DS7 (vA) - Concours blanc - Barème

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidat·es sont invité·es à ***encadrer*** *dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*
Aucun document n'est autorisé. ***L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique*** *est* ***interdite****. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*
Si au cours de l'épreuve, un candidat ou une candidate repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

On suppose, et c'est valable pour toute l'épreuve, que la librairie suivante est importée sous son alias habituel :

- `import numpy as np`
- `import numpy.linalg as al`
- `import numpy.random as rd`
- `import matplotlib.pyplot as plt`

Exercice 1 (EML 2024)

Les parties B et C sont indépendantes de la partie A.

Partie A : Résolution d'un système différentiel

On considère l'équation différentielle

$$(E) : \quad x'(t) = -x(t) + \mathrm{e}^{-t},$$

où x est une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

1. ***a)*** Résoudre l'équation différentielle homogène $x'(t) = -x(t)$ sur $\mathbb{R}$.

- **1 pt : équation différentielle homogène d'ordre** 1**, linéaire, à coefficients constants**
- **1 pt : ses solutions sont de la forme :** $t \mapsto C\mathbf{e}^{-t}$ **où** $C \in \mathbb{R}$

b) Déterminer une solution particulière x_0 de (E) de la forme $x_0 : t \mapsto (at+b)\mathrm{e}^{-t}$ avec $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.

- **1 pt :** x_0 **est dérivable sur** $\mathbb{R}$
- **1 pt :** $x_0'(t) = -x_0(t) + \mathbf{e}^{-t} \iff a = 1$
- **1 pt : la fonction** $x_0 : t \mapsto t\mathbf{e}^{-t}$ **est une solution particulière de** (E)

c) Résoudre l'équation différentielle (E).

- **1 pt : les solutions de** (E) **sont de la forme :** $t \mapsto C\mathbf{e}^{-t} + t\mathbf{e}^{-t}$ **où** $C \in \mathbb{R}$

On s'intéresse maintenant au système différentiel :

$$(S) : \quad \left\{ \begin{array}{rcr} x'(t) & = & -x(t) + y(t) \\ y'(t) & = & -y(t) \end{array} \right.$$

où x et y désignent des fonctions définies et dérivables sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

2. ***a)*** Donner la matrice $A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ telle que

$$(S) \iff X'(t) = AX(t) \qquad \text{avec} \qquad X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}.$$

La matrice A est-elle diagonalisable ?

- **1 pt :** $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
- **1 pt : la matrice** A **est triangulaire supérieure donc ses valeurs propres sont exactement ses coefficients diagonaux. Ainsi,** A **possède une unique valeur propre : le réel** -1
- **2 pt : raisonnement par l'absurde**

b) Justifier l'existence d'une unique solution (x,y) de (S) telle que $x(0) = 1$ et $y(0) = 1$.

- **1 pt : dire qu'il s'agit d'un problème de Cauchy**
- **1 pt : citer le thm de Cauchy (linéaire)**

c) Déterminer cette solution (x,y) en vous aidant de la question ***1***.

- **1 pt : résolution de** $\begin{cases} y'(t) = -y(t) \\ y(0) = 1 \end{cases}$
- **1 pt : résolution de** $\begin{cases} x'(t) = -x(t) + \mathbf{e}^{-t} \\ x(0) = 1 \end{cases}$
- **1 pt : la solution du problème de Cauchy est :** $(x,y) : t \mapsto ((1+t)\mathbf{e}^{-t}, \mathbf{e}^{-t})$

d) Étudier la convergence de la solution (x,y) vers un état d'équilibre lorsque t tend vers $+\infty$.

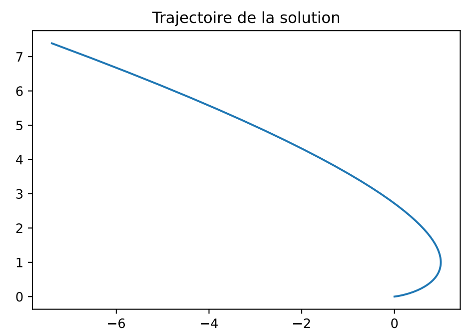
- **1 pt :** $\lim\limits_{t\to+\infty} x(t) = 0$ **par croissances comparées**
- **1 pt : la solution** (x, y) **converge vers l'état d'équilibre** $(0, 0)$ **lorsque** t **tend vers** $+\infty$

3. Recopier et compléter le programme en langage **Python** ci-dessous de manière à ce qu'il produise le graphique sur la droite représentant la trajectoire $t \mapsto (x(t), y(t))$ pour $t \in [-2, 10]$.
On rappelle que la commande `np.linspace(-2,10,200)` crée une liste de 200 valeurs régulièrement espacées allant de -2 à 10.

