DS7 (vA) - Concours blanc

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidat·es sont invité·es à ***encadrer*** *dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*
Aucun document n'est autorisé. ***L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique*** *est* ***interdite****. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*
Si au cours de l'épreuve, un candidat ou une candidate repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

On suppose, et c'est valable pour toute l'épreuve, que la librairie suivante est importée sous son alias habituel :

- `import numpy as np`
- `import numpy.linalg as al`
- `import numpy.random as rd`
- `import matplotlib.pyplot as plt`

Exercice 1

Les parties B et C sont indépendantes de la partie A.

Partie A : résolution d'un système différentiel

On considère l'équation différentielle

$$(E): \quad x'(t) = -x(t) + \mathrm{e}^{-t},$$

où x est une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

1. ***a)*** Résoudre l'équation différentielle homogène $x'(t) = -x(t)$ sur $\mathbb{R}$.

b) Déterminer une solution particulière x_0 de (E) de la forme $x_0 : t \mapsto (at+b)\mathrm{e}^{-t}$ avec $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.

c) Résoudre l'équation différentielle (E).

On s'intéresse maintenant au système différentiel :

$$(S): \quad \begin{cases} x'(t) &= -x(t) + y(t) \\ y'(t) &= -y(t) \end{cases}$$

où x et y désignent des fonctions définies et dérivables sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

2. ***a)*** Donner la matrice $A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ telle que

$$(S) \iff X'(t) = AX(t) \qquad \text{avec} \qquad X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}.$$

La matrice A est-elle diagonalisable ?

b) Justifier l'existence d'une unique solution (x,y) de (S) telle que $x(0) = 1$ et $y(0) = 1$.

c) Déterminer cette solution (x,y) en vous aidant de la question ***1***.

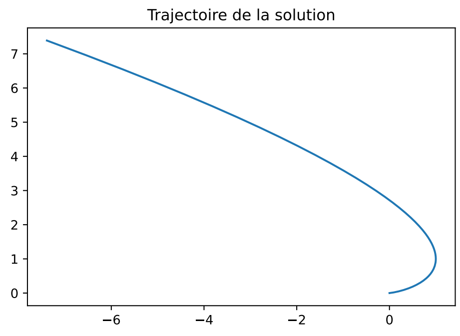
d) Étudier la convergence de la solution (x,y) vers un état d'équilibre lorsque t tend vers $+\infty$.

3. Recopier et compléter le programme en langage **Python** ci-dessous de manière à ce qu'il produise le graphique sur la droite représentant la trajectoire $t \mapsto (x(t), y(t))$ pour $t \in [-2, 10]$.
On rappelle que la commande `np.linspace(-2,10,200)` crée une liste de 200 valeurs régulièrement espacées allant de -2 à 10.

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

T = np.linspace(-2,10,200)
x = [... for t in T]
y = [... for t in T]

