

Sujets de révisions

Analyse (fonctions, suites, séries, intégrales)

EML 2023 - fonction d'une variable, suite récurrente (cas où la fonction f est décroissante)

Pour $x \in]0, +\infty[$ on pose : $f(x) = \frac{e^{-x}}{x}$.

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et par la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$, valable pour tout entier naturel n .

1. a) Étudier les variations de la fonction $f : x \mapsto f(x)$ (on dressera son tableau de variations, en précisant les limites).

b) Vérifier que chaque terme de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est correctement défini et strictement positif.

2. Informatique.

a) Recopier et compléter la fonction **Python** suivante afin que l'appel `fonc_1(a)` renvoie le plus petit entier n tel que $u_n > a$.

```

1 def fonc_1(a):
2     from numpy import exp
3     u=1
4     n=0
5     while ..... :
6         u = exp(-u)/u
7         n=....
8     return n
```

b) On considère maintenant la fonction **Python** :

```

1 def fonc_2(a):
2     from numpy import exp
3     u=1
4     n=0
5     while u>a :
6         u = exp(-u)/u
7         n=n+1
8     return n
```

Les appels `fonc_1(10**6)` et `fonc_2(10**(-6))` donnent respectivement 6 et 5.

Qu'en déduire pour u_5 et u_6 ?

Commenter ce résultat en une ligne.

c) Écrire une fonction **Python** qui a pour argument un entier n et qui renvoie la valeur de u_n .

3. Pour $x \in [0, +\infty[$ on pose $g(x) = e^{-x} - x^2$.

a) Démontrer que la fonction $g : x \mapsto g(x)$ réalise une bijection de $[0, +\infty[$ sur $]-\infty, 1]$.

b) En déduire que l'équation $f(x) = x$, d'inconnue x , possède une unique solution dans l'intervalle $]0, +\infty[$, que l'on notera α .

c) Justifier que $\frac{1}{e} < \alpha < 1$. On rappelle que $e \simeq 2,7$.

4. **a)** Démontrer que l'on a : $u_2 > u_0$.
- b)** En déduire que la suite $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.
- c)** Justifier que la suite $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ converge.
5. Pour $x \in]0, +\infty[$ on pose : $h(x) = f \circ f(x)$. On pose également $h(0) = 0$.
- a)** Soit x un réel strictement positif. Déterminer $h(x)$.
- b)** Démontrer que la fonction $h : x \mapsto h(x)$ est continue sur $[0, +\infty[$.
- c)** Démontrer que l'équation $h(x) = x$, d'inconnue x , admet exactement deux solutions sur $[0, +\infty[$ qui sont 0 et α , α étant le réel introduit à la question **3.b**).
- d)** En déduire la limite de la suite $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$.
6. La suite $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ est-elle majorée ? Admet-elle une limite ?

EML 2018 - fonction d'une variable, suite récurrente, intégrale fonction de ses bornes, fonction de deux variables

Dans tout cet exercice, f désigne la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par :

$$\forall x \in]0, +\infty[, f(x) = x - \ln(x)$$

Partie I : Étude de la fonction f

1. Dresser le tableau de variations de f en précisant ses limites en 0 et en $+\infty$.
2. Montrer que l'équation $f(x) = 2$, d'inconnue $x \in]0, +\infty[$, admet exactement deux solutions, que l'on note a et b , telles que $0 < a < 1 < b$.
3. Montrer : $b \in [2, 4]$. On donne : $\ln(2) \simeq 0,7$.
4. Recopier et compléter le script **Python** suivant afin qu'il renvoie une valeur approchée de b à 10^{-4} près, obtenue à l'aide de la méthode par dichotomie.

```

1 import numpy as np
2 a,b = 2,4
3 while _____ :
4     c = (a + b) / 2
5     if _____ :
6         b = c
7     else :
8         a = c
9 print(_____)
```

Partie II : Étude d'une suite

On pose : $u_0 = 4$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \ln(u_n) + 2$.

5. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien définie et que l'on a : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in [b, +\infty[$.
6. Écrire une fonction **Python** nommée `suite(n)` qui, prenant en argument un entier n de \mathbb{N} , renvoie la valeur de u_n .
7. Déterminer la monotonie de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$. En déduire qu'elle converge et préciser sa limite.
8. *a)* Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - b \leq \frac{1}{2}(u_n - b)$.
b) En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n - b \leq \frac{1}{2^{n-1}}$.
c) Montrer que la série $\sum (u_n - b)$ est convergente.
9. *a)* Recopier et compléter la ligne **3** de la fonction **Python** suivante afin que, prenant en argument un réel `epsilon` strictement positif, elle renvoie une valeur approchée de b à `epsilon` près.

```

1 def valeur_approchee(epsilon):
2     n = 0
3     while .....
4         n = n + 1
5     return suite(n)
```

- b) Écrire une fonction **Python** nommée **Somme(n)** qui, prenant en argument un entier n de \mathbb{N} , renvoie la valeur de la somme partielle $\sum_{k=0}^n (u_k - b)$.

Partie III : Étude d'une fonction définie par une intégrale

On note Φ la fonction donnée par :

$$\Phi(x) = \int_x^{2x} \frac{1}{f(t)} dt$$

10. Montrer que Φ est bien définie et dérivable sur $]0, +\infty[$, et que l'on a :

$$\forall x \in]0, +\infty[, \Phi'(x) = \frac{\ln(2) - \ln(x)}{(x - \ln(x))(2x - \ln(2x))}$$

11. En déduire les variations de Φ sur $]0, +\infty[$.

12. Montrer : $\forall x \in]0, +\infty[, 0 \leq \Phi(x) \leq x$.

13. a) Montrer que Φ est prolongeable par continuité en 0.

On note encore Φ la fonction ainsi prolongée. Préciser alors $\Phi(0)$.

- b) Montrer : $\lim_{x \rightarrow 0} \Phi'(x) = 0$.

On admet que la fonction Φ est alors dérivable en 0 et que $\Phi'(0) = 0$.

14. Compléter le script suivant pour qu'il calcule une approximation de $\Phi(2)$. On implémentera la méthode de Monte-Carlo :

```

1 def f(x):
2     return _____
3
4 N = 10**4
5 S = 0
6 for i in range(N):
7     U = rd.uniform(2,4)
8     S = _____
9 print(_____)
```

15. On donne $\Phi(2) \simeq 1,1$ et on admet que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \Phi(x) = \ln(2) \simeq 0,7$.

Tracer l'allure de la courbe représentative de la fonction Φ ainsi que la tangente à la courbe au point d'abscisse 0.

Partie IV : Étude d'une fonction de deux variables

On considère la fonction H de classe \mathcal{C}^2 sur l'ouvert $U =]0, +\infty[^2$ définie par :

$$\forall (x, y) \in]0, +\infty[^2, H(x, y) = \frac{x^2}{2} - xy - 2x + e^y$$

16. a) Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 de H en tout (x, y) de U .

- b) Montrer que la fonction H admet exactement deux points critiques : $(a, \ln(a))$ et $(b, \ln(b))$, où les réels a et b sont ceux introduits dans la question 2.

17. a) Écrire la matrice hessienne, notée M_a , de H au point $(a, \ln(a))$.

b) Montrer que M_a admet deux valeurs propres distinctes, notées λ_1 et λ_2 , vérifiant

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 & = & a + 1 \\ \lambda_1 \lambda_2 & = & a - 1 \end{cases}$$

c) La fonction H présente-t-elle un extremum local au point $(a, \ln(a))$?

18. La fonction H présente-t-elle un extremum local au point $(b, \ln(b))$?

ECRICOME 2024 - équation différentielle d'ordre 1, intégrale impropre, intégrale à paramètre, loi normale

Soit a un réel. On considère la fonction I_a définie par :

$$I_a(x) = \int_x^{+\infty} e^{2a(x-t)-t^2} dt.$$

On considère également l'intégrale J_a définie par :

$$J_a = \int_0^{+\infty} e^{-2at-t^2} dt.$$

Partie I

1. a) Montrer la relation suivante :

$$e^{-2at-t^2} = o_{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{t^2} \right)$$

b) En déduire que l'intégrale J_a est convergente.

2. En déduire que la fonction I_a est définie sur \mathbb{R} .

3. a) Justifier que :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_x^{+\infty} e^{-2at-t^2} dt = 0.$$

b) Dans cette question uniquement, on suppose que a est positif.

Montrer que, pour tout réel x :

$$I_a(x) \leq \int_x^{+\infty} e^{-t^2} dt$$

c) Déduire des deux questions précédentes que, quelle que soit la valeur du réel a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} I_a(x) = 0$.

