

---

## DS7 (vA) - Concours blanc - Correction

---

*La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.*

*Les candidat·es sont invité·es à **encadrer** dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*

*Aucun document n'est autorisé. **L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.** Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*

*Si au cours de l'épreuve, un candidat ou une candidate repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.*

On suppose, et c'est valable pour toute l'épreuve, que la librairie suivante est importée sous son alias habituel :

- `import numpy as np`
- `import numpy.linalg as al`
- `import numpy.random as rd`
- `import matplotlib.pyplot as plt`

## Exercice 1 (EML 2024)

Les parties B et C sont indépendantes de la partie A.

### Partie A : Résolution d'un système différentiel

On considère l'équation différentielle

$$(E) : x'(t) = -x(t) + e^{-t},$$

où  $x$  est une fonction définie et dérivable sur  $\mathbb{R}$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$ .

1. a) Résoudre l'équation différentielle homogène  $x'(t) = -x(t)$  sur  $\mathbb{R}$ .

*Démonstration.*

Il s'agit d'une équation différentielle homogène d'ordre 1, linéaire, à coefficients constants.

Ainsi, ses solutions sont de la forme :  $t \mapsto Ce^{-t}$  où  $C \in \mathbb{R}$ .

□

b) Déterminer une solution particulière  $x_0$  de (E) de la forme  $x_0 : t \mapsto (at + b)e^{-t}$  avec  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ .

*Démonstration.*

La fonction  $x_0$  proposée est dérivable sur  $\mathbb{R}$ . Soit  $t \in \mathbb{R}$ .

$$x_0(t) = (at + b)e^{-t}$$

$$x_0'(t) = ae^{-t} - (at + b)e^{-t} = (-at + a - b)e^{-t}$$

Ainsi :

$$x_0'(t) = -x_0(t) + e^{-t} \iff (-at + a - b)e^{-t} = -(at + b)e^{-t} + e^{-t}$$

$$\iff -at + a - b = -at - b + 1 \quad (\text{car } e^{-t} \neq 0)$$

$$\iff a = 1$$

Il n'y a donc aucune condition sur  $b$ , que l'on peut choisir égal à 0 par exemple.

La fonction  $x_0 : t \mapsto te^{-t}$  est une solution particulière de (E).

□

c) Résoudre l'équation différentielle (E).

*Démonstration.*

Nous avons résolu l'équation homogène associée en question 1.a) et nous avons trouvé une solution particulière en question 1.b).

On en déduit que les solutions de (E) sont de la forme :  $t \mapsto Ce^{-t} + te^{-t}$  où  $C \in \mathbb{R}$ .

□

On s'intéresse maintenant au système différentiel :

$$(S) : \begin{cases} x'(t) = -x(t) + y(t) \\ y'(t) = -y(t) \end{cases}$$

où  $x$  et  $y$  désignent des fonctions définies et dérivables sur  $\mathbb{R}$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$ .

2. a) Donner la matrice  $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  telle que

$$(S) \iff X'(t) = AX(t) \quad \text{avec} \quad X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}.$$

La matrice  $A$  est-elle diagonalisable ?

*Démonstration.*

La matrice  $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$  convient (et c'est la seule).

La matrice  $A$  est triangulaire supérieure donc ses valeurs propres sont exactement ses coefficients diagonaux. Ainsi,  $A$  possède une unique valeur propre : le réel  $-1$ .

Supposons que  $A$  soit diagonalisable. Alors il existe une matrice inversible  $P \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  et une matrice diagonale  $D \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  dont les coefficients diagonaux sont les valeurs propres de  $A$  telles que :

$$A = PDP^{-1}$$

On a alors  $D = -I_2$  et donc  $A = -PI_2P^{-1} = -PP^{-1} = -I_2$ . C'est absurde.

La matrice  $A$  n'est pas diagonalisable.

□

b) Justifier l'existence d'une unique solution  $(x, y)$  de  $(S)$  telle que  $x(0) = 1$  et  $y(0) = 1$ .

*Démonstration.*

Le théorème de Cauchy affirme que tout problème de Cauchy admet une unique solution. La condition  $x(0) = 1$  et  $y(0) = 1$  est un problème de Cauchy en  $0$ , qui se réécrit sous la forme :

$$\begin{cases} X' = AX \\ X(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{cases}$$

Ainsi, il existe une unique solution  $(x, y)$  de  $(S)$  telle que  $x(0) = 1$  et  $y(0) = 1$

□

c) Déterminer cette solution  $(x, y)$  en vous aidant de la question 1.

*Démonstration.*

- Résolution de  $\begin{cases} y'(t) = -y(t) \\ y(0) = 1 \end{cases}$  :

D'après la question 1.a), les solutions sont de la forme :

$$y : t \mapsto C_2 e^{-t} \quad \text{où } C_2 \in \mathbb{R}$$

L'unique solution vérifiant  $y(0) = 1$  est obtenue pour  $C_2 = 1$ .

- Résolution de  $\begin{cases} x'(t) = -x(t) + e^{-t} \\ x(0) = 1 \end{cases}$  :

D'après la question 1.c), les solutions sont de la forme :

$$x : t \mapsto C_1 e^{-t} + t e^{-t} \quad \text{où } C_1 \in \mathbb{R}$$

L'unique solution vérifiant  $x(0) = 1$  est obtenue pour  $C_1 = 1$ .

Finalemment, la solution du problème de Cauchy est :  $(x, y) : t \mapsto ((1+t)e^{-t}, e^{-t})$ .

□

d) Étudier la convergence de la solution  $(x, y)$  vers un état d'équilibre lorsque  $t$  tend vers  $+\infty$ .

*Démonstration.*

On remarque que :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = 0 \quad (\text{par croissances comparées})$$

et

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = 0$$

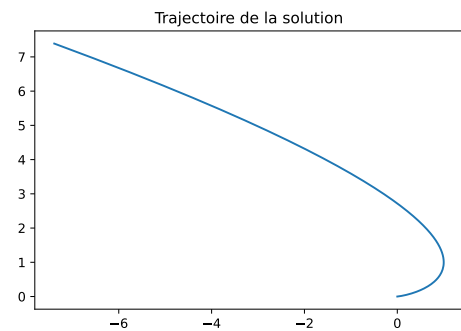
Ainsi : la solution  $(x, y)$  converge vers l'état d'équilibre  $(0, 0)$  lorsque  $t$  tend vers  $+\infty$ .

□

3. Recopier et compléter le programme en langage **Python** ci-dessous de manière à ce qu'il produise le graphique sur la droite représentant la trajectoire  $t \mapsto (x(t), y(t))$  pour  $t \in [-2, 10]$ .

On rappelle que la commande `np.linspace(-2, 10, 200)` crée une liste de 200 valeurs régulièrement espacées allant de  $-2$  à  $10$ .

```
1 import numpy as np
2 import matplotlib.pyplot as plt
3
4 T = np.linspace(-2, 10, 200)
5 x = [... for t in T]
6 y = [... for t in T]
7
8 plt.title('Trajectoire de la solution')
9 plt.plot(...)
10 plt.show()
```



*Démonstration.*

On propose la fonction **Python** suivante :

```
1 import numpy as np
2 import matplotlib.pyplot as plt
3
4 T = np.linspace(-2, 10, 200)
5 x = [(1+t) * np.exp(-t) for t in T]
6 y = [np.exp(-t) for t in T]
7
8 plt.title('Trajectoire de la solution')
9 plt.plot(x, y)
10 plt.show()
```

□

### Partie B : Étude d'une suite de fonctions

Pour tout entier  $k \in \mathbb{N}^*$ , on considère la fonction  $f_k$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f_k(x) = (x + 1)e^{kx}.$$

On note  $\mathcal{C}_k$  la courbe de  $f_k$  dans le plan muni d'un repère orthonormé.

4. a) Calculer les limites de la fonction  $f_k$  en  $-\infty$  et en  $+\infty$ .

*Démonstration.*

Soit  $k \in \mathbb{N}^*$ .

On a  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_k(x) = +\infty$  et, par croissances comparées,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f_k(x) = 0$ .

□

b) Dresser le tableau de variation de  $f_k$  en y faisant figurer les valeurs prises par  $f_k$  en  $-1$  et en  $0$ .

*Démonstration.*

Soit  $k \in \mathbb{N}^*$ . La fonction  $f_k$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  comme produit de fonctions dérivables sur  $\mathbb{R}$ .

