [\![1, n-1]\!]$.

b) En utilisant la question ***3.b)***, montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\mathbb{P}([X_n \leqslant x] \cap [U_n \leqslant h(X_n)]) = \frac{1}{c}\, G(x)$$

c) En déduire $\mathbb{P}([X_n \leqslant x] \cap [N = n])$ en fonction de c et de $G(x)$.

d) Montrer finalement : $\mathbb{P}([X \leqslant x]) = G(x)$.

16. Conclure.

17. Simulation de la loi normale.
Dans cette question, Z suit la loi normale centrée réduite, donc $I = \mathbb{R}$.
Soit f la densité de Laplace (question ***12.***), définie par : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-|x|}$.

a) Donner une densité g de Z qui est CSP($\mathbb{R}$).

b) Étudier les variations sur $]0, +\infty[$ de la fonction $a : x \mapsto \mathrm{e}^{x - \frac{x^2}{2}}$.

c) Expliciter une constante $c > 0$ telle que, pour tout $x \geq 0$: $g(x) \ \leqslant\ \frac{c}{2}\mathrm{e}^{-x}$.

d) En déduire, pour tout x réel : $g(x) \ \leqslant\ c\, f(x)$.

e) Expliquer alors comment mettre en place la méthode du rejet pour simuler la loi normale centrée réduite. On explicitera la fonction h introduite à la question ***13***.

f) Compléter la fonction **Python** suivante pour qu'elle simule la loi normale centrée réduite :

```
def normale():
    X = laplace()
    U = rd.random()
    while ________________________________________________:
        X = laplace()
        U = rd.random()
    return _____
```