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

T = np.linspace(-2,10,200)
x = [... for t in T]
y = [... for t in T]

plt.title('Trajectoire de la solution')
plt.plot(...)
plt.show()
```



- **1 pt :** `x = [(1+t) * np.exp(-t) for t in T]`
- **1 pt :** `y = [np.exp(-t) for t in T]`
- **1 pt :** `plt.plot(x,y)`

Partie B : Étude d'une suite de fonctions

Pour tout entier $k \in \mathbb{N}^*$, on considère la fonction f_k définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \ f_k(x) = (x+1)e^{kx}.$$

On note $\mathscr{C}_k$ la courbe de f_k dans le plan muni d'un repère orthonormé.

4. *a)* Calculer les limites de la fonction f_k en $-\infty$ et en $+\infty$.

- **1 pt :** $\lim\limits_{x\to+\infty} f_k(x) = +\infty$
- **1 pt :** $\lim\limits_{x\to-\infty} f_k(x) = 0$ **par croissances comparées**

b) Dresser le tableau de variation de f_k en y faisant figurer les valeurs prises par f_k en -1 et en 0.

- **1 pt :** f_k **est dérivable sur** $\mathbb{R}$ **comme produit de fonctions dérivables sur** $\mathbb{R}$
- **1 pt :** $f_k'(x) = (kx + k + 1)e^{kx}$
- **1 pt :** $f_k'(x) > 0 \iff x > -\dfrac{k+1}{k}$
- **1 pt : tableau de variations de** f_k **:**

x	$-\infty$		$-\frac{k+1}{k}$		-1		0		$+\infty$
Signe de $f_k'(x)$		$-$	0			$+$			
Variations de f_k	0	↘	$-\frac{1}{k}e^{-(k+1)}$	↗	0	↗	1	↗	$+\infty$

5. *a)* Étudier la position relative des courbes $\mathscr{C}_k$ et $\mathscr{C}_{k+1}$. Vous préciserez leurs points d'intersection.

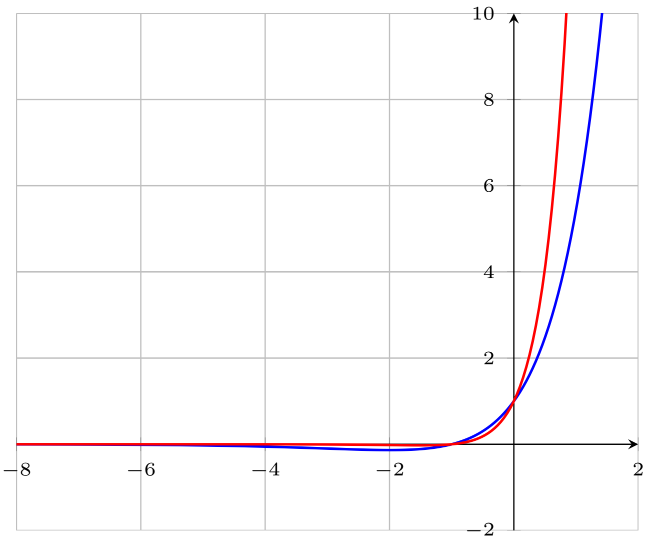
- **1 pt :** $f_{k+1}(x) > f_k(x) \iff (x+1)(e^x - 1) > 0$
- **1 pt : tableau de signes :**

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
Signe de $x+1$		$-$	0		$+$		
Signe de $\mathrm{e}^x - 1$			$-$		0	$+$	
Signe de $(x+1)(\mathrm{e}^x-1)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

- **1 pt :** $\mathscr{C}_{k+1}$ **est en-dessous de** $\mathscr{C}_k$ **sur** $[-1, 0]$ **et au-dessus ailleurs. Les deux courbes s'intersectent en** -1 **et en** 0

b) Dessiner sur un même graphique l'allure de $\mathscr{C}_k$ et $\mathscr{C}_{k+1}$.

- **1 pt : deux points d'intersection correctement placés,**
- **1 pt : position relative correcte**
- **1 pt : monotonie et limites correctes**
- **1 pt : tangente horizontale**
- **1 pt : propreté du dessin**



Partie C : Étude d'une suite implicite

6. *a)* Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, l'équation $f_k(x) = k$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}$ notée u_k.

- **1 pt :** f_k **est :**
  - $\times$ **continue sur** $\mathbb{R}$**,**
  - $\times$ **strictement décroissante sur** $]-\infty, -\frac{k+1}{k}]$**,**
  - $\times$ **strictement croissante sur** $[-\frac{k+1}{k}, +\infty[$**.**
- **2 pt :** f_k **réalise une bijection de** $]-\infty, -\frac{k+1}{k}]$ **sur** $f_k\left(]-\infty, -\frac{k+1}{k}]\right) = [-\frac{1}{k}\mathrm{e}^{-(k+1)}, 0[$**. De plus,** $k \notin [-\frac{1}{k}\mathrm{e}^{-(k+1)}, 0[$ **car** $k > 0$**, donc l'équation** $f_k(x) = k$ **n'admet aucune solution sur** $]-\infty, -\frac{k+1}{k}]$
- **2 pt :** f_k **réalise une bijection de** $[-\frac{k+1}{k}, +\infty[$ **sur** $f_k\left([-\frac{k+1}{k}, +\infty[\right) = [-\frac{1}{k}\mathrm{e}^{-(k+1)}, +\infty[$**. De plus,** $k \in [-\frac{1}{k}\mathrm{e}^{-(k+1)}, +\infty[$ **car** $k > 0$**, donc l'équation** $f_k(x) = k$ **admet une unique solution sur** $[-\frac{k+1}{k}, +\infty[$

