1 Exercices

Exercice 1 : Soit X une variable aléatoire admettant une densité que l'on note f.

1. Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$. On pose $Y = aX + b$. Démontrer que la fonction
$$g : x \mapsto \frac{1}{|a|} f\left(\frac{x-b}{a}\right)$$
est une densité de Y.
2. On pose $Y = X^2$. Démontrer que la fonction
$$g : x \mapsto \begin{cases} \dfrac{1}{2\sqrt{x}} \left(f\left(\sqrt{x}\right) + f\left(-\sqrt{x}\right)\right) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$
est une densité de Y.
3. On pose $Y = |X|$. Démontrer que la fonction
$$g : x \mapsto \begin{cases} f(x) + f(-x) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$
est une densité de Y.
4. On pose $Y = \mathrm{e}^X$. Démontrer que la fonction
$$g : x \mapsto \begin{cases} \dfrac{1}{x} f(\ln(x)) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$
est une densité de Y.
5. On suppose que f est nulle sur $]-\infty, 0]$. On pose $Y = \ln(X)$. Démontrer que la fonction
$$g : x \mapsto \mathrm{e}^x f(\mathrm{e}^x)$$
est une densité de Y.

2 Corrections détaillées

Correction détaillée de l'exercice 1 :

1. Tout d'abord : $Y(\Omega) \subset \mathbb{R}$ (car $X(\Omega) \subset \mathbb{R}$).
   Soit $x \in \mathbb{R}$.
   - Premier cas : $a > 0$.

$$\begin{aligned} F_Y(x) &= \mathbb{P}([Y \leqslant x]) \\ &= \mathbb{P}([aX + b \leqslant x]) \\ &= \mathbb{P}\left(\left[X \leqslant \frac{x-b}{a}\right]\right) && \textit{(car } a > 0\textit{)} \\ &= F_X\left(\frac{x-b}{a}\right) \end{aligned}$$

   Or, puisque X est à densité, F_X est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ éventuellement privé d'un nombre fini de points. Ainsi, F_Y est également continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ éventuellement privé d'un nombre fini de points (par composition). On en déduit que Y est à densité.
   En tout point x où F_Y est de classe $\mathcal{C}^1$, on a :

$$F_Y'(x) = \frac{1}{a} F_X'\left(\frac{x-b}{a}\right) = \frac{1}{a} f\left(\frac{x-b}{a}\right) = \frac{1}{|a|} f\left(\frac{x-b}{a}\right)$$

   On pose $g : x \mapsto \dfrac{1}{|a|} f\left(\dfrac{x-b}{a}\right)$.
   — La fonction g est positive sur $\mathbb{R}$ car f est une densité donc f est positive sur $\mathbb{R}$.
   — La fonction g coïncide avec F_Y' sur $\mathbb{R}$ éventuellement privé d'un nombre fini de points.
   Ainsi : g est une densité de Y.
   - Deuxième cas : $a < 0$.

$$\begin{aligned} F_Y(x) &= \mathbb{P}([Y \leqslant x]) \\ &= \mathbb{P}([aX + b \leqslant x]) \\ &= \mathbb{P}\left(\left[X \geqslant \frac{x-b}{a}\right]\right) && \textit{(car } a < 0\textit{)} \\ &= 1 - F_X\left(\frac{x-b}{a}\right) && \textit{(car } X \textit{ est à densité)} \end{aligned}$$

   Or, puisque X est à densité, F_X est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ éventuellement privé d'un nombre fini de points. Ainsi, F_Y est également continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ éventuellement privé d'un nombre fini de points (par composition). On en déduit que Y est à densité.
   En tout point x où F_Y est de classe $\mathcal{C}^1$, on a :

$$F_Y'(x) = -\frac{1}{a} F_X'\left(\frac{x-b}{a}\right) = -\frac{1}{a} f\left(\frac{x-b}{a}\right) = \frac{1}{|a|} f\left(\frac{x-b}{a}\right)$$

   On pose $g : x \mapsto \dfrac{1}{|a|} f\left(\dfrac{x-b}{a}\right)$.
   — La fonction g est positive sur $\mathbb{R}$ car f est une densité donc f est positive sur $\mathbb{R}$.
   — La fonction g coïncide avec F_Y' sur $\mathbb{R}$ éventuellement privé d'un nombre fini de points.
   Ainsi : g est une densité de Y.