Soit  $x \in \mathbb{R}$ .

$$f'_k(x) = e^{kx} + (x + 1)ke^{kx} = (kx + k + 1)e^{kx}$$

D'où :

$$f'_k(x) > 0 \iff kx + k + 1 > 0 \iff kx > -k - 1 \iff x > -\frac{k + 1}{k}$$

et

$$f'_k(x) = 0 \iff x = -\frac{k + 1}{k}$$

D'où le tableau de variations de  $f_k$  :

$x$	$-\infty$	$-\frac{k+1}{k}$	$-1$	$0$	$+\infty$
Signe de $f'_k(x)$	-	0	+		
Variations de $f_k$	0	↘ $-\frac{1}{k}e^{-(k+1)}$	↗ 0	↗ 1	↗ $+\infty$

□

5. a) Étudier la position relative des courbes  $\mathcal{C}_k$  et  $\mathcal{C}_{k+1}$ . Vous préciserez leurs points d'intersection.

*Démonstration.*

Soit  $x \in \mathbb{R}$ .

$$\begin{aligned} f_{k+1}(x) > f_k(x) &\iff (x + 1)e^{(k+1)x} > (x + 1)e^{kx} \\ &\iff (x + 1)e^x > x + 1 && \text{(car } e^{kx} > 0) \\ &\iff (x + 1)(e^x - 1) > 0 \end{aligned}$$

Dressons le tableau de signes :

$x$	$-\infty$	$-1$	$0$	$+\infty$
Signe de $x + 1$	-	0	+	
Signe de $e^x - 1$		-	0	+
Signe de $(x + 1)(e^x - 1)$	+	0	-	0

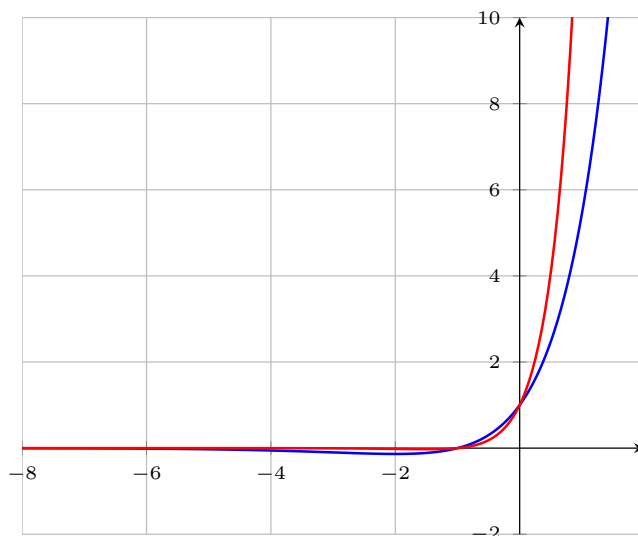
On peut conclure que  $\mathcal{C}_{k+1}$  est en-dessous de  $\mathcal{C}_k$  sur  $[-1, 0]$  et au-dessus ailleurs.  
Les deux courbes s'intersectent en  $-1$  et en  $0$ .

□

b) Dessiner sur un même graphique l'allure de  $\mathcal{C}_k$  et  $\mathcal{C}_{k+1}$ .

*Démonstration.*

Nous représentons  $\mathcal{C}_1$  (en bleu) et  $\mathcal{C}_2$  (en rouge) car plus  $k$  est grand et plus le minimum de  $f_k$  est proche de  $0$ , ce qui rend très difficile de distinguer les courbes sur  $] -\infty, 0]$ .



□

### Partie C : Étude d'une suite implicite

6. a) Montrer que, pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ , l'équation  $f_k(x) = k$  admet une unique solution dans  $\mathbb{R}$  notée  $u_k$ .

*Démonstration.*

Soit  $k \in \mathbb{N}^*$ . La fonction  $f_k$  est :

- × continue sur  $\mathbb{R}$ ,
- × strictement décroissante sur  $] -\infty, -\frac{k+1}{k}]$ ,
- × strictement croissante sur  $[-\frac{k+1}{k}, +\infty[$ .

Ainsi :

- La fonction  $f_k$  réalise une bijection de  $] -\infty, -\frac{k+1}{k}]$  sur  $f_k(] -\infty, -\frac{k+1}{k}]) = [-\frac{1}{k}e^{-(k+1)}, 0[$ .  
De plus,  $k \notin [-\frac{1}{k}e^{-(k+1)}, 0[$  car  $k > 0$ , donc l'équation  $f_k(x) = k$  n'admet aucune solution sur  $] -\infty, -\frac{k+1}{k}]$ .

- La fonction  $f_k$  réalise une bijection de  $[-\frac{k+1}{k}, +\infty[$  sur  $f_k([-\frac{k+1}{k}, +\infty[) = [-\frac{1}{k}e^{-(k+1)}, +\infty[$ . De plus,  $k \in [-\frac{1}{k}e^{-(k+1)}, +\infty[$  car  $k > 0$ , donc l'équation  $f_k(x) = k$  admet une unique solution sur  $[-\frac{k+1}{k}, +\infty[$ .

Finalement, pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ , l'équation  $f_k(x) = k$  admet une unique solution dans  $\mathbb{R}$ .

□

b) Déterminer explicitement  $u_1$ .

*Démonstration.*

On remarque que  $f_1(0) = 1$ .

D'où :  $u_1 = 0$ .

□

7. Montrer que, pour tout entier  $k \geq 1$ , on a :

$$0 \leq u_k \leq \frac{\ln(k)}{k}.$$

En déduire que la suite  $(u_k)$  converge et donner sa limite.

*Démonstration.*

Soit  $k \in \mathbb{N}^*$ . On a  $k \geq 1$  et donc  $\ln(k) \geq 0$ .

Par définition de  $u_k$  :  $f_k(u_k) = k$ . De plus,  $f_k(0) = 1 \leq k$  et  $f_k\left(\frac{\ln(k)}{k}\right) = \left(\frac{\ln(k)}{k} + 1\right)k \geq k$ .

D'où :

$$f_k(0) \leq f_k(u_k) \leq f_k\left(\frac{\ln(k)}{k}\right)$$

Par stricte croissance de  $f_k$  sur  $[-\frac{k+1}{k}, +\infty[$ , il vient :  $0 \leq u_k \leq \frac{\ln(k)}{k}$ .

Par croissances comparées :  $\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{\ln(k)}{k} = 0$ .

Par théorème d'encadrement :  $\lim_{k \rightarrow +\infty} u_k = 0$ .

□

8. a) Soit  $k \geq 1$  un entier, montrer que :

$$u_k = \frac{\ln(k)}{k} - \frac{\ln(u_k + 1)}{k}$$

*Démonstration.*

Soit  $k \geq 1$  un entier.

Toujours par définition de  $u_k$  :

$$(u_k + 1)e^{ku_k} = k$$

De plus,  $u_k + 1 > 0$  d'après la question précédente. D'où, en composant par  $\ln$  :

$$\ln(u_k + 1) + ku_k = \ln(k)$$

d'où :

$$u_k = \frac{\ln(k)}{k} - \frac{\ln(u_k + 1)}{k}.$$

□

b) En déduire que  $u_k \sim \frac{\ln(k)}{k}$  lorsque  $k$  tend vers  $+\infty$ .

*Démonstration.*

Tout d'abord, pour tout  $k \geq 2$  :

$$\frac{u_k}{\frac{\ln(k)}{k}} = 1 - \frac{\frac{\ln(u_k + 1)}{k}}{\frac{\ln(k)}{k}}$$

Or :

$$\frac{\frac{\ln(u_k + 1)}{k}}{\frac{\ln(k)}{k}} = \frac{\ln(u_k + 1)}{\ln(k)} \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} 0 \quad (\text{car } u_k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} 0)$$

$$\text{On en déduit que } \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{u_k}{\frac{\ln(k)}{k}} = 1, \text{ autrement dit } u_k \underset{k \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\ln(k)}{k}.$$

□

9. Quelle est la nature de la série  $\sum_{k \geq 1} u_k$  ?

*Démonstration.*

- Pour tout  $k \geq 3$ ,  $\ln(k) \geq 1$  donc  $0 \leq \frac{1}{k} \leq \frac{\ln(k)}{k}$ .
- $\sum \frac{1}{k}$  est une série de Riemann divergente.

Par critère de comparaison pour les séries à termes positifs, il suit que la série  $\sum \frac{\ln(k)}{k}$  est divergente.