plt.title('Trajectoire de la solution')
plt.plot(...)
plt.show()
```



Partie B : Étude d'une suite de fonctions

Pour tout entier $k \in \mathbb{N}^*$, on considère la fonction f_k définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \; f_k(x) = (x+1)\mathrm{e}^{kx}.$$

On note $\mathscr{C}_k$ la courbe de f_k dans le plan muni d'un repère orthonormé.

4. ***a)*** Calculer les limites de la fonction f_k en $-\infty$ et en $+\infty$.

b) Dresser le tableau de variation de f_k en y faisant figurer les valeurs prises par f_k en -1 et en 0.

5. ***a)*** Étudier la position relative des courbes $\mathscr{C}_k$ et $\mathscr{C}_{k+1}$. Vous préciserez leurs points d'intersection.

b) Dessiner sur un même graphique l'allure de $\mathscr{C}_k$ et $\mathscr{C}_{k+1}$.

Partie C : Étude d'une suite implicite

6. ***a)*** Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, l'équation $f_k(x) = k$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}$ notée u_k.

b) Déterminer explicitement u_1.

7. Montrer que, pour tout entier $k \geqslant 1$, on a :

$$0 \leqslant u_k \leqslant \frac{\ln(k)}{k}.$$

En déduire que la suite (u_k) converge et donner sa limite.

8. ***a)*** Soit $k \geqslant 1$ un entier, montrer que :

$$u_k = \frac{\ln(k)}{k} - \frac{\ln(u_k + 1)}{k}$$

b) En déduire que $u_k \sim \dfrac{\ln(k)}{k}$ lorsque k tend vers $+\infty$.

9. Quelle est la nature de la série $\sum\limits_{k \geqslant 1} u_k$?

Exercice 2

Une urne contient des boules blanches, des boules rouges et des boules vertes.

- La proportion de boules blanches est b.
- La proportion de boules rouges est r.
- La proportion de boules vertes est v.

Ainsi, on a :

$$0 < b < 1, \qquad 0 < r < 1, \qquad 0 < v < 1, \qquad \text{et} \qquad b + r + v = 1$$

On effectue des tirages successifs d'une boule avec remise et on s'arrête au premier changement de couleur.
Pour tout entier naturel i supérieur ou égal à 1, on note B_i (respectivement R_i ; V_i) l'événement « la i^{e} boule tirée est blanche (respectivement rouge ; verte) ».
On note X la variable aléatoire égale au nombre de tirages effectués. Par exemple, lorsque le résultat des tirages est `verte, verte, rouge`, la variable aléatoire X prend la valeur 3.

Partie I - Étude de la variable aléatoire X

1. Préciser les valeurs possibles de X.

2. Montrer que, pour tout entier k supérieur ou égal à 2 :

$$\mathbb{P}([X = k]) = (1-b)b^{k-1} + (1-r)r^{k-1} + (1-v)v^{k-1}$$

(On commencera par décrire l'événement $[X = k]$ à l'aide des événements B_i, R_i et V_i)

3. ***a)*** Montrer que, pour tout $x \in]0,1[$:

$$\sum_{k=2}^{+\infty} (1-x)kx^{k-1} = \frac{1}{1-x} + x - 1$$

b) En déduire que la variable aléatoire X admet une espérance et que :

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{1-b} + \frac{1}{1-r} + \frac{1}{1-v} - 2$$

Partie II - Étude d'une fonction de deux variables

On considère la fonction f de classe $\mathcal{C}^2$ sur l'ouvert $U =]0,1[\times]0,1[$ définie par :

$$\forall (x,y) \in U,\ f(x,y) = \frac{1}{1-x} + \frac{1}{1-y} + \frac{1}{x+y}$$

4. Calculer, pour tout $(x,y) \in U$, $\partial_1(f)(x,y)$ et $\partial_2(f)(x,y)$.

5. Montrer qu'il existe un unique point (x_0, y_0) de U en lequel f est susceptible de posséder un extremum local et déterminer (x_0, y_0).

6. Montrer que f admet en (x_0, y_0) un minimum local.

7. ***a)*** Exprimer $\mathbb{E}(X)$ en fonction de $f(b,r)$.

b) Que peut-on dire de $\mathbb{E}(X)$ lorsque $b = r = v = \dfrac{1}{3}$?

Partie III - Étude d'une variable aléatoire à densité

8. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{3^t}\, dt$ est convergente et déterminer sa valeur. *(On rappelle que* $3^t = e^{t\ln(3)}$*)*

On note $\alpha = \displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{3^t}\, dt$ et on considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ g(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \in]-\infty, 2[\\ \dfrac{1}{\alpha 3^t} & \text{si } t \in [2, +\infty[\end{cases}$$

9. Vérifier que g est une densité de probabilité.
On note Y une variable aléatoire admettant g comme densité.

10. Montrer que Y admet une espérance et calculer cette espérance.

11. On note Z la variable aléatoire égale à la partie entière de Y. On rappelle que la partie entière d'un nombre réel x est le plus grand entier inférieur ou égal à x.

a) Déterminer la loi de probabilité de Z.

b) Comparer la loi de probabilité de X lorsque $b = r = v = \dfrac{1}{3}$ et la loi de probabilité de Z.

Partie IV - Simulation informatique

12. On note T la variable aléatoire prenant la valeur 0 (respectivement 1 ; 2) si l'on obtient une boule de couleur blanche (respectivement rouge ; verte) lors d'un unique tirage dans l'urne. Écrire une fonction **Python** `simulT(b,r,v)` prenant en paramètres les réels b, r et v et simulant la variable aléatoire T.

13. Compléter la fonction **Python** suivante pour qu'elle simule la variable aléatoire X.