b) Déterminer explicitement u_1.

- **1 pt :** $f_1(0) = 1$ **donc** $u_1 = 0$

7. Montrer que, pour tout entier $k \geqslant 1$, on a :

$$0 \leqslant u_k \leqslant \frac{\ln(k)}{k}.$$

En déduire que la suite (u_k) converge et donner sa limite.

- **2 pt :** $f_k(0) \leqslant f_k(u_k) \leqslant f_k\left(\frac{\ln(k)}{k}\right)$
- **1 pt : par stricte croissance de** f_k **sur** $[-\frac{k+1}{k}, +\infty[$**, il vient :** $0 \leqslant u_k \leqslant \frac{\ln(k)}{k}$
- **1 pt :** $\lim\limits_{k\to+\infty} \frac{\ln(k)}{k} = 0$ **par croissances comparées**
- **1 pt :** $\lim\limits_{k\to+\infty} u_k = 0$ **par thm d'encadrement**

8. ***a)*** Soit $k \geqslant 1$ un entier, montrer que :

$$u_k = \frac{\ln(k)}{k} - \frac{\ln(u_k+1)}{k}$$

- **1 pt :** $u_k + 1 > 0$
- **1 pt : composition par** $\ln$

b) En déduire que $u_k \sim \frac{\ln(k)}{k}$ lorsque k tend vers $+\infty$.

- **1 pt :** $\lim\limits_{k\to+\infty} \dfrac{\frac{\ln(u_k+1)}{k}}{\frac{\ln(k)}{k}} = 0$ **car** $u_k \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0$
- **1 pt :** $\lim\limits_{k\to+\infty} \dfrac{u_k}{\frac{\ln(k)}{k}} = 1$

9. Quelle est la nature de la série $\sum\limits_{k\geqslant 1} u_k$?

- **1 pt : pour tout** $k \geqslant 3$**,** $\ln(k) \geqslant 1$ **donc** $0 \leqslant \frac{1}{k} \leqslant \frac{\ln(k)}{k}$
- **1 pt :** $\sum \frac{1}{k}$ **est une série de Riemann divergente**
- **1 pt : par critère de comparaison pour les séries à termes positifs, il suit que la série** $\sum \frac{\ln(k)}{k}$ **est divergente**
- **1 pt : par critère d'équivalence pour les séries à termes positifs,** $\sum u_k$ **est divergente**

Exercice 2 (EML 2004)

Une urne contient des boules blanches, des boules rouges et des boules vertes.

- La proportion de boules blanches est b.
- La proportion de boules rouges est r.
- La proportion de boules vertes est v.

Ainsi, on a :

$$0 < b < 1, \qquad 0 < r < 1, \qquad 0 < v < 1, \qquad \text{et} \qquad b + r + v = 1$$

On effectue des tirages successifs d'une boule avec remise et on s'arrête au premier changement de couleur.
Pour tout entier naturel i supérieur ou égal à 1, on note B_i (respectivement R_i ; V_i) l'événement « la i^{e} boule tirée est blanche (respectivement rouge ; verte) ».
On note X la variable aléatoire égale au nombre de tirages effectués. Par exemple, lorsque le résultat des tirages est `verte, verte, rouge`, la variable aléatoire X prend la valeur 3.

Partie I - Étude de la variable aléatoire X

1. Préciser les valeurs possibles de X.

- **1 pt :** $X(\Omega) = [\![2, +\infty[\![$
- **1 pt : explication en une phrase**

2. Montrer que, pour tout entier k supérieur ou égal à 2 :

$$\mathbb{P}([X = k]) = (1-b)b^{k-1} + (1-r)r^{k-1} + (1-v)v^{k-1}$$

(On commencera par décrire l'événement $[X = k]$ à l'aide des événements B_i, R_i et V_i)

- **2 pt : FPT avec le SCE** (B_1, R_1, V_1)
  OU
  × **1 pt :** $[X = k] = \left(B_1 \cap \dots \cap B_{k-1} \cap \overline{B_k}\right) \cup \left(R_1 \cap \dots \cap R_{k-1} \cap \overline{R_k}\right) \cup \left(V_1 \cap \dots \cap V_{k-1} \cap \overline{V_k}\right)$
  × **1 pt : par incompatibilité**
- **1 pt :** $\mathbb{P}\left(B_1 \cap \dots \cap B_{k-1} \cap \overline{B_k}\right) = \mathbb{P}(B_1)\mathbb{P}_{B_1}(B_2)\dots\mathbb{P}_{B_1\cap\dots\cap B_{k-2}}(B_{k-1})\mathbb{P}_{B_1\cap\dots\cap B_{k-1}}(\overline{B_k})$