Ainsi, par critère d'équivalence pour les séries à termes positifs (on a vu à la question 7 que, pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ ,  $u_k \geq 0$ ), on peut conclure que :

la série  $\sum u_k$  est divergente.

□

## Exercice 2 (EML 2004)

Une urne contient des boules blanches, des boules rouges et des boules vertes.

- La proportion de boules blanches est  $b$ .
- La proportion de boules rouges est  $r$ .
- La proportion de boules vertes est  $v$ .



Ainsi, on a :

$$0 < b < 1, \quad 0 < r < 1, \quad 0 < v < 1, \quad \text{et} \quad b + r + v = 1$$

On effectue des tirages successifs d'une boule avec remise et on s'arrête au premier changement de couleur.

Pour tout entier naturel  $i$  supérieur ou égal à 1, on note  $B_i$  (respectivement  $R_i$ ;  $V_i$ ) l'événement « la  $i^{\text{e}}$  boule tirée est blanche (respectivement rouge; verte) ».

On note  $X$  la variable aléatoire égale au nombre de tirages effectués. Par exemple, lorsque le résultat des tirages est **verte**, **verte**, **rouge**, la variable aléatoire  $X$  prend la valeur 3.

## Partie I - Étude de la variable aléatoire $X$

1. Préciser les valeurs possibles de  $X$ .

*Démonstration.*

Le premier changement de couleur peut advenir lors du 2<sup>e</sup> tirage au plus tôt, ou à n'importe quel autre tirage subséquent.

Ainsi :  $X(\Omega) = \llbracket 2, +\infty \llbracket$ .

□

2. Montrer que, pour tout entier  $k$  supérieur ou égal à 2 :

$$\mathbb{P}([X = k]) = (1 - b)b^{k-1} + (1 - r)r^{k-1} + (1 - v)v^{k-1}$$

(On commencera par décrire l'événement  $[X = k]$  à l'aide des événements  $B_i$ ,  $R_i$  et  $V_i$ )

*Démonstration.*

Soit  $k$  un entier supérieur ou égal à 2. En prenant en compte les trois possibilités pour la couleur de la première boule, on obtient :

$$[X = k] = (B_1 \cap \dots \cap B_{k-1} \cap \overline{B_k}) \cup (R_1 \cap \dots \cap R_{k-1} \cap \overline{R_k}) \cup (V_1 \cap \dots \cap V_{k-1} \cap \overline{V_k})$$

Par incompatibilité, on obtient :

$$\mathbb{P}([X = k]) = \mathbb{P}(B_1 \cap \dots \cap B_{k-1} \cap \overline{B_k}) + \mathbb{P}(R_1 \cap \dots \cap R_{k-1} \cap \overline{R_k}) + \mathbb{P}(V_1 \cap \dots \cap V_{k-1} \cap \overline{V_k})$$

Détaillons le calcul du premier terme (les autres sont analogues).

D'après la formule des probabilités composées :

$$\mathbb{P}(B_1 \cap \dots \cap B_{k-1} \cap \overline{B_k}) = \mathbb{P}(B_1)\mathbb{P}_{B_1}(B_2) \dots \mathbb{P}_{B_1 \cap \dots \cap B_{k-2}}(B_{k-1})\mathbb{P}_{B_1 \cap \dots \cap B_{k-1}}(\overline{B_k})$$

Les  $k - 1$  premiers termes sont tous égaux à  $b$  (le contenu de l'urne ne change pas au cours des tirages car ils se font avec remise) et  $\mathbb{P}_{B_1 \cap \dots \cap B_{k-1}}(\overline{B_k}) = 1 - b$ . D'où :

$$\mathbb{P}(B_1 \cap \dots \cap B_{k-1} \cap \overline{B_k}) = b^{k-1}(1 - b)$$

On a bien :  $\mathbb{P}([X = k]) = (1 - b)b^{k-1} + (1 - r)r^{k-1} + (1 - v)v^{k-1}$ .

**Commentaire**

On peut être tenté d'affirmer que les événements sont indépendants en se basant sur le fait que les tirages successifs se font avec remise. En réalité, ils ne le sont pas et la raison est assez subtile : c'est parce que l'expérience s'arrête au premier changement de couleur.

Montrons par exemple que  $B_1$  et  $B_3$  ne sont pas indépendants.

- $\mathbb{P}(B_1) = b$ .
- $\mathbb{P}(B_3) = \mathbb{P}\left((B_1 \cap B_2 \cap B_3) \cup (R_1 \cap R_2 \cap B_3) \cup (V_1 \cap V_2 \cap B_3)\right) = b^3 + r^2b + v^2b = b(b^2 + r^2 + v^2)$ .
- $\mathbb{P}(B_1 \cap B_3) = \mathbb{P}(B_1 \cap B_2 \cap B_3) = b^3$ .

On remarque alors que :

$$\mathbb{P}(B_1 \cap B_3) = \mathbb{P}(B_1)\mathbb{P}(B_3) \iff b^3 = b^2(b^2 + r^2 + v^2) \iff b = b^2 + r^2 + v^2$$

Or, cette dernière inégalité est fautive en général (par exemple pour  $b = r = \frac{1}{4}$  et  $v = \frac{1}{2}$ ). On doit donc, pour traiter le cas général, faire une démonstration qui n'utilise pas l'indépendance des  $B_i$ .

□

3. a) Montrer que, pour tout  $x \in ]0, 1[$  :

$$\sum_{k=2}^{+\infty} (1-x)kx^{k-1} = \frac{1}{1-x} + x - 1$$

*Démonstration.*

Soit  $x \in ]0, 1[$ . La série  $\sum kx^{k-1}$  est une série géométrique dérivée de raison  $x$  vérifiant  $|x| < 1$  donc est convergente. De plus :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} kx^{k-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$$

On en déduit que :

$$\sum_{k=2}^{+\infty} kx^{k-1} = \sum_{k=1}^{+\infty} kx^{k-1} - 1 = \frac{1}{(1-x)^2} - 1$$

On a bien :  $\forall x \in ]0, 1[, \sum_{k=2}^{+\infty} (1-x)kx^{k-1} = \frac{1}{1-x} + x - 1$ .

□

b) En déduire que la variable aléatoire  $X$  admet une espérance et que :

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{1-b} + \frac{1}{1-r} + \frac{1}{1-v} - 2$$

*Démonstration.*

La variable aléatoire  $X$  admet une espérance si et seulement si la série  $\sum k\mathbb{P}([X = k])$  converge absolument, ce qui revient à montrer la convergence car il s'agit d'une série à termes positifs. Soit  $n$  un entier supérieur ou égal à 2.

$$\begin{aligned} \sum_{k=2}^n k\mathbb{P}([X = k]) &= \sum_{k=2}^n k\left((1-b)b^{k-1} + (1-r)r^{k-1} + (1-v)v^{k-1}\right) \\ &= \sum_{k=2}^n k(1-b)b^{k-1} + \sum_{k=2}^n k(1-r)r^{k-1} + \sum_{k=2}^n k(1-v)v^{k-1} \\ &\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{1-b} + b - 1 + \frac{1}{1-r} + r - 1 + \frac{1}{1-v} + v - 1 \quad (\text{d'après la question 3.a}) \end{aligned}$$

Or, puisque  $b + r + v = 1$ , on a :

$$\begin{aligned}\frac{1}{1-b} + b - 1 + \frac{1}{1-r} + r - 1 + \frac{1}{1-v} + v - 1 &= \frac{1}{1-b} + \frac{1}{1-r} + \frac{1}{1-v} + b + r + v - 3 \\ &= \frac{1}{1-b} + \frac{1}{1-r} + \frac{1}{1-v} + 1 - 3 \\ &= \frac{1}{1-b} + \frac{1}{1-r} + \frac{1}{1-v} - 2\end{aligned}$$

Ainsi :  $X$  admet une espérance et  $\mathbb{E}(X) = \frac{1}{1-b} + \frac{1}{1-r} + \frac{1}{1-v} - 2$ .

□

## Partie II - Étude d'une fonction de deux variables

On considère la fonction  $f$  de classe  $\mathcal{C}^2$  sur l'ouvert  $U = ]0, 1[ \times ]0, 1[$  définie par :

$$\forall (x, y) \in U, f(x, y) = \frac{1}{1-x} + \frac{1}{1-y} + \frac{1}{x+y}$$

4. Calculer, pour tout  $(x, y) \in U$ ,  $\partial_1(f)(x, y)$  et  $\partial_2(f)(x, y)$ .

*Démonstration.*

La fonction  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $U$  donc admet des dérivées partielles d'ordre 1 sur  $U$ .