Partie II

On considère l'équation différentielle suivante, d'inconnue $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable :

$$y' = 2ay - e^{-x^2} \quad (1)$$

Dans cette partie, on s'intéresse aux solutions de l'équation (1) qui vérifient $\lim_{x \rightarrow +\infty} y(x) = 0$.

On considère l'équation homogène associée à (1) :

$$y' = 2ay \quad (2)$$

4. Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation homogène (2).

5. On considère la fonction F_a définie sur \mathbb{R} par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, F_a(x) = \int_0^x e^{-2at-t^2} dt.$$

a) Montrer que F_a est dérivable sur \mathbb{R} et, pour tout réel x , déterminer $F_a'(x)$.

b) Montrer que, pour tout réel x ,

$$I_a(x) = e^{2ax} (J_a - F_a(x))$$

c) En déduire que la fonction I_a est dérivable sur \mathbb{R} et qu'elle est solution de l'équation différentielle (1).

6. Déterminer l'ensemble des solutions de (1).
7. Déterminer l'ensemble des solutions y de (1) telles que $\lim_{x \rightarrow +\infty} y(x) = 0$ dans les trois cas suivants :
- a) $a < 0$,
 - b) $a = 0$,
 - c) $a > 0$.

On pourra utiliser le résultat de la question 3.c).

Partie III

On considère une variable aléatoire X de loi normale d'espérance $-a$ et de variance $\frac{1}{2}$.

8. a) Rappeler l'expression d'une densité de X .
- b) Tracer l'allure de sa courbe représentative dans le cas $a = 2$.
9. Soit x un réel.
- a) Exprimer $\mathbb{P}([X \geq x])$ sous forme d'intégrale.
 - b) En déduire :

$$I_a(x) = \sqrt{\pi} e^{2ax+a^2} \mathbb{P}([X \geq x]).$$

10. a) Soit Z une variable aléatoire de loi normale centrée réduite.
Déterminer, en fonction de a , deux réels α et β tels que $\alpha Z + \beta$ suit la même loi que X .
- b) Recopier et compléter la fonction **Python** suivante, prenant en arguments d'entrée les réels a et x , pour qu'elle renvoie une estimation de la probabilité $\mathbb{P}([X \geq x])$.

```

1  import numpy as np
2  import numpy.random as rd
3  def estim_proba(a, x):
4      num = 0
5      for i in range(10000):
6          Z = rd.normal()
7          X = _____ + Z/_____
8          if _____:
9              num = num + 1
10     return _____

```

11. Écrire une fonction **Python**, nommée `approx_I`, prenant en arguments d'entrée les réels a et x et renvoyant une valeur approchée de $I_a(x)$.

ECRICOME 2022 - fonction d'une variable, suite récurrente, fonction de deux variables

Pour tout réel $x > 0$, on pose :

$$g(x) = \exp\left(\left(2 - \frac{1}{x}\right)\ln(x)\right)$$

Partie I : Étude de la fonction g

1. Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$.

2. Soit h la fonction définie sur \mathbb{R}_+^* par :

$$\forall x > 0, \quad h(x) = \ln(x) + 2x - 1$$

a) Démontrer que la fonction h est strictement croissante sur \mathbb{R}_+^* .

b) Démontrer qu'il existe un unique réel $\alpha > 0$ tel que : $h(\alpha) = 0$. Justifier : $\frac{1}{2} < \alpha < 1$.

c) Démontrer : $\forall x > 0, g'(x) = \frac{1}{x^2} h(x) g(x)$.

d) En déduire les variations de la fonction g sur \mathbb{R}_+^* .

3. Démontrer :

$$g(x) - x^2 \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} -x \ln(x)$$

Partie II : Étude d'une suite récurrente

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par son premier terme $u_0 > 0$ et la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = g(u_n)$$

4. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , u_n existe et : $u_n > 0$.

5. Écrire une fonction **Python** qui prend en argument un réel u_0 et un entier n et renvoie sous forme de matrice ligne la liste des $n + 1$ premières valeurs de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de premier terme $u_0 = u_0$.

6. a) Étudier le signe de $(x - 1) \ln(x)$ pour $x > 0$.

b) Démontrer : $\forall x > 0, \frac{g(x)}{x} \geq 1$.

c) En déduire que pour tout réel $x > 0$, on a $g(x) \geq x$, et que l'équation $g(x) = x$ admet 1 comme unique solution.

7. Étudier les variations de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

8. Dans cette question uniquement, on suppose : $u_0 \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$.

a) Démontrer : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$.

b) En déduire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge, et déterminer sa limite.