- **1 pt :** $\mathbb{P}\left(B_1 \cap \dots \cap B_{k-1} \cap \overline{B_k}\right) = b^{k-1}(1-b)$ **(point donné même si utilisation incorrecte de l'indépendance)**

3. a) Montrer que, pour tout $x \in]0, 1[$:

$$\sum_{k=2}^{+\infty} (1-x)kx^{k-1} = \frac{1}{1-x} + x - 1$$

- **1 pt : la série** $\sum kx^{k-1}$ **est une série géométrique dérivée de raison** x **vérifiant** $|x| < 1$ **donc est convergente**
- **1 pt :** $\sum_{k=1}^{+\infty} kx^{k-1} = \dfrac{1}{(1-x)^2}$
- **1 pt : ajout et retrait du premier terme**

b) En déduire que la variable aléatoire X admet une espérance et que :

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{1-b} + \frac{1}{1-r} + \frac{1}{1-v} - 2$$

- **1 pt : X admet une espérance si et seulement si la série $\sum k\mathbb{P}([X=k])$ converge absolument, ce qui revient à montrer la convergence car il s'agit d'une série à termes positifs**
- **1 pt :**

$$\begin{aligned}\sum_{k=2}^{n} k\mathbb{P}([X=k]) &= \sum_{k=2}^{n} k\Big((1-b)b^{k-1}+(1-r)r^{k-1}+(1-v)v^{k-1}\Big)\\ &= \sum_{k=2}^{n} k(1-b)b^{k-1}+\sum_{k=2}^{n} k(1-r)r^{k-1}+\sum_{k=2}^{n} k(1-v)v^{k-1}\\ &\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{1-b}+b-1+\frac{1}{1-r}+r-1+\frac{1}{1-v}+v-1\end{aligned}$$

- **1 pt :** $b+r+v=1$

Partie II - Étude d'une fonction de deux variables

On considère la fonction f de classe $\mathcal{C}^2$ sur l'ouvert $U=]0,1[\times]0,1[$ définie par :

$$\forall (x,y)\in U,\ f(x,y)=\frac{1}{1-x}+\frac{1}{1-y}+\frac{1}{x+y}$$

4. Calculer, pour tout $(x,y)\in U$, $\partial_1(f)(x,y)$ et $\partial_2(f)(x,y)$.

- **1 pt : f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur U donc admet des dérivées partielles d'ordre 1 sur U**
- **1 pt :** $\partial_1(f)(x,y)=\dfrac{1}{(1-x)^2}-\dfrac{1}{(x+y)^2}$
- **1 pt :** $\partial_2(f)(x,y)=\dfrac{1}{(1-y)^2}-\dfrac{1}{(x+y)^2}$

5. Montrer qu'il existe un unique point (x_0,y_0) de U en lequel f est susceptible de posséder un extremum local et déterminer (x_0,y_0).

- **1 pt : U étant un ouvert et la fonction f étant de classe $\mathcal{C}^1$, si f admet un extremum local en un point de U, il s'agit nécessairement d'un point critique**
- **3 pt : (x,y) est une point critique de f si et seulement si** $\begin{cases} x &= \dfrac{1}{3}\\ y &= \dfrac{1}{3}\end{cases}$ **(calculs)**
- **1 pt : la fonction $u\mapsto \dfrac{1}{u^2}$ est bijective sur** $]0,1[$

6. Montrer que f admet en (x_0,y_0) un minimum local.

- **1 pt : la fonction f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur U donc admet des dérivées partielles d'ordre 2 sur U**
- **2 pt :**

$$\partial^2_{1,1}(f)(x,y)=\frac{2}{(1-x)^3}+\frac{2}{(x+y)^3}\qquad \partial^2_{1,2}(f)(x,y)=\frac{2}{(x+y)^3}$$
$$\partial^2_{2,1}(f)(x,y)=\frac{2}{(x+y)^3}\qquad \partial^2_{2,2}(f)(x,y)=\frac{2}{(1-y)^3}+\frac{2}{(x+y)^3}$$

- **1 pt :** $H=\begin{pmatrix}\dfrac{3^3}{2} & \dfrac{3^3}{2^2}\\ \dfrac{3^3}{2^2} & \dfrac{3^3}{2}\end{pmatrix}$

- **1 pt : les valeurs propres de H sont :**

$$\lambda_1 = \frac{3^3}{2} - \frac{3^3}{2^2} = \frac{3^3}{2^2} > 0$$

$$\lambda_2 = \frac{3^3}{2} + \frac{3^3}{2^2} = \frac{3^4}{2^2} > 0$$

- **1 pt : les deux valeurs propres de H sont strictement positives donc f admet en (x_0, y_0) un minimum local**

7. ***a)*** Exprimer $\mathbb{E}(X)$ en fonction de $f(b, r)$.

- **2 pt :** $\mathbb{E}(X) = f(b, r) - 2$

b) Que peut-on dire de $\mathbb{E}(X)$ lorsque $b = r = v = \dfrac{1}{3}$?