Soit  $(x, y) \in U$ .

$$\partial_1(f)(x, y) = \frac{1}{(1-x)^2} - \frac{1}{(x+y)^2} \text{ et } \partial_2(f)(x, y) = \frac{1}{(1-y)^2} - \frac{1}{(x+y)^2}$$

□

5. Montrer qu'il existe un unique point  $(x_0, y_0)$  de  $U$  en lequel  $f$  est susceptible de posséder un extremum local et déterminer  $(x_0, y_0)$ .

*Démonstration.*

- $U$  étant un ouvert et la fonction  $f$  étant de classe  $\mathcal{C}^1$ , si  $f$  admet un extremum local en un point de  $U$ , il s'agit nécessairement d'un point critique.

- Cherchons alors les points critiques de  $f$  dans  $U$ . Soit  $(x, y) \in U$ .

$$\begin{aligned}
 (x, y) \text{ est une point critique de } f &\iff \begin{cases} \partial_1(f)(x, y) = 0 \\ \partial_2(f)(x, y) = 0 \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} \frac{1}{(1-x)^2} - \frac{1}{(x+y)^2} = 0 \\ \frac{1}{(1-y)^2} - \frac{1}{(x+y)^2} = 0 \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} \frac{1}{(1-x)^2} = \frac{1}{(x+y)^2} \\ \frac{1}{(1-y)^2} = \frac{1}{(x+y)^2} \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} \frac{1}{(1-x)^2} = \frac{1}{(x+y)^2} \\ \frac{1}{(1-y)^2} = \frac{1}{(1-x)^2} \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} \frac{1}{(1-x)^2} = \frac{1}{(x+y)^2} \\ 1-y = 1-x \end{cases} \quad (\text{car la fonction } u \mapsto \frac{1}{u^2} \text{ est} \\
 &\iff \begin{cases} \frac{1}{(1-x)^2} = \frac{1}{(2x)^2} \\ y = x \end{cases} \quad \text{bijective sur } ]0, 1[) \\
 &\iff \begin{cases} 1-x = 2x \\ y = x \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} x = \frac{1}{3} \\ y = \frac{1}{3} \end{cases}
 \end{aligned}$$

Le seul point susceptible d'être un extremum local pour  $f$  est le point  $(x_0, y_0) = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ .

□

6. Montrer que  $f$  admet en  $(x_0, y_0)$  un minimum local.

*Démonstration.*

- La fonction  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $U$  donc admet des dérivées partielles d'ordre 2 sur  $U$ .  
Soit  $(x, y) \in U$ .

$$\begin{aligned}
 \partial_{1,1}^2(f)(x, y) &= \frac{2}{(1-x)^3} + \frac{2}{(x+y)^3} & \partial_{1,2}^2(f)(x, y) &= \frac{2}{(x+y)^3} \\
 \partial_{2,1}^2(f)(x, y) &= \frac{2}{(x+y)^3} & \partial_{2,2}^2(f)(x, y) &= \frac{2}{(1-y)^3} + \frac{2}{(x+y)^3}
 \end{aligned}$$

- On pose  $H = \nabla^2(f)(x_0, y_0)$ . On a alors, après simplifications :

$$H = \begin{pmatrix} \frac{3^3}{2} & \frac{3^3}{2^2} \\ \frac{3^3}{2^2} & \frac{3^3}{2} \end{pmatrix}$$

Soit  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

$$\begin{aligned} \lambda \text{ est une valeur propre de } H &\iff \begin{vmatrix} \frac{3^3}{2} - \lambda & \frac{3^3}{2^2} \\ \frac{3^3}{2^2} & \frac{3^3}{2} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \\ &\iff \left(\frac{3^3}{2} - \lambda\right)^2 - \left(\frac{3^3}{2^2}\right)^2 = 0 \\ &\iff \left(\frac{3^3}{2} - \lambda - \frac{3^3}{2^2}\right) \left(\frac{3^3}{2} - \lambda + \frac{3^3}{2^2}\right) = 0 \end{aligned}$$

Ainsi, les valeurs propres de  $H$  sont :

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{3^3}{2} - \frac{3^3}{2^2} = \frac{3^3}{2^2} > 0 \\ \lambda_2 &= \frac{3^3}{2} + \frac{3^3}{2^2} = \frac{3^4}{2^2} > 0 \end{aligned}$$

Les deux valeurs propres de  $H$  sont strictement positives donc  $f$  admet en  $(x_0, y_0)$  un minimum local.

□

7. a) Exprimer  $\mathbb{E}(X)$  en fonction de  $f(b, r)$ .

*Démonstration.*

Tout d'abord, puisque  $b + r + v = 1$  :

$$f(b, r) = \frac{1}{1-b} + \frac{1}{1-r} + \frac{1}{b+r} = \frac{1}{1-b} + \frac{1}{1-r} + \frac{1}{1-v}$$

Ensuite, d'après la question 3.b) :

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{1-b} + \frac{1}{1-r} + \frac{1}{1-v} - 2$$

On en déduit que  $\mathbb{E}(X) = f(b, r) - 2$ .

□

b) Que peut-on dire de  $\mathbb{E}(X)$  lorsque  $b = r = v = \frac{1}{3}$  ?

*Démonstration.*

On peut dire que  $\mathbb{E}(X)$  est localement minimale en ce choix de paramètres. Autrement dit, si l'on fait varier un peu les paramètres depuis cette position symétrique, on devra attendre en moyenne plus longtemps pour voir apparaître le premier changement de couleur.

Nous n'avons cependant pas montré que  $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$  était un minimum global, donc on ne peut rien dire de plus.

□

**Partie III - Étude d'une variable aléatoire à densité**

8. Montrer que l'intégrale  $\int_2^{+\infty} \frac{1}{3^t} dt$  est convergente et déterminer sa valeur. (On rappelle que  $3^t = e^{t \ln(3)}$ )

*Démonstration.*

La fonction  $t \mapsto e^{-t \ln(3)}$  est continue sur  $[2, +\infty[$  donc l'intégrale  $\int_2^{+\infty} \frac{1}{3^t} dt$  est impropre en  $+\infty$ .

Soit  $B \geq 2$ .

$$\begin{aligned} \int_2^B \frac{1}{3^t} dt &= \int_2^B e^{-t \ln(3)} dt \\ &= \left[ \frac{e^{-t \ln(3)}}{-\ln(3)} \right]_2^B \\ &= \frac{e^{-B \ln(3)} - e^{-2 \ln(3)}}{-\ln(3)} \xrightarrow{B \rightarrow +\infty} \frac{e^{-2 \ln(3)}}{\ln(3)} = \frac{e^{-\ln(9)}}{\ln(3)} = \frac{1}{9 \ln(3)} \quad (\text{car } \ln(3) > 0) \end{aligned}$$

Ainsi : l'intégrale  $\int_2^{+\infty} \frac{1}{3^t} dt$  est convergente et  $\int_2^{+\infty} \frac{1}{3^t} dt = \frac{1}{9 \ln(3)}$ .

□

On note  $\alpha = \int_2^{+\infty} \frac{1}{3^t} dt$  et on considère la fonction  $g$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, g(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \in ]-\infty, 2[ \\ \frac{1}{\alpha 3^t} & \text{si } t \in [2, +\infty[ \end{cases}$$

9. Vérifier que  $g$  est une densité de probabilité.

On note  $Y$  une variable aléatoire admettant  $g$  comme densité.

*Démonstration.*

- Soit  $t \in \mathbb{R}$ .

- × Si  $t < 2$ , alors  $g(t) = 0$ .

- × Si  $t \geq 2$ , alors  $g(t) = \frac{1}{\alpha 3^t} \geq 0$  par produit de deux nombres positifs.

Donc :  $\forall t \in \mathbb{R}, g(t) \geq 0$ .

- La fonction  $g$  est :

- × continue sur  $] -\infty, 2[$  car constante,

- × continue sur  $]2, +\infty[$  car  $t \mapsto \frac{1}{\alpha 3^t}$  est continue sur  $\mathbb{R}$  par continuité de la fonction exponentielle.

Donc :  $g$  est continue sur  $\mathbb{R}$  éventuellement privé d'un nombre fini de points.

- Pour terminer, par définition de  $\alpha$  et par linéarité de l'intégrale :  $\int_{-\infty}^{+\infty} g(t) dt$  converge et

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(t) dt = \int_2^{+\infty} g(t) dt = \frac{1}{\alpha} \alpha = 1.$$

On peut conclure que  $g$  est une densité de probabilité.