   Bilan : quelque soit le signe de a, g est une densité de Y.

2. Tout d'abord : $Y(\Omega) \subset \mathbb{R}^+$ (car $X(\Omega) \subset \mathbb{R}$).
   Soit $x \in \mathbb{R}^+$.

$$\begin{aligned} F_Y(x) &= \mathbb{P}([Y \leqslant x]) \\ &= \mathbb{P}(\left[X^2 \leqslant x\right]) \\ &= \mathbb{P}\left(\left[-\sqrt{x} \leqslant X \leqslant \sqrt{x}\right]\right) \\ &= F_X\left(\sqrt{x}\right) - F_X\left(-\sqrt{x}\right) && \textit{(car X est à densité)} \end{aligned}$$

   D'où :

$$F_Y : x \mapsto \begin{cases} F_X\left(\sqrt{x}\right) - F_X\left(-\sqrt{x}\right) & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

   Or, puisque X est à densité, F_X est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ éventuellement privé d'un nombre fini de points. Ainsi, F_Y est continue sur $]0, +\infty[$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ éventuellement privé d'un nombre fini de points (par composition).
   De plus :
   - F_Y est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\infty, 0[$ car constante,
   - $\lim\limits_{x\to 0^-} F_Y(x) = \lim\limits_{x\to 0} 0 = 0 = F_Y(0)$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} F_Y(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} F_X\left(\sqrt{x}\right) - F_X\left(-\sqrt{x}\right) = F_X(0) - F_X(0) = 0 = F_Y(0)$ par continuité de F_X, donc F_Y est continue en 0.

   On en déduit que Y est à densité.
   En tout point $x > 0$ où F_Y est de classe $\mathcal{C}^1$, on a :

$$F_Y'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} F_X'\left(\sqrt{x}\right) + \frac{1}{2\sqrt{x}} F_X'\left(-\sqrt{x}\right) = \frac{1}{2\sqrt{x}}\left(f(\sqrt{x}) + f(-\sqrt{x})\right)$$

   et en tout point $x < 0$, on a : $F_Y'(x) = 0$.
   On pose $g : x \mapsto \begin{cases} \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\left(f\left(\sqrt{x}\right) + f\left(-\sqrt{x}\right)\right) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.
   - La fonction g est positive sur $\mathbb{R}$ car f est une densité donc f est positive sur $\mathbb{R}$.
   - La fonction g coïncide avec F_Y' sur $\mathbb{R}$ éventuellement privé d'un nombre fini de points.

   Ainsi : g est une densité de Y.
3. Tout d'abord : $Y(\Omega) \subset \mathbb{R}^+$ (car $X(\Omega) \subset \mathbb{R}$).
   Soit $x \in \mathbb{R}^+$.

$$\begin{aligned} F_Y(x) &= \mathbb{P}([Y \leqslant x]) \\ &= \mathbb{P}([|X| \leqslant x]) \\ &= \mathbb{P}\left([-x \leqslant X \leqslant x]\right) \\ &= F_X(x) - F_X(-x) && \textit{(car X est à densité)} \end{aligned}$$

   D'où :

$$F_Y : x \mapsto \begin{cases} F_X(x) - F_X(-x) & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

   Or, puisque X est à densité, F_X est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ éventuellement privé d'un nombre fini de points. Ainsi, F_Y est continue sur $]0, +\infty[$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ éventuellement privé d'un nombre fini de points (par composition).
   De plus :
   - F_Y est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\infty, 0[$ car constante,
   - $\lim\limits_{x\to 0^-} F_Y(x) = \lim\limits_{x\to 0} 0 = 0 = F_Y(0)$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} F_Y(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} F_X(x) - F_X(-x) = F_X(0) - F_X(0) = 0 = F_Y(0)$ par continuité de F_X, donc F_Y est continue en 0.

