Colles de Mathématiques en E2A
Convergence en loi, estimation
Semaine 22 : 10 - 14 mars

Toutes les définitions et tous les énoncés de théorèmes/propositions du cours sont exigibles des élèves. Les démonstrations des théorèmes du cours ne sont pas exigibles, sauf si elles apparaissent en question de cours.

On pourra à tout moment demander à un·e élève de donner la nature (réel, suite, fonction, ensemble, proposition, etc) d'une expression manipulée dans un exercice, pour vérifier sa bonne compréhension. On pourra aussi demander de préciser quelles sont les variables libres et quelles sont les variables liées (muettes).

On portera une attention toute particulière à ce que les objets soient correctement introduits avant d'être utilisés, et ne soient pas introduits pour rien.

1 Chapitre XVII : Convergence et approximation

1.1 Définitions

- Convergence en loi.
  (On a vu la notion de convergence simple d'une suite de fonctions en cours pour préparer la définition de la convergence en loi, mais cette notion est hors-programme)

1.2 Résultats

- Inégalité de Markov. Conséquence pour une v.a.r. admettant un moment d'ordre m.
- Inégalité de Bienaymé-Tchebychev.
- Loi faible des grands nombres.
- Traduction de la convergence en loi dans deux cas particuliers (v.a.r. à densité et v.a.r. discrètes à valeurs dans $\mathbb{N}$ ou $\mathbb{Z}$). Il faut aussi avoir en tête le cas particulier d'une chaîne de Markov (suite de v.a.r. discrètes finies à valeurs dans $[\![1, r]\!]$ ou $[\![0, r]\!]$ selon les exercices).
- Convergence en loi de (X_n) où $X_n \hookrightarrow \mathcal{B}\left(n, \frac{\lambda}{n}\right)$ avec $\lambda > 0$. Il faut savoir refaire le calcul, car il illustre plusieurs techniques importantes qui peuvent servir ailleurs.
- Théorème central limite (TCL).
- Si S_n^* converge en loi vers $Z \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$ d'après le TCL, alors pour n suffisamment grand, la v.a.r. $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ suit approximativement la loi $\mathcal{N}\left(nm, n\sigma^2\right)$ (où $m = \mathbb{E}(X_i)$ et $\sigma^2 = \mathbb{V}(X_i)$). Ce résultat n'est pas à connaître par coeur, il faut par contre connaître la méthode et savoir le retrouver rapidement. On pourra retenir par coeur que la loi de S_n est approchée par une loi normale dont il faut déterminer les paramètres par le calcul.

1.3 Méthodes

Pour montrer que (X_n) converge en loi vers X, on est amené à fixer $x \in \mathbb{R}$ et à séparer des cas avant de calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} F_{X_n}(x)$.

- Il est `IMPERATIF` de ne faire que des cas qui ne dépendent pas de n. Autrement dit, on doit fixer x dans un intervalle qui ne dépend pas de n.

- Au brouillon, on fait les « limites d'intervalles de définitions de F_{X_n} », ce qui donne les cas à séparer.
- On écrit les différents cas avec des inégalités `STRICTES`, ce qui revient à se placer sur des intervalles `OUVERTS`.
- On réfléchit à la fin aux points de recollement. En général on peut les rajouter à l'un des cas précédents gratuitement. Si ce n'est pas le cas, on les traite à part (un cas pour chaque point de recollement qui pose problème). On gardera en tête que la limite ne nous intéresse que si x est un point de continuité de F_X (pour ne pas faire de calculs inutiles).

2 Chapitre XVIII : Estimation

2.1 Définitions

- Notion de n-échantillon et d'observation.
- Estimateur de θ. Estimation de θ.
- Estimateur moyenne empirique.
- Fonction de vraisemblance et estimateur du maximum de vraisemblance.
- Intervalle de confiance. Intervalle de confiance asymptotique.
  Le programme officiel ne traite que des intervalles de confiance de l'espérance mathématique faisant intervenir l'estimateur de moyenne empirique.

2.2 Résultats

Il n'y a aucun théorème au programme à connaître par coeur, seulement des méthodes.

2.3 Méthodes

- Il faut savoir mettre en oeuvre la méthode du maximum de vraisemblance pour construire l'estimateur du maximum de vraisemblance.
- Il faut savoir construire un intervalle de confiance (exact) avec l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.
  (Seulement dans le cadre de l'estimation du paramètre p d'une loi de Bernoulli, à l'aide de l'estimateur moyenne empirique)
- Il faut savoir construire un intervalle de confiance asymptotique avec le théorème central limite.
  (Seulement dans le cadre de l'estimation du paramètre p d'une loi de Bernoulli, à l'aide de l'estimateur moyenne empirique)

3 Questions de cours

1. Citer puis démontrer l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev à l'aide de l'inégalité de Markov.
2. Citer puis démontrer la loi faible des grands nombres à l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.
3. Citer le théorème central limite et démontrer que $S_n^* = \overline{X}_n^*$.
4. Soit $\lambda > 0$. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de v.a.r. . On suppose que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $X_n \hookrightarrow \mathcal{B}\left(n, \dfrac{\lambda}{n}\right)$. Montrer que $X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathscr{L}} X$ où $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$.
5. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de v.a.r. . On suppose que : $\forall n \geq 3$, $X_n \hookrightarrow \mathcal{U}([\frac{1}{n}, 1-\frac{1}{n}])$. Montrer que $X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathscr{L}} X$ où $X \hookrightarrow \mathcal{U}([0,1])$. (exo 7 du TD reformulé)
6. Définition de la fonction de vraisemblance dans le cas discret et calcul de l'estimateur du maximum de vraisemblance pour la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$. `(exo 4)`
7. Définition de la fonction de vraisemblance dans le cas à densité et calcul de l'estimateur du maximum de vraisemblance pour la loi uniforme $\mathcal{U}([0,\theta])$. `(exo 6)`