□

10. Montrer que  $Y$  admet une espérance et calculer cette espérance.

*Démonstration.*

La variable aléatoire  $Y$  admet une espérance si et seulement si l'intégrale doublement impropre  $\int_{-\infty}^{+\infty} tg(t) dt$  converge absolument, ce qui revient à montrer la convergence pour ce calcul de moment.

Tout d'abord :

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} tg(t) dt &= \int_2^{+\infty} tg(t) dt && (\text{car } g \text{ est nulle en dehors de } [2, +\infty[) \\ &= \frac{1}{\alpha} \int_2^{+\infty} te^{-t \ln(3)} dt \end{aligned}$$

Soit  $B \geq 2$ . Procédons par intégration par parties :

$$\begin{cases} u'(t) = e^{-t \ln(3)} & u(t) = \frac{e^{-t \ln(3)}}{-\ln(3)} \\ v(t) = t & v'(t) = 1 \end{cases}$$

Cette intégration par parties est valide car les fonctions  $u$  et  $v$  sont de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $[2, B]$ .

$$\begin{aligned} \int_2^B te^{-t \ln(3)} dt &= \left[ t \frac{e^{-t \ln(3)}}{-\ln(3)} \right]_2^B + \int_2^B \frac{e^{-t \ln(3)}}{\ln(3)} dt \\ &= -B \frac{e^{-B \ln(3)}}{\ln(3)} + 2 \frac{e^{-2 \ln(3)}}{\ln(3)} + \frac{1}{\ln(3)} \left[ \frac{e^{-t \ln(3)}}{-\ln(3)} \right]_2^B \\ &= -B \frac{e^{-B \ln(3)}}{\ln(3)} + 2 \frac{e^{-2 \ln(3)}}{\ln(3)} - \frac{1}{\ln(3)^2} (e^{-B \ln(3)} - e^{-2 \ln(3)}) \\ &= -\frac{B e^{-B \ln(3)}}{\ln(3)} + \frac{2 e^{-2 \ln(3)}}{\ln(3)} - \frac{e^{-B \ln(3)}}{\ln(3)^2} + \frac{e^{-2 \ln(3)}}{\ln(3)^2} \\ &\xrightarrow{B \rightarrow +\infty} \frac{2 e^{-2 \ln(3)}}{\ln(3)} + \frac{e^{-2 \ln(3)}}{\ln(3)^2} \quad (\text{par croissances comparées}) \end{aligned}$$

On en déduit que  $Y$  admet une espérance et

$$\mathbb{E}(Y) = \frac{1}{9 \ln(3)} \left( \frac{2}{\ln(3)} + \frac{1}{\ln(3)^2} \right) = 2 + \frac{1}{\ln(3)}.$$

□

11. On note  $Z$  la variable aléatoire égale à la partie entière de  $Y$ . On rappelle que la partie entière d'un nombre réel  $x$  est le plus grand entier inférieur ou égal à  $x$ .

a) Déterminer la loi de probabilité de  $Z$ .

*Démonstration.*

Tout d'abord,  $g$  est nulle en dehors de  $[2, +\infty[$  donc on peut considérer que  $Y(\Omega) = [2, +\infty[$ . On en déduit que  $Z(\Omega) = \llbracket 2, +\infty \rrbracket$ .

Soit  $k$  un entier supérieur ou égal à 2.

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}([Z = k]) &= \mathbb{P}([Y] = k) \\
 &= \mathbb{P}([k \leq Y < k + 1]) \\
 &= \int_k^{k+1} g(t) dt && \text{(car } k < k + 1) \\
 &= 9 \ln(3) \left[ \frac{e^{-t \ln(3)}}{-\ln(3)} \right]_k^{k+1} \\
 &= -9 \left( e^{-(k+1) \ln(3)} - e^{-k \ln(3)} \right) \\
 &= -9 \left( \frac{1}{3^{k+1}} - \frac{1}{3^k} \right) \\
 &= \frac{1}{3^{k-2}} - \frac{1}{3^{k-1}} \\
 &= \frac{2}{3^{k-1}}
 \end{aligned}$$

Finalement :  $Z(\Omega) = \llbracket 2, +\infty \llbracket$  et, pour tout  $k \geq 2$ ,  $\mathbb{P}([Z = k]) = \frac{2}{3^{k-1}}$ .

□

b) Comparer la loi de probabilité de  $X$  lorsque  $b = r = v = \frac{1}{3}$  et la loi de probabilité de  $Z$ .

*Démonstration.*

Tout d'abord,  $X(\Omega) = \llbracket 2, +\infty \llbracket = Z(\Omega)$ .

Lorsque  $b = r = v = \frac{1}{3}$ , pour tout entier  $k \geq 2$  :

$$\mathbb{P}([X = k]) = \frac{2}{3} \frac{1}{3^{k-1}} + \frac{2}{3} \frac{1}{3^{k-1}} + \frac{2}{3} \frac{1}{3^{k-1}} = \frac{2}{3^k} + \frac{2}{3^k} + \frac{2}{3^k} = \frac{2}{3^{k-1}} = \mathbb{P}([Z = k])$$

On en déduit que les variables aléatoires  $X$  et  $Z$  suivent la même loi.

□

## Partie IV - Simulation informatique

12. On note  $T$  la variable aléatoire prenant la valeur 0 (respectivement 1 ; 2) si l'on obtient une boule de couleur blanche (respectivement rouge ; verte) lors d'un unique tirage dans l'urne. Écrire une fonction **Python** `simulT(b,r,v)` prenant en paramètres les réels  $b$ ,  $r$  et  $v$  et simulant la variable aléatoire  $T$ .

*Démonstration.*

La loi de  $T$  est donnée par  $T(\Omega) = \{0, 1, 2\}$  et

$$\mathbb{P}([T = 0]) = b, \quad \mathbb{P}([T = 1]) = r, \quad \mathbb{P}([T = 2]) = v$$

On propose la fonction **Python** suivante.



```

1 def simulT(b,r,v):
2     t = rd.random()
3     if t < b:
4         return 0
5     elif t < b+r:
6         return 1
7     else:
8         return 2

```

□

13. Compléter la fonction **Python** suivante pour qu'elle simule la variable aléatoire  $X$ .

```

1 def simulX(b,r,v):
2     tirage_initial = simulT(b,r,v)
3     X = 2
4     while simulT(b,r,v) == tirage_initial:
5         X += 1
6     return X

```

### Exercice 3 (EML 2018)

On note  $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$  la base canonique de  $\mathbb{R}^3$ .

On considère l'endomorphisme  $f$  de  $\mathbb{R}^3$  dont la matrice dans la base  $\mathcal{B}$  est la matrice  $A$  donnée par :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -5 \\ -2 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

On considère également l'endomorphisme  $g$  de  $\mathbb{R}^3$  défini par :

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, g(x, y, z) = (x + y - z, 2y, -x + y + z)$$

Enfin, on pose :

$$u = e_1 - e_2 = (1, -1, 0) \quad \text{et} \quad v = f(e_1) + e_1$$

1. a) Calculer  $v$ .

*Démonstration.*

- Tout d'abord :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f(e_1)) = A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -5 \\ -2 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

On en déduit :  $f(e_1) = (0, -2, 1)$ .

- Ainsi :

$$v = f(e_1) + e_1 = (0, -2, 1) + (1, 0, 0) = (1, -2, 1)$$

$$v = (1, -2, 1)$$

□

b) Montrer que la famille  $\mathcal{C} = (u, v, e_1)$  est une base de  $\mathbb{R}^3$ .

*Démonstration.*

- Montrons que la famille  $\mathcal{C}$  est libre.

Soit  $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$ .

Supposons :

$$\lambda_1 \cdot u + \lambda_2 \cdot v + \lambda_3 \cdot e_1 = 0_{\mathbb{R}^3}$$

On obtient alors les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} \lambda_1 \cdot u + \lambda_2 \cdot v + \lambda_3 \cdot e_1 = 0_{\mathbb{R}^3} &\iff \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ -\lambda_1 - 2\lambda_2 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \end{cases} \\ &\stackrel{L_2 \leftarrow L_2 + L_1}{\iff} \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ -\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \end{cases} \\ &\stackrel{L_3 \leftarrow L_3 + L_2}{\iff} \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ -\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \end{cases} \\ &\iff \{\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0 \\ &\quad (\text{par remontées successives}) \end{aligned}$$

On en déduit que la famille  $\mathcal{C}$  est une famille libre de  $\mathbb{R}^3$ .