- **1 pt :** $\mathbb{E}(X) = \dfrac{5}{2}$
- **1 pt : parler de valeur minimale**
- **1 pt : expliquer qu'il faut être prudent dans les conclusions parce que c'est seulement un minimum local**

Partie III - Étude d'une variable aléatoire à densité

8. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{3^t}\ dt$ est convergente et déterminer sa valeur. *(On rappelle que $3^t = e^{t\ln(3)}$)*

- **1 pt : la fonction $t \mapsto \mathbf{e}^{-t\ln(3)}$ est continue sur $[2, +\infty[$ donc l'intégrale $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{3^t}\ dt$ est impropre en $+\infty$**
- **1 pt :** $\displaystyle\int_2^{B} \frac{1}{3^t}\ dt = \left[\frac{\mathbf{e}^{-t\ln(3)}}{-\ln(3)}\right]_2^B$
- **2 pt :** $\displaystyle\int_2^{B} \frac{1}{3^t}\ dt \underset{B\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{\mathbf{e}^{-2\ln(3)}}{\ln(3)} = \frac{\mathbf{e}^{-\ln(9)}}{\ln(3)} = \frac{1}{9\ln(3)}$ **(seulement 1 pt si non simplifié)**

On note $\alpha = \displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{3^t}\ dt$ et on considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ g(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \in]-\infty, 2[\\ \dfrac{1}{\alpha 3^t} & \text{si } t \in [2, +\infty[\end{cases}$$

9. Vérifier que g est une densité de probabilité.
On note Y une variable aléatoire admettant g comme densité.

- **1 pt :** $\forall t \in \mathbb{R},\ g(t) \geqslant 0$
- **1 pt : g est continue sur $\mathbb{R}$ éventuellement privé d'un nombre fini de points**
- **1 pt : par linéarité de l'intégrale :** $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\ dt$ **converge**
- **1 pt :** $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\ dt = \int_2^{+\infty} g(t)\ dt = \frac{1}{\alpha}\alpha = 1$

10. Montrer que Y admet une espérance et calculer cette espérance.

- **1 pt :** Y **admet une espérance si et seulement si l'intégrale doublement impropre** $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} tg(t)\ dt$ **converge absolument, ce qui revient à montrer la convergence pour ce calcul de moment**
- **1 pt : IPP valide**
- **2 pt :** $\displaystyle\int_2^B te^{-t\ln(3)}\ dt \underset{B\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{2e^{-2\ln(3)}}{\ln(3)} + \frac{e^{-2\ln(3)}}{\ln(3)^2}$
- **1 pt :** $\mathbb{E}(Y) = \dfrac{1}{\dfrac{1}{9\ln(3)}}\left(\dfrac{2}{9\ln(3)} + \dfrac{1}{9\ln(3)^2}\right) = 2 + \dfrac{1}{\ln(3)}$

11. On note Z la variable aléatoire égale à la partie entière de Y. On rappelle que la partie entière d'un nombre réel x est le plus grand entier inférieur ou égal à x.

a) Déterminer la loi de probabilité de Z.

- **1 pt :** $Z(\Omega) = [\![2, +\infty[\![$
- **3 pt : pour tout** $k \geqslant 2$**,** $\mathbb{P}([Z = k]) = \dfrac{2}{3^{k-1}}$

b) Comparer la loi de probabilité de X lorsque $b = r = v = \dfrac{1}{3}$ et la loi de probabilité de Z.

- **1 pt :** $X(\Omega) = [\![2, +\infty[\![= Z(\Omega)$
- **1 pt : vérification de** $\mathbb{P}([X = k]) = \mathbb{P}([Z = k])$

Partie IV - Simulation informatique

12. On note T la variable aléatoire prenant la valeur 0 (respectivement 1 ; 2) si l'on obtient une boule de couleur blanche (respectivement rouge ; verte) lors d'un unique tirage dans l'urne. Écrire une fonction **Python** `simulT(b,r,v)` prenant en paramètres les réels b, r et v et simulant la variable aléatoire T.