9. Dans cette question uniquement, on suppose : $u_0 > 1$.

a) Démontrer : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 1$.

b) Démontrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$.

10. Dans cette question uniquement, on suppose : $0 < u_0 < \frac{1}{2}$.

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est-elle convergente ?

Partie III : Extrema de la fonction f

Pour tout couple $(x, y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$, on note :

$$f(x, y) = x^{y - \frac{1}{x}} = \exp\left(\left(y - \frac{1}{x}\right) \ln(x)\right)$$

11. Démontrer que la fonction f est de classe \mathcal{C}^2 sur l'ouvert $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$.

12. Démontrer :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}, \quad \begin{cases} \partial_1(f)(x, y) = \frac{\ln(x) + xy - 1}{x^2} f(x, y) \\ \partial_2(f)(x, y) = \ln(x) f(x, y) \end{cases}$$

13. Montrer que la fonction f admet un unique point critique a et préciser les coordonnées de a .

14. Montrer que la matrice hessienne de f au point a est $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

15. La fonction f admet-elle en a un extremum local ?

16. Démontrer que la fonction f n'admet pas d'extremum global sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$.

ECRICOME 2012 - fonction d'une variable définie par morceaux, continuité, dérivabilité, développement limité, suite d'intégrales

Partie I. Étude d'une fonction f .

On considère la fonction définie sur l'ensemble des réels positifs par :

$$f : x \mapsto \begin{cases} \frac{1 - e^{-x}}{x} & \text{si } x > 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

1. À l'aide d'un développement limité d'ordre 2 au voisinage de 0, montrer que f est continue sur $[0, +\infty[$.
2. Montrer que f est dérivable en 0 et donner la valeur de $f'(0)$.
3. Justifier la dérivabilité de f sur l'intervalle $]0, +\infty[$ puis déterminer la fonction φ telle que :

$$\forall x > 0, \quad f'(x) = \frac{\varphi(x)}{x^2}$$

4. Étudier les variations de φ . En déduire le tableau de variation f qui sera complété par la limite de f en $+\infty$.

Partie II. Étude d'une suite.

On introduit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \int_0^n \frac{e^{-\frac{u}{n}}}{1+u} du$$

5. Démontrer, pour tout entier naturel n non nul :

$$u_n \geq \frac{1}{e} \ln(n+1)$$

Donner la limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

6. Prouver l'existence de l'intégrale $\int_0^1 f(x) dx$.

7. Utiliser un changement de variable affine pour montrer que, pour tout entier naturel n non nul :

$$0 \leq \int_0^n \frac{1}{1+u} du - u_n \leq \int_0^1 f(x) dx$$

8. Donner alors un équivalent simple de u_n lorsque n tend vers $+\infty$.

ECRICOME 2020 - fonction d'une variable, intégrale fonction de ses bornes, suite implicite, fonction de deux variables

Pour tout entier naturel non nul, on définit la fonction f_n sur \mathbb{R}_+ par :

$$\forall x \geq 0, f_n(x) = \int_0^x \frac{t^{2n} - 1}{t + 1} dt$$

Partie A : Étude de la fonction f_n

Dans cette partie, on fixe un entier naturel n non nul.

1. Démontrer que la fonction f_n est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}_+ et :

$$\forall x \geq 0, f'_n(x) = \frac{x^{2n} - 1}{x + 1}$$

2. Étudier les variations de f_n .

3. Démontrer que f_n est de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R}_+ , et calculer sa dérivée seconde.
En déduire que f_n est convexe sur \mathbb{R}_+ .

4. a) Démontrer : $\forall t \geq 1, t^{2n} - 1 \geq n(t^2 - 1)$.

b) Montrer alors : $\forall x \geq 1, f_n(x) \geq f_n(1) + \frac{n}{2}(x - 1)^2$.

c) En déduire la limite de $f_n(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

5. Calculer $f_n(0)$, puis démontrer : $f_n(1) < 0$.

6. Démontrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution strictement positive, et que cette solution est strictement supérieure à 1.
On note x_n cette solution.

Partie B : Étude d'une suite implicite

On étudie dans cette partie le comportement de la suite (x_n) , où pour tout entier naturel n non nul, x_n est l'unique solution strictement positive de l'équation : $f_n(x) = 0$.