- En résumé :
  - × la famille  $\mathcal{C}$  est libre,
  - ×  $\text{Card}(\mathcal{C}) = \text{Card}((u, v, e_1)) = 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$ .

La famille  $\mathcal{C} = (u, v, e_1)$  est donc une base de  $\mathbb{R}^3$ .

□

c) On note  $P$  la matrice de passage de la base  $\mathcal{B}$  à la base  $\mathcal{C}$ .  
Expliciter la matrice  $P$  et calculer  $P^{-1}$ .

*Démonstration.*

- Pour déterminer la matrice de passage  $P$  de la base  $\mathcal{B}$  dans la base  $\mathcal{C}$ , on commence par exprimer les vecteurs de la base  $\mathcal{C}$  dans la base  $\mathcal{B}$ .  
On obtient ici :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{Mat}_{\mathcal{B}}(v) = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \text{Mat}_{\mathcal{B}}(e_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

La matrice  $P$  est la concaténation de ces trois vecteurs.

Ainsi :  $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ .

- La matrice  $P$  est inversible en tant que matrice de passage.
- Pour déterminer  $P^{-1}$ , on applique l'algorithme du pivot de Gauss.

$$\left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

On effectue l'opération  $\{ L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \}$ . On obtient :

$$\left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

On effectue l'opération  $\{ L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \}$ . On obtient :

$$\left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

La réduite obtenue est triangulaire supérieure et ses coefficients diagonaux sont tous non nuls.  
On retrouve ainsi que  $P$  est inversible.

On effectue les opérations  $\left\{ \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 - L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_3 \end{array} \right.$ . On obtient :

$$\left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

On effectue l'opération  $\{ L_1 \leftarrow L_1 + L_2 \}$ . On obtient :

$$\left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

On effectue l'opération  $\{ L_2 \leftarrow -L_2 \}$ . On obtient :

$$\left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

Finalement :  $P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ .

□

2. a) Déterminer la matrice  $A'$  de  $f$  dans la base  $\mathcal{C}$ .

*Démonstration.*

• Tout d'abord :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f(u)) = A \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -5 \\ -2 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(2 \cdot u)$$

On en déduit :  $f(u) = 2 \cdot u + 0 \cdot v + 0 \cdot e_1$ .

Ainsi :  $\text{Mat}_{\mathcal{C}}(f(u)) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

• Ensuite :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f(v)) = A \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -5 \\ -2 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(-v)$$

On en déduit :  $f(v) = 0 \cdot u + (-1) \cdot v + 0 \cdot e_1$ .

Ainsi :  $\text{Mat}_{\mathcal{C}}(f(v)) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

• Enfin, par définition de  $v$  :  $v = f(e_1) + e_1$ .

Donc :  $f(e_1) = v - e_1 = 0 \cdot u + 1 \cdot v + (-1) \cdot e_1$ .

Ainsi :  $\text{Mat}_{\mathcal{C}}(f(e_1)) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ .

On en déduit :  $A' = \text{Mat}_{\mathcal{C}}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ .

**Commentaire**

On pouvait également remarquer que la formule de changement de base donne :

$$A' = \text{Mat}_{\mathcal{C}}(f) = P_{\mathcal{C},\mathcal{B}} \times \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) \times P_{\mathcal{B},\mathcal{C}} = P^{-1} \times A \times P$$

Par multiplication matricielle, on obtient aussi :  $A' = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ .

Ce n'était cependant sans doute pas la méthode attendue dans cette question, si on se fie à l'énoncé de la question **2.b**). □

**b)** Expliciter le lien entre les matrices  $A$ ,  $A'$ ,  $P$  et  $P^{-1}$ .

*Démonstration.*

$D'après\ la\ formule\ de\ changement\ de\ base : A = P A' P^{-1}.$

□

**c)** En déduire les valeurs propres de  $A$ . La matrice  $A$  est-elle diagonalisable ?

*Démonstration.*

- La matrice  $A'$  est une matrice triangulaire, donc ses valeurs propres sont ses coefficients diagonaux. D'où :  $\text{Sp}(A') = \{2, -1\}$ .  
De plus,  $A'$  est semblable à  $A$ .

$On\ en\ déduit : \text{Sp}(A) = \text{Sp}(A') = \{2, -1\}.$

- La matrice  $A'$  étant semblable à la matrice  $A$ , nous allons étudier la diagonalisabilité de  $A'$ .  
- Déterminons  $E_2(A')$  le sous-espace propre de  $A'$  associé à la valeur propre 2.

Soit  $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ .

$$\begin{aligned} X \in E_2(A') &\Leftrightarrow (A' - 2I_3)X = 0_{\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} -3y + z = 0 \\ -3z = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \\ \text{(par remontées successives)} \end{cases} \end{aligned}$$

On obtient alors :

$$\begin{aligned} E_2(A') &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid y = 0 \text{ et } z = 0 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ x \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{R} \right\} = \text{Vect} \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \end{aligned}$$

La famille  $\left( \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$  :

- × engendre  $E_2(A')$ ,
- × est libre, car constituée d'un unique vecteur non nul.

Ainsi  $\left( \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$  est une base de  $E_2(A')$ .

On en déduit :  $\dim(E_2(A')) = \text{Card} \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = 1.$

- Déterminons  $E_{-1}(A')$  le sous-espace propre de  $A'$  associé à la valeur propre  $-1$ .

Soit  $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ .

$$\begin{aligned} X \in E_{-1}(A') &\Leftrightarrow (A' + I_3)X = 0_{\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 3x & = 0 \\ & z = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x & = 0 \\ & z = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

On obtient alors :

$$\begin{aligned} E_{-1}(A') &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid x = 0 \text{ et } z = 0 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \mid y \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ y \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mid y \in \mathbb{R} \right\} = \text{Vect} \left( \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \end{aligned}$$

La famille  $\left( \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$  :

- × engendre  $E_{-1}(A')$ ,
- × est libre, car constituée d'un unique vecteur non nul.

Ainsi  $\left( \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$  est une base de  $E_{-1}(A')$ .

On en déduit :  $\dim(E_{-1}(A')) = \text{Card} \left( \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = 1.$

- Supposons que la matrice  $A'$  soit diagonalisable. Alors il existe  $(U_1, U_2, U_3)$  une base de  $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$  formée de vecteurs propres de  $A'$ . Par principe des tiroirs, deux de ces trois vecteurs propres doivent se trouver dans le même sous-espace propre. On a alors construit une famille libre de cardinal 2 dans un espace vectoriel de dimension 1. C'est absurde. Donc  $A'$  n'est pas diagonalisable.

Ainsi, la matrice  $A$  n'est pas diagonalisable.

□

d) L'endomorphisme  $f$  est-il bijectif?

*Démonstration.*

Comme le réel 0 n'est pas valeur propre de  $A$ , la matrice  $A$  est inversible et l'endomorphisme  $f$  est bijectif.

□

3. a) Déterminer la matrice  $B$  de  $g$  dans la base  $\mathcal{B}$ .

*Démonstration.*

- Tout d'abord :  $g(e_1) = g(1, 0, 0) = (1 + 0 - 0, 0, -1 + 0 + 0) = (1, 0, -1)$ .

$$\text{Ainsi : } \text{Mat}_{\mathcal{B}}(g(e_1)) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

- Ensuite :  $g(e_2) = g(0, 1, 0) = (0 + 1 - 0, 2, -0 + 1 + 0) = (1, 2, 1)$ .

$$\text{Ainsi : } \text{Mat}_{\mathcal{B}}(g(e_2)) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- Enfin :  $g(e_3) = g(0, 0, 1) = (0 + 0 - 1, 0, -0 + 0 + 1) = (-1, 0, 1)$ .

$$\text{Ainsi : } \text{Mat}_{\mathcal{B}}(g(e_3)) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

On en déduit :  $B = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(g) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ .

□

b) Montrer :  $B^2 = 2B$ .

*Démonstration.*

On calcule :

$$B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 0 & 4 & 0 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 2B$$

On a bien :  $B^2 = 2B$ .

□

c) En déduire les valeurs propres de  $B$ , ainsi qu'une base de chaque sous-espace propre.