```
def simulT(b,r,v):
    t = rd.random()
    if t < b:
        return 0
    elif t < b+r:
        return 1
    else:
        return 2
```

- **1 pt :** `t = rd.random()`
- **2 pt : structure conditionnelle bien écrite**

13. Compléter la fonction **Python** suivante pour qu'elle simule la variable aléatoire X.

```
def simulX(b,r,v):
    tirage_initial = simulT(b,r,v)
    X = 2
    while simulT(b,r,v) == tirage_initial :
        X += 1
    return X
```

- **3 pt : 1pt par ligne complétée**
- **1 pt : bonus si tout est correct depuis la question 12**

Exercice 3 (EML 2018)

On note $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base $\mathscr{B}$ est la matrice A donnée par :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -5 \\ -2 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

On considère également l'endomorphisme g de $\mathbb{R}^3$ défini par :

$$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ g(x,y,z) = (x+y-z,\ 2y,\ -x+y+z)$$

Enfin, on pose :

$$u = e_1 - e_2 = (1,-1,0) \quad \text{et} \quad v = f(e_1) + e_1$$

1. a) Calculer v.

- **1 pt :** $f(e_1) = (0,-2,1)$
- **1 pt :** $v = (1,-2,1)$

b) Montrer que la famille $\mathcal{C} = (u, v, e_1)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

- **2 pt : $\mathcal{C}$ est libre**
- **1 pt :** $\text{Card}(\mathcal{C}) = 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$

c) On note P la matrice de passage de la base $\mathscr{B}$ à la base $\mathcal{C}$.
Expliciter la matrice P et calculer P^{-1}.

- **1 pt :** $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
- **3 pt :** $P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ **(1pt si méthode correcte mais erreur de calcul non grossière)**

2. a) Déterminer la matrice A' de f dans la base $\mathcal{C}$.

- **3 pt :** $A' = \text{Mat}_{\mathcal{C}}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ **(1pt par colonne)**

b) Expliciter le lien entre les matrices A, A', P et P^{-1}.

- **1 pt : formule de changement de base citée**
- **1 pt :** $A = P\,A'\,P^{-1}$

c) En déduire les valeurs propres de A. La matrice A est-elle diagonalisable ?

- **1 pt : la matrice A' est une matrice triangulaire, donc ses valeurs propres sont ses coefficients diagonaux**
- **1 pt :** $\text{Sp}(A) = \text{Sp}(A') = \{2, -1\}$ **car ces deux matrices sont semblables**
- **1 pt :** $\dim(E_2(A)) = \text{Card}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = 1$
- **1 pt :** $\dim(E_{-1}(A)) = \text{Card}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = 1$

- **2 pt : raisonnement par l'absurde**

d) L'endomorphisme f est-il bijectif ?

- **1 pt : le réel** 0 **n'est pas valeur propre de** A **donc l'endomorphisme** f **est bijectif**

3. a) Déterminer la matrice B de g dans la base $\mathscr{B}$.

- **3 pt :** $B = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(g) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ **(1 pt par colonne)**

b) Montrer : $B^2 = 2\,B$.

- **1 pt :** $B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 0 & 4 & 0 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 2\,B$

c) En déduire les valeurs propres de B, ainsi qu'une base de chaque sous-espace propre.

- **1 pt : le polynôme** $Q(X) = X^2 - 2X = X(X-2)$ **est un polynôme annulateur de la matrice** B
- **1 pt :** $\mathrm{Sp}(B) \subset \{$**racines de** $Q\} = \{0, 2\}$
- **1 pt :** $\mathcal{F}_0 = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ **est une base de** $E_0(B)$
- **1 pt :** $\mathcal{F}_2 = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ **est une base de** $E_2(B)$
- **1 pt : argument pour montrer que les valeurs propres possibles sont bien des valeurs propres**

d) La matrice B est-elle diagonalisable ?

- **1 pt : par théorème de concaténation, la famille** $\mathcal{B}' = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$ **est libre**
- **1 pt :** $\mathrm{Card}(\mathcal{B}') = 3 = \dim(\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}))$
- **1 pt :** $\mathcal{B}'$ **est une base de** $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ **formée de vecteurs propres de** B **donc** B **est diagonalisable**

On pose : $\mathcal{E} = \{M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R}) \mid BM = MA\}$.

4. a) Montrer que $\mathcal{E}$ est un espace vectoriel.

- **1 pt :** $\mathcal{E} \subset \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$
- **1 pt :** $0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})} \in \mathcal{E}$
- **1 pt : stabilité par combinaisons linéaires**

b) Soit M une matrice appartenant à $\mathcal{E}$.
Montrer que M n'est pas inversible. *(On pourra raisonner par l'absurde).*

- **1 pt :** A **et** B **sont semblables**
- **1 pt : expliquer la contradiction**

5. On cherche à montrer que $\mathcal{E}$ n'est pas réduit à l'ensemble $\{0\}$.