On admettra :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, x_n \geq \frac{2n + 2}{2n + 1}$$

7. Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Démontrer :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, f_{n+1}(x) - f_n(x) = x^{2n+1} \left(\frac{x}{2n + 2} - \frac{1}{2n + 1} \right)$$

8. a) Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \geq \frac{2n + 2}{2n + 1}, f_{n+1}(x) \geq f_n(x)$.

b) En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}^*, f_{n+1}(x_n) \geq 0$.

c) Montrer alors que la suite (x_n) est décroissante, puis qu'elle est convergente.

9. a) Démontrer que pour tout entier $n \geq 1$: $-\ln(2) \leq f_n(1) \leq 0$.

b) À l'aide de l'inégalité démontrée à la question 4.b) de la partie A, montrer alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 \leq x_n - 1 \leq \sqrt{\frac{2 \ln(2)}{n}}$$

Quelle est la limite de x_n lorsque n tend vers $+\infty$?

Partie C : Étude d'une fonction de deux variables

Dans cette partie, on fixe à nouveau un entier naturel n non nul.

L'objectif de cette partie est d'étudier la fonction G_n définie sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ par :

$$G_n : (x, y) \mapsto f_n(x) \times f_n(y)$$

10. Justifier que la fonction G_n est de classe \mathcal{C}^2 sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ et calculer ses dérivées partielles premières.
11. Déterminer l'ensemble des points critiques de G_n .
12. Calculer la matrice hessienne de G_n au point (x_n, x_n) puis au point $(1, 1)$.
13. La fonction G_n admet-elle un extremum local en (x_n, x_n) ? Si oui, donner la nature de cet extremum.
14. La fonction G_n admet-elle un extremum local en $(1, 1)$? Si oui, donner la nature de cet extremum.

EDHEC 2021 - fonction de deux variables, fonction d'une variable, suite implicite

Soit f la fonction de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ dans \mathbb{R} définie par :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \quad f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$$

Partie 1

1. Justifier que f est de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R}^2 .
2. *a)* Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 de f .
b) Déterminer les points critiques de f .
3. *a)* Calculer les dérivées partielles d'ordre 2 de f .
b) Vérifier que f ne présente un extremum local qu'en un de ses points critiques et préciser sa nature et sa valeur.
4. Cet extremum est-il global ?

Partie 2

On note g la fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{R} définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = f(x, 1)$$

5. Montrer que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 4, l'équation $g(x) = n$, d'inconnue x , possède une unique solution que l'on notera u_n .
6. On note h la restriction de g à $[1, +\infty[$.
a) Déterminer le tableau de variations de h^{-1} .
b) En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.
c) En déduire, en revenant à la définition de u_n , le réel α pour lequel on a : $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n^\alpha$.

EDHEC 2020 - suites d'intégrales, série, suite extraite, relations de récurrence

On convient que, pour tout réel x , on a : $x^0 = 1$.

1. Pour tout n de \mathbb{N} , justifier l'existence des intégrales :

$$I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{(1+x)^2} dx \quad \text{et} \quad J_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx$$

2. Calculer I_0 et I_1 .

3. a) Pour tout n de \mathbb{N} , calculer $I_{n+2} + 2I_{n+1} + I_n$.

b) En déduire I_2 .

c) Compléter le script **Python** suivant pour qu'il permette le calcul de I_n (dans la variable `b`) et son affichage pour une valeur de n entrée par l'utilisateur.

```

1  n = int(input('donnez une valeur pour n : '))
2  a = 1/2
3  b = np.log(2) - 1/2
4  for k in range(2,n+1):
5      aux = a
6      a = -----
7      b = -----
8  print(b)

```

4. a) Démontrer : $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$.

b) En déduire que la suite (I_n) est convergente et donner sa limite.

5. Établir, à l'aide d'une intégration par parties : $\forall n \in \mathbb{N}^*, I_n = n J_{n-1} - \frac{1}{2}$.

6. a) Calculer J_0 puis exprimer, pour tout entier naturel n , $J_n + J_{n+1}$, en fonction de n .

b) En déduire la valeur de J_1 .

7. En utilisant les questions 5. et 6., compléter le script **Python** suivant afin qu'il permette le calcul et l'affichage de I_n pour une valeur de n entrée par l'utilisateur.

```

1  n = int(input('donnez une valeur pour n : '))
2  J = np.log(2)
3  for k in range(1,n):
4      J = -----
5  print(-----)

```

8. Établir : $\forall n \in \mathbb{N}^*, J_n = (-1)^n \left(\ln(2) - \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} \right)$.