On en déduit que Y est à densité.
En tout point $x>0$ où F_Y est de classe $\mathcal{C}^1$, on a :

$$F_Y'(x) = F_X'(x) + F_X'(-x) = f(x) + f(-x)$$

et en tout point $x<0$, on a : $F_Y'(x) = 0$.
On pose $g : x \mapsto \begin{cases} f(x) + f(-x) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

- La fonction g est positive sur $\mathbb{R}$ car f est une densité donc f est positive sur $\mathbb{R}$.
- La fonction g coïncide avec F_Y' sur $\mathbb{R}$ éventuellement privé d'un nombre fini de points.

Ainsi : g est une densité de Y.

4. Tout d'abord : $Y(\Omega) \subset]0,+\infty[$ (car $X(\Omega) \subset \mathbb{R}$).
Soit $x \in]0,+\infty[$.

$$\begin{aligned} F_Y(x) &= \mathbb{P}([Y \leqslant x]) \\ &= \mathbb{P}\left(\left[\mathrm{e}^X \leqslant x\right]\right) \\ &= \mathbb{P}\left([X \leqslant \ln(x)]\right) && \textit{(car } \ln \textit{ est strictement croissante sur }]0,+\infty[\textit{)} \\ &= F_X(\ln(x)) \end{aligned}$$

D'où :

$$F_Y : x \mapsto \begin{cases} F_X(\ln(x)) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases}$$

Or, puisque X est à densité, F_X est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ éventuellement privé d'un nombre fini de points. Ainsi, F_Y est continue sur $]0,+\infty[$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$ éventuellement privé d'un nombre fini de points (par composition).
De plus :

- F_Y est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\infty,0[$ car constante,
- $\lim\limits_{x\to0^-} F_Y(x) = \lim\limits_{x\to0} 0 = 0 = F_Y(0)$ et $\lim\limits_{x\to0^+} F_Y(x) = \lim\limits_{x\to0^+} F_X(\ln(x)) = \lim\limits_{y\to-\infty} F_X(y) = 0 = F_Y(0)$ par propriété des fonctions de répartition, donc F_Y est continue en 0.

On en déduit que Y est à densité.
En tout point $x>0$ où F_Y est de classe $\mathcal{C}^1$, on a :

$$F_Y'(x) = \frac{1}{x}F_X'(\ln(x)) = \frac{1}{x}f(\ln(x))$$

et en tout point $x<0$, on a : $F_Y'(x) = 0$.
On pose $g : x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{x}f(\ln(x)) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

- La fonction g est positive sur $\mathbb{R}$ car f est une densité donc f est positive sur $\mathbb{R}$.
- La fonction g coïncide avec F_Y' sur $\mathbb{R}$ éventuellement privé d'un nombre fini de points.

Ainsi : g est une densité de Y.

5. Tout d'abord : $Y(\Omega) \subset \mathbb{R}$ (car $X(\Omega) \subset]0,+\infty[$ puisque f est nulle sur $]-\infty,0]$ et $\ln(]0,+\infty[) = \mathbb{R}$).
Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} F_Y(x) &= \mathbb{P}([Y \leqslant x]) \\ &= \mathbb{P}([\ln(X) \leqslant x]) \\ &= \mathbb{P}\left(\left[X \leqslant \mathrm{e}^x\right]\right) && \textit{(car } \exp \textit{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}\textit{)} \\ &= F_X\left(\mathrm{e}^x\right) \end{aligned}$$

D'où :

$$F_Y : x \mapsto F_X\left(\mathrm{e}^x\right)$$

Or, puisque X est à densité, F_X est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ éventuellement privé d'un nombre fini de points. Ainsi, F_Y est également continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ éventuellement privé d'un nombre fini de points (par composition). On en déduit que Y est à densité.

En tout point x où F_Y est de classe $\mathcal{C}^1$, on a :

$$F_Y'(x) = \mathrm{e}^x F_X\left(\mathrm{e}^x\right) = \mathrm{e}^x f\left(\mathrm{e}^x\right)$$

On pose $g : x \mapsto \mathrm{e}^x f\left(\mathrm{e}^x\right)$.

- La fonction g est positive sur $\mathbb{R}$ car f est une densité donc f est positive sur $\mathbb{R}$.
- La fonction g coïncide avec F_Y' sur $\mathbb{R}$ éventuellement privé d'un nombre fini de points.

Ainsi : g est une densité de Y.