a) Justifier que, pour tout réel λ, les matrices $A - \lambda\,I_3$ et $({}^tA) - \lambda\,I_3$ ont même rang, la matrice I_3 désignant la matrice identité de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

- **1 pt :** ${}^t(A - \lambda I_3) \;=\; {}^tA - \lambda\, {}^tI_3 \;=\; {}^tA - \lambda I_3$
- **1 pt : pour toute matrice** $M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ **:** $\mathrm{rg}({}^tM) = \mathrm{rg}(M)$

b) En déduire que la matrices B et ${}^tA$ admettent une valeur propre en commun, notée α.

- **1 pt : d'après les questions *2.c)* et *3.c)*, les matrices** A **et** B **ont la valeur propre** 2 **en commun.**
- **1 pt :** $\mathrm{rg}({}^tA - 2\, I_3) \;=\; \mathrm{rg}(A - 2\, I_3) < 3$ **donc** 2 **est valeur propre de** ${}^tA$

c) Soient X un vecteur propre de B associé à la valeur propre α, et Y un vecteur propre de ${}^tA$ associé à la valeur propre α. On note : $N = X\, {}^tY$.
Montrer que la matrice N est non nulle et que N appartient à $\mathcal{E}$.

- **1 pt :** $N \neq 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}$
- **1 pt :** $BN = \alpha N$
- **2 pt :** $NA = \alpha N$

d) En déduire : $\dim(\mathcal{E}) \geqslant 2$.

- **2 pt :** $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ **et** $X_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ **sont des vecteurs propres de** B **associés à la valeur propre** 2**. On peut donc construire** $N_1 = X_1\, {}^tY$ **et** $N_2 = X_2\, {}^tY$ **où** Y **un vecteur propre de** ${}^tA$ **associé à la valeur propre** 2**. On a alors** $\mathrm{Vect}\,(N_1, N_2) \subset \mathcal{E}$
- **3 pt : la famille** (N_1, N_2) **est libre**

Exercice 4 (EDHEC 2024)

Toutes les variables aléatoires rencontrées dans cet exercice sont supposées définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ que l'on ne cherchera pas à déterminer.

1. Soit f la fonction qui à tout réel x associe

$$f(x) = \begin{cases} x\mathrm{e}^{-x^2/2} & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

a) Montrer que f peut être considérée comme densité d'une certaine variable aléatoire X.

- **1 pt :** $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \geqslant 0$
- **1 pt :** f **est continue sur** $\mathbb{R}$ **éventuellement privé d'un nombre fini de points**
- **1 pt :**

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\ dx &= \int_0^{+\infty} f(x)\ dx \qquad \textbf{\textit{(car } f \textbf{\textit{ est nulle en dehors de }} [0,+\infty[\textbf{\textit{)}}} \\ &= \int_0^{+\infty} x\mathrm{e}^{-x^2/2}\ dx \end{aligned}$$

la fonction $x \mapsto x\mathrm{e}^{-x^2/2}$ **est continue sur** $[0, +\infty[$ **donc cette intégrale est impropre en** $+\infty$

- **1 pt :** $\displaystyle\int_0^B x\mathrm{e}^{-x^2/2}\ dx = 1 - \mathrm{e}^{-B^2/2} \underset{B \to +\infty}{\longrightarrow} 1$

b) Rappeler la valeur du moment d'ordre 2 d'une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite.

- **2 pt :** $\mathbb{E}(Z^2) = 1$

c) En déduire, par des considérations de parité, que X a une espérance et que $\mathbb{E}(X) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

- **1 pt : la variable aléatoire X admet une espérance si et seulement si l'intégrale doublement impropre $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\,dx$ converge absolument, ce qui revient à montrer la convergence pour ce calcul de moment**
- **1 pt :**

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\ dx &= \int_{0}^{+\infty} xf(x)\ dx \qquad \textbf{\textit{(car } f \textbf{\textit{ est nulle en dehors de }} [0,+\infty[\textbf{\textit{)}}} \\ &= \int_{0}^{+\infty} x^2 \mathrm{e}^{-x^2/2}\ dx\end{aligned}$$

- **1 pt : $x \mapsto x^2\mathrm{e}^{-x^2/2}$ est paire**
- **1 pt :** $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} x^2\mathrm{e}^{-x^2/2}\ dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} x^2\mathrm{e}^{-x^2/2}\ dx = \frac{\sqrt{2\pi}}{2} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$

2. On note F_X la fonction de répartition de X. Déterminer $F_X(x)$ selon que $x < 0$ ou $x \geqslant 0$.

- **1 pt : la fonction f est nulle en dehors de $[0,+\infty[$ donc on peut considérer que $X(\Omega) = [0,+\infty[$**
- **1 pt : si $x < 0$, alors $F_X(x) = 0$ car $[X \leqslant x] = \varnothing$**
- **1 pt : si $x \geqslant 0$, alors $F_X(x) = 1 - \mathrm{e}^{-x^2/2}$**

3. Simulation

a) On pose $Z = X^2$ et on note F_Z sa fonction de répartition. Déterminer $F_Z(x)$ dans chacun des cas $x < 0$ et $x \geqslant 0$ et montrer que Z suit une loi exponentielle dont on précisera le paramètre.

- **1 pt : $Z(\Omega) = [0,+\infty[$**
- **1 pt : si $x < 0$, alors $F_Z(x) = 0$ car $[Z \leqslant x] = \varnothing$**
- **2 pt : si $x \geqslant 0$, alors $F_Z(x) = 1 - \mathrm{e}^{-x/2}$**
- **1 pt : la fonction de répartition caractérise la loi**
- **1 pt : $Z \hookrightarrow \mathcal{E}\left(\frac{1}{2}\right)$**

b) Utiliser la question *3.a)* pour écrire une fonction **Python** d'en-tête `def simulX()` qui renvoie une simulation de X.