```
def simulX(b,r,v):
    tirage_initial = ________________
    X = ____
    while ____________________________________:
        X += 1
    return X
```

Exercice 3

On note $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base $\mathscr{B}$ est la matrice A donnée par :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -5 \\ -2 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

On considère également l'endomorphisme g de $\mathbb{R}^3$ défini par :

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ g(x, y, z) = (x + y - z,\ 2y,\ -x + y + z)$$

Enfin, on pose :

$$u = e_1 - e_2 = (1, -1, 0) \quad \text{et} \quad v = f(e_1) + e_1$$

1. ***a)*** Calculer v.

b) Montrer que la famille $\mathcal{C} = (u, v, e_1)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

c) On note P la matrice de passage de la base $\mathscr{B}$ à la base $\mathcal{C}$.
Expliciter la matrice P et calculer P^{-1}.

2. ***a)*** Déterminer la matrice A' de f dans la base $\mathcal{C}$.

b) Expliciter le lien entre les matrices A, A', P et P^{-1}.

c) En déduire les valeurs propres de A. La matrice A est-elle diagonalisable ?

d) L'endomorphisme f est-il bijectif ?

3. ***a)*** Déterminer la matrice B de g dans la base $\mathscr{B}$.

b) Montrer : $B^2 = 2\,B$.

c) En déduire les valeurs propres de B, ainsi qu'une base de chaque sous-espace propre.

d) La matrice B est-elle diagonalisable ?

On pose : $\mathcal{E} = \{M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R}) \mid BM = MA\}$.

4. ***a)*** Montrer que $\mathcal{E}$ est un espace vectoriel.

b) Soit M une matrice appartenant à $\mathcal{E}$.
Montrer que M n'est pas inversible. *(On pourra raisonner par l'absurde).*

5. On cherche à montrer que $\mathcal{E}$ n'est pas réduit à l'ensemble $\{0\}$.

a) Justifier que, pour tout réel λ, les matrices $A - \lambda\, I_3$ et $({}^tA) - \lambda\, I_3$ ont même rang, la matrice I_3 désignant la matrice identité de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

b) En déduire que les matrices B et ${}^tA$ admettent une valeur propre en commun, notée α.

c) Soient X un vecteur propre de B associé à la valeur propre α, et Y un vecteur propre de ${}^tA$ associé à la valeur propre α. On note : $N = X\,{}^tY$.
Montrer que la matrice N est non nulle et que N appartient à $\mathcal{E}$.

d) En déduire : $\dim(\mathcal{E}) \geqslant 2$.

Exercice 4

Toutes les variables aléatoires rencontrées dans cet exercice sont supposées définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ que l'on ne cherchera pas à déterminer.

1. Soit f la fonction qui à tout réel x associe

$$f(x) = \begin{cases} x\mathrm{e}^{-x^2/2} & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

a) Montrer que f peut être considérée comme densité d'une certaine variable aléatoire X.

b) Rappeler la valeur du moment d'ordre 2 d'une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite.

c) En déduire, par des considérations de parité, que X a une espérance et que $\mathbb{E}(X) = \sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$.

2. On note F_X la fonction de répartition de X. Déterminer $F_X(x)$ selon que $x < 0$ ou $x \geqslant 0$.

3. Simulation

a) On pose $Z = X^2$ et on note F_Z sa fonction de répartition. Déterminer $F_Z(x)$ dans chacun des cas $x < 0$ et $x \geqslant 0$ et montrer que Z suit une loi exponentielle dont on précisera le paramètre.

b) Utiliser la question ***3.a)*** pour écrire une fonction **Python** d'en-tête `def simulX()` qui renvoie une simulation de X.

4. Pour tout entier naturel n non nul, on pose $Y_n = \dfrac{X}{\sqrt{n}}$ et on note G_n la fonction de répartition de Y_n.

a) Montrer que l'on a :

$$G_n(x) = \begin{cases} 1 - \mathrm{e}^{-nx^2/2} & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

b) Étudier la convergence en loi de la suite $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

c) Montrer que, pour tout réel $\varepsilon > 0$, on a :

$$\lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}(|Y_n| > \varepsilon) = 0$$

5. On considère une suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires mutuellement indépendantes, et suivant toutes la même loi que X. Pour tout entier naturel n non nul, on pose $M_n = \min(X_1, \dots, X_n)$.

a) Exprimer, pour tout réel x, $\mathbb{P}(M_n > x)$ à l'aide de la fonction F_X, puis en déduire que M_n suit la même loi que la variable Y_n présentée à la question ***4***.

b) Compléter la fonction **Python** suivante afin qu'elle renvoie une simulation de M_n à l'appel de `simulM(n)`.

```python
def simulM(n):
    X=np.array([----- for k in range(n)])
    M=-----
    return M
```