*Démonstration.*

- D'après la question précédente, le polynôme  $Q(X) = X^2 - 2X = X(X - 2)$  est un polynôme annulateur de la matrice  $B$ .

$$\text{Ainsi : } \text{Sp}(B) \subset \{\text{racines de } Q\} = \{0, 2\}.$$

### Commentaire

- Une matrice  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  possède TOUJOURS un polynôme annulateur non nul  $Q$ . On peut même démontrer (ce n'est pas au programme en ECE) qu'il existe toujours un tel polynôme de degré (au plus)  $n$ .
- Si  $Q$  est un polynôme annulateur de  $A$  alors, pour tout  $\alpha \in \mathbb{R}$ , le polynôme  $\alpha Q$  est toujours un polynôme annulateur de  $A$  puisque :

$$(\alpha Q)(A) = \alpha Q(A) = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$$

Cela suffit à démontrer que  $A$  possède une infinité de polynômes annulateurs. On peut en obtenir d'autres. Par exemple  $R(X) = (X - 5)Q(X)$  est un polynôme annulateur de  $A$  puisque :

$$R(A) = (A - 5I)Q(A) = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$$

Il faut donc parler d'UN polynôme annulateur d'une matrice.

- Les racines d'un polynôme annulateur ne sont pas forcément toutes valeurs propres de  $A$ . Si c'était le cas,  $A$  aurait une infinité de valeurs propres (elle en possède au plus  $n$ ). Par exemple, comme  $R(X) = (X - 5)Q(X)$  est un polynôme annulateur, un tel raisonnement permettrait de démontrer que 5 est aussi valeur propre.

- Soit  $U = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ .

$$\begin{aligned} U \in E_0(B) &\iff BU = 0_{\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \\ &\iff \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{cases} x + y - z = 0 \\ 2y = 0 \\ -x + y + z = 0 \end{cases} \\ &\stackrel{L_3 \leftarrow L_3 + L_1}{\iff} \begin{cases} x + y - z = 0 \\ y = 0 \\ -x + y + z = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x + y = z \\ y = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x = z \\ y = 0 \end{cases} \end{aligned}$$



On obtient :

$$\begin{aligned} E_0(U) &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid x = z \text{ et } y = 0 \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} z \\ 0 \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid z \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \text{Vect} \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \end{aligned}$$

Comme  $E_0(B) \neq \{0_{\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})}\}$ , le réel 0 est bien valeur propre de  $B$ .

La famille  $\mathcal{F}_0 = \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$  :

× engendre  $E_0(B)$ ,

× est libre car constituée d'un unique vecteur non nul.

Ainsi,  $\mathcal{F}_0 = \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$  est une base de  $E_0(B)$ .

• Soit  $U = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ .

$$\begin{aligned} U \in E_2(B) &\iff (B - 2I_3)U = 0_{\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \\ &\iff \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{cases} -x + y - z = 0 \\ -x + y - z = 0 \end{cases} \\ &\iff \{ y = x + z \} \end{aligned}$$

On obtient :

$$\begin{aligned} E_2(B) &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid y = x + z \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ x+z \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid (x, z) \in \mathbb{R}^2 \right\} \\ &= \left\{ y \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mid (x, z) \in \mathbb{R}^2 \right\} \\ &= \text{Vect} \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \end{aligned}$$

Comme  $E_2(B) \neq \{0_{\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})}\}$ , le réel 2 est bien valeur propre de  $B$ .

La famille  $\mathcal{F}_2 = \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$  :

- × engendre  $E_2(B)$ ,
- × est libre car constituée de deux vecteurs non colinéaires.

Ainsi,  $\mathcal{F}_2 = \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$  est une base de  $E_2(B)$ .

**Commentaire**

On a bien déterminé toutes les valeurs propres de  $B$ . En effet :

× on a montré dans un premier temps :  $\text{Sp}(B) \subset \{0, 2\}$ . Ainsi, les réels 0 et 2 sont **les seules valeurs propres possibles** de la matrice  $B$ .

× on a ensuite démontré que 0 et 2 étaient effectivement des valeurs propres de  $B$

On en déduit :  $\text{Sp}(B) = \{0, 2\}$ . □

d) La matrice  $B$  est-elle diagonalisable ?

*Démonstration.*

- Par théorème de concaténation, la famille  $\mathcal{B}' = \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$  est libre.
- De plus,  $\text{Card}(\mathcal{B}') = 3 = \dim(\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}))$ .
- On en déduit que  $\mathcal{B}'$  est une base de  $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$  formée de vecteurs propres de  $B$ .

Ainsi, la matrice  $B$  est diagonalisable. □

On pose :  $\mathcal{E} = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \mid BM = MA\}$ .

4. a) Montrer que  $\mathcal{E}$  est un espace vectoriel.

*Démonstration.*

- Tout d'abord :  $\mathcal{E} \subset \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ .
- Ensuite :  $0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})} \in \mathcal{E}$ . En effet :
  - × d'une part :  $B \times 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})} = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$ ,
  - × d'autre part :  $0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})} \times A = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$ .
- Soit  $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ . Soit  $(M_1, M_2) \in \mathcal{E}^2$ .

$$\begin{aligned}
 B(\lambda_1 \cdot M_1 + \lambda_2 \cdot M_2) &= \lambda_1 \cdot B M_1 + \lambda_2 \cdot B M_2 \\
 &= \lambda_1 \cdot M_1 A + \lambda_2 \cdot M_2 A \quad (\text{car } (M_1, M_2) \in \mathcal{E}^2) \\
 &= (\lambda_1 \cdot M_1 + \lambda_2 \cdot M_2) A
 \end{aligned}$$

D'où :  $(\lambda_1 \cdot M_1 + \lambda_2 \cdot M_2) \in \mathcal{E}$ .

On en déduit que  $\mathcal{E}$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ , donc  $\mathcal{E}$  est un espace vectoriel. □

- b) Soit  $M$  une matrice appartenant à  $\mathcal{E}$ .  
 Montrer que  $M$  n'est pas inversible. (*On pourra raisonner par l'absurde*).

*Démonstration.*

On procède par l'absurde.

Supposons que la matrice  $M$  est inversible.

- Comme  $M \in \mathcal{E}$ , on a :  $BM = MA$ .
- De plus,  $M$  est inversible, donc, en multipliant à gauche par  $M^{-1}$ , on obtient :

$$M^{-1}BM = M^{-1}MA = A$$

Ainsi, les matrices  $A$  et  $B$  sont semblables.

- De plus, d'après la question 3.d), la matrice  $B$  est diagonalisable, donc elle est semblable à une matrice diagonale. Autrement dit, il existe :
  - ×  $Q \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  inversible,
  - ×  $D \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  diagonale,
 telles que :  $B = QDQ^{-1}$ .
- On en déduit :  $A = M^{-1}BM = M^{-1}QDQ^{-1}M = (Q^{-1}M)^{-1}DQ^{-1}M$ .  
 Ainsi la matrice  $A$  est semblable à une matrice diagonale, elle est donc diagonalisable.  
 Absurde d'après la question 2.b)!

Donc la matrice  $M$  n'est pas inversible.

□

5. On cherche à montrer que  $\mathcal{E}$  n'est pas réduit à l'ensemble  $\{0\}$ .

- a) Justifier que, pour tout réel  $\lambda$ , les matrices  $A - \lambda I_3$  et  ${}^t(A) - \lambda I_3$  ont même rang, la matrice  $I_3$  désignant la matrice identité de  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ .

*Démonstration.*

La transposition est une application linéaire, donc :

$${}^t(A - \lambda I_3) = {}^tA - \lambda {}^tI_3 = {}^tA - \lambda I_3$$

Or, pour toute matrice  $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  :  $\text{rg}({}^tM) = \text{rg}(M)$ .

Donc, en appliquant cette égalité à  $M = A - \lambda I_3$ , on obtient :

$$\begin{aligned} \text{rg}({}^t(A - \lambda I_3)) &= \text{rg}(A - \lambda I_3) \\ &\parallel \\ \text{rg}({}^tA - \lambda I_3) \end{aligned}$$

$$\text{rg}({}^tA - \lambda I_3) = \text{rg}(A - \lambda I_3)$$

**Commentaire**

On rappelle la linéarité de la transposition :

$$\forall (A, B) \in (\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}))^2, \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \quad {}^t(\lambda \cdot A + \mu \cdot B) = \lambda \cdot {}^tA + \mu \cdot {}^tB$$

□

- b) En déduire que la matrices  $B$  et  ${}^tA$  admettent une valeur propre en commun, notée  $\alpha$ .