```python
def simulX():
    Z = rd.exponential(2)
    return np.sqrt(Z)
```

- **2 pt : `Z = rd.exponential(2)` (seulement 1 pt si `Z = rd.exponential(1/2)`)**
- **1 pt : `return np.sqrt(Z)`**

4. Pour tout entier naturel n non nul, on pose $Y_n = \dfrac{X}{\sqrt{n}}$ et on note G_n la fonction de répartition de Y_n.

a) Montrer que l'on a :

$$G_n(x) = \begin{cases} 1 - \mathrm{e}^{-nx^2/2} & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

- **1 pt : $Y_n(\Omega) = [0,+\infty[$**

- **1 pt : si** $x < 0$**, alors** $G_n(x) = 0$ **car** $[Y_n \leqslant x] = \varnothing$
- **2 pt : si** $x \geqslant 0$**, alors** $G_n(x) = 1 - \mathrm{e}^{-nx^2/2}$

b) Étudier la convergence en loi de la suite $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

- **1 pt : si** $x < 0$**, alors** $\lim\limits_{n\to+\infty} G_n(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} 0 = 0$
- **1 pt : si** $x > 0$**, alors** $\lim\limits_{n\to+\infty} G_n(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} 1 - \mathrm{e}^{-nx^2/2} = 1$
- **1 pt : introduction de** W **une variable aléatoire qui suit la loi certaine égale à** 0
- **1 pt :** $Y_n \underset{n\to+\infty}{\overset{\mathscr{L}}{\longrightarrow}} W$

c) Montrer que, pour tout réel $\varepsilon > 0$, on a :

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(|Y_n| > \varepsilon) = 0$$

- **1 pt :** Y_n **admet une espérance comme transformée affine de** X **qui en admet une**
- **1 pt :** $\mathbb{E}(Y_n) = \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$
- **1 pt : application de Markov**
- **1 pt : justifications de Markov**
- **1 pt : thm d'encadrement**

5. On considère une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires mutuellement indépendantes, et suivant toutes la même loi que X. Pour tout entier naturel n non nul, on pose $M_n = \min(X_1, \ldots, X_n)$.

a) Exprimer, pour tout réel x, $\mathbb{P}(M_n > x)$ à l'aide de la fonction F_X, puis en déduire que M_n suit la même loi que la variable Y_n présentée à la question *4*.

- **1 pt :** $\forall x \in \mathbb{R},\ \mathbb{P}([M_n > x]) = \big(1 - F_X(x)\big)^n$
- **1 pt : indépendance**
- **1 pt : même loi**
- **2 pt :** M_n **et** Y_n **ont la même fonction de répartition**
- **1 pt : la fonction de répartition caractérise la loi**

b) Compléter la fonction **Python** suivante afin qu'elle renvoie une simulation de M_n à l'appel de `simulM(n)`.

```
def simulM(n):
    X=np.array([----- for k in range(n)])
    M=-----
    return M
```

- **1 pt :** `X = np.array([simulX() for k in range(n)])`
- **1 pt :** `M = np.min(X)`