9. a) Utiliser les questions 4. et 5. pour déterminer la valeur de $\lim_{n \rightarrow +\infty} J_n$.

b) En déduire la nature de la série de terme général $\frac{(-1)^{k-1}}{k}$ ainsi que la valeur de $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$.

c) Utiliser la question 5. pour déterminer un équivalent de J_n , du type $\frac{1}{\alpha n}$, avec $\alpha > 0$, lorsque n est au voisinage de $+\infty$.

10. Pour tout n de \mathbb{N}^* , on pose : $u_n = \ln(2) - \sum_{j=1}^n \frac{(-1)^{j-1}}{j}$.

a) Dédire des questions précédentes un équivalent de u_n lorsque n est au voisinage de $+\infty$.

b) Montrer que la série de terme général $\frac{(-1)^n}{2n}$ est convergente. Peut-on en déduire la nature de la série de terme général u_n ?

11. On se propose, malgré l'impasse précédente, de montrer que la série de terme général u_n est convergente. Pour ce faire, on admet le résultat suivant : si une suite (x_n) est telle que les suites (x_{2n}) et (x_{2n+1}) sont convergentes et de même limite ℓ , alors la suite (x_n) converge vers ℓ .

Pour tout entier naturel n non nul, on pose : $S_n = \sum_{k=1}^n u_k$.

a) Justifier que, pour tout entier naturel k non nul, on a : $u_k = (k+1)u_{k+1} - k u_k + (-1)^k$.

b) En déduire l'égalité suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad S_n = (n+1)u_{n+1} - u_1 - \frac{1}{2}(1 - (-1)^n)$$

c) Démontrer alors : $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_{2n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_{2n+1} = \frac{1}{2} - \ln(2)$. Conclure.

12. Des trois résultats suivants, expliquer lequel on vient de démontrer :

$$\mathbf{a)} \quad \sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{j=1}^k \frac{(-1)^{j-1}}{j} = \frac{1}{2} - \ln(2) \quad \mathbf{b)} \quad \sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{j-1}}{j} = \frac{1}{2} - \ln(2) \quad \mathbf{c)} \quad \sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{j=k+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{j-1}}{j} = \frac{1}{2} - \ln(2)$$

EDHEC 2009 (voie S) - intégrale impropre, intégrale à paramètre, suite d'intégrales, développement limité, série

On désigne par α un entier strictement supérieur à 1 et on pose, pour tout entier naturel n non nul :

$$u_n(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^\alpha)^n}$$

Dans la suite de l'exercice, on écrira u_n au lieu de $u_n(\alpha)$.

1. a. Vérifier que, pour tout n de \mathbb{N}^* , le réel u_n est bien défini et que $u_n > 0$.

b. Etudier les variations de la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ et en conclure qu'elle converge.

2. a. Montrer, grâce à une intégration par parties, que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = n\alpha(u_n - u_{n+1})$.

b. En déduire que, pour tout entier n supérieur ou égal à 2, on a : $u_n = u_1 \prod_{k=1}^{n-1} \left(1 - \frac{1}{k\alpha}\right)$.

3. Montrer, en considérant $\ln(u_n)$, que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

4. Pour tout n de \mathbb{N}^* , on pose $S_n = \sum_{k=1}^n u_k$.

a. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \frac{n\alpha}{\alpha-1} u_{n+1}$.

b. En déduire que : $\forall n \geq 2$, $\ln(S_n) = \ln(u_1) + \sum_{k=2}^n \left(\ln\left(1 - \frac{1}{k\alpha}\right) - \ln\left(1 - \frac{1}{k}\right) \right)$.

c. A l'aide d'un développement limité d'ordre 1 en $\frac{1}{k}$, donner un équivalent, lorsque k est au voisinage de $+\infty$, de $\ln\left(1 - \frac{1}{k\alpha}\right) - \ln\left(1 - \frac{1}{k}\right)$.

d. Conclure quant à la nature de la série de terme général u_n .

5. Dans cette question, on suppose que $\alpha = 2$ et on admet qu'alors $u_1 = \frac{\pi}{2}$.

On rappelle qu'à l'aide de la bibliothèque `numpy` (importée sous l'alias `np`), on accède à la commande `np.pi` qui renvoie une valeur approchée du nombre π .

Ecrire une fonction **Python** qui

- prend en argument un entier `n` supérieur ou égal à 2
- renvoie la valeur de u_n .