*Démonstration.*

- D'après les questions 2.c) et 3.c), les matrices  $A$  et  $B$  ont la valeur propre 2 en commun.

- De plus, d'après la question précédente :

$$\text{rg}({}^tA - 2I_3) = \text{rg}(A - 2I_3) < 3$$

Le réel 2 est donc une valeur propre de  ${}^tA$ .

On en déduit que  $B$  et  ${}^tA$  ont une valeur propre en commun (la valeur propre 2). □

- c) Soient  $X$  un vecteur propre de  $B$  associé à la valeur propre  $\alpha$ , et  $Y$  un vecteur propre de  ${}^tA$  associé à la valeur propre  $\alpha$ . On note :  $N = X {}^tY$ .  
Montrer que la matrice  $N$  est non nulle et que  $N$  appartient à  $\mathcal{E}$ .

*Démonstration.*

- On note  $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$  et  $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ .

Les vecteurs  $X$  et  $Y$  sont des vecteurs propres. Ils sont donc non nuls. Ainsi :

× au moins l'un des  $x_i$  n'est pas nul. Notons le  $x_{i_0}$ . Ainsi :  $x_{i_0} \neq 0$ .

× au moins l'un des  $y_i$  n'est pas nul. Notons le  $y_{j_0}$ . Ainsi :  $y_{j_0} \neq 0$ .

De plus :

$$N = X {}^tY = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} (y_1 \ y_2 \ y_3) = \begin{pmatrix} x_1 y_1 & x_1 y_2 & x_1 y_3 \\ x_2 y_1 & x_2 y_2 & x_2 y_3 \\ x_3 y_1 & x_3 y_2 & x_3 y_3 \end{pmatrix}$$

Comme  $x_{i_0} y_{j_0} \neq 0_{\mathbb{R}}$ , on en déduit :  $N \neq 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$ .

- Tout d'abord, comme  $X$  est un vecteur propre de  $B$  associé à la valeur propre  $\alpha$  :

$$BN = B X {}^tY = (BX) {}^tY = \alpha \cdot X {}^tY = \alpha \cdot N$$

De plus :

$$\begin{aligned} NA &= X {}^tY A = X {}^tY {}^t({}^tA) = X {}^t({}^tA Y) \\ &= X {}^t(\alpha \cdot Y) && \text{(car } Y \text{ est un vecteur propre de } {}^tA \\ & && \text{associé à la valeur propre } \alpha) \\ &= X(\alpha \cdot {}^tY) = \alpha \cdot X {}^tY = \alpha \cdot N \end{aligned}$$

Finalement :  $BN = \alpha \cdot N = NA$ .

On en déduit :  $N \in \mathcal{E}$ .

### Commentaire

On utilise ici deux propriétés de la transposée :

- $\forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}), {}^t({}^tA) = A,$
- $\forall (A, B) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R}), {}^t(AB) = {}^tB {}^tA.$

□

- d) En déduire :  $\dim(\mathcal{E}) \geq 2$ .

*Démonstration.*

- D'après la question 3.c), les vecteurs  $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  et  $X_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  sont des vecteurs propres de  $B$  associés à la valeur propre 2.
- On note  $Y$  un vecteur propre de  ${}^tA$  associé à la valeur propre 2.
- D'après la question précédente, les matrices :

$$N_1 = X_1 {}^tY \quad \text{et} \quad N_2 = X_2 {}^tY$$

appartiennent à  $\mathcal{E}$ .

On en déduit :  $\text{Vect}(N_1, N_2) \subset \mathcal{E}$ .

- Montrons maintenant que la famille  $(N_1, N_2)$  est libre dans  $\mathcal{E}$ .  
Soit  $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ .  
Supposons :  $\lambda_1 \cdot N_1 + \lambda_2 \cdot N_2 = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$ .  
De plus :

$$\lambda_1 \cdot N_1 + \lambda_2 \cdot N_2 = \lambda_1 \cdot X_1 {}^tY + \lambda_2 \cdot X_2 {}^tY = (\lambda_1 \cdot X_1 + \lambda_2 \cdot X_2) {}^tY$$

On note :

$$X = \lambda_1 \cdot X_1 + \lambda_2 \cdot X_2 \quad \text{et} \quad N = (\lambda_1 \cdot X_1 + \lambda_2 \cdot X_2) {}^tY = X {}^tY$$

- × Tout d'abord, comme  $X_1$  et  $X_2$  sont des vecteurs propres de  $B$  associés à la valeur propre 2, alors  $X = \lambda_1 \cdot X_1 + \lambda_2 \cdot X_2$  est aussi un vecteur propre de  $B$  associé à la valeur propre 2 (car  $E_2(B)$  est un sous-espace vectoriel).
- × Or, on a démontré en question 5.c) que, si :
  - $X$  est un vecteur non nul,
  - $Y$  est un vecteur non nul,

alors :  $N = X {}^tY$  n'est pas la matrice nulle.

- × Par contraposée, comme  $N = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$ , alors :

$$X = 0_{\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \quad \text{OU} \quad Y = 0_{\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})}$$

Or, comme  $Y$  est un vecteur propre de  ${}^tA$ , alors  $Y \neq 0_{\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})}$ . On en déduit :

$$X = \lambda_1 \cdot X_1 + \lambda_2 \cdot X_2 = 0_{\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})}$$

- × Or, les vecteurs  $X_1$  et  $X_2$  ne sont pas colinéaires. Ils forment donc une famille libre.  
Ainsi :  $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ .

On en déduit que la famille  $(N_1, N_2)$  est libre.

Ainsi :  $\dim(\text{Vect}(N_1, N_2)) = 2$ .

- De plus :  $\dim(\text{Vect}(N_1, N_2)) \leq \dim(\mathcal{E})$ , car  $\text{Vect}(N_1, N_2) \subset \mathcal{E}$ .

On en déduit :  $2 \leq \dim(\mathcal{E})$ .

□

### Exercice 4 (EDHEC 2024)

Toutes les variables aléatoires rencontrées dans cet exercice sont supposées définies sur un même espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$  que l'on ne cherchera pas à déterminer.

1. Soit  $f$  la fonction qui à tout réel  $x$  associe

$$f(x) = \begin{cases} xe^{-x^2/2} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

a) Montrer que  $f$  peut être considérée comme densité d'une certaine variable aléatoire  $X$ .

*Démonstration.*

- Soit  $x \in \mathbb{R}$ .
    - × Si  $x < 0$ , alors  $f(x) = 0$ .
    - × Si  $x \geq 0$ , alors  $f(x) = xe^{-x^2/2} \geq 0$  par produit de deux nombres positifs.
- Donc :  $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \geq 0$ .

- La fonction  $f$  est :
    - × continue sur  $] -\infty, 0[$  car constante,
    - × continue sur  $]0, +\infty[$  car  $x \mapsto xe^{-x^2/2}$  est continue sur  $\mathbb{R}$ .
- Donc :  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}$  éventuellement privé d'un nombre fini de points.

- On a :

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx &= \int_0^{+\infty} f(x) dx && (\text{car } f \text{ est nulle en dehors de } [0, +\infty[) \\ &= \int_0^{+\infty} xe^{-x^2/2} dx \end{aligned}$$

La fonction  $x \mapsto xe^{-x^2/2}$  est continue sur  $[0, +\infty[$  donc cette intégrale est impropre en  $+\infty$ .  
Soit  $B \geq 0$ .

$$\begin{aligned} \int_0^B xe^{-x^2/2} dx &= - \left[ e^{-x^2/2} \right]_0^B \\ &= - \left( e^{-B^2/2} - 1 \right) \\ &= 1 - e^{-B^2/2} \xrightarrow{B \rightarrow +\infty} 1 \end{aligned}$$

Ainsi,  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$  converge et  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$ .

On peut conclure que  $f$  est une densité de probabilité.

□

b) Rappeler la valeur du moment d'ordre 2 d'une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite.

*Démonstration.*

Soit  $Z \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1)$ . D'après la formule de Koenig-Huygens :

$$\mathbb{V}(Z) = \mathbb{E}(Z^2) - \mathbb{E}(Z)^2$$

Or,  $\mathbb{E}(Z) = 0$  et  $\mathbb{V}(Z) = 1$ .

D'où :  $\mathbb{E}(Z^2) = 1$ .

□

c) En déduire, par des considérations de parité, que  $X$  a une espérance et que  $\mathbb{E}(X) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$ .

*Démonstration.*

- La variable aléatoire  $X$  admet une espérance si et seulement si l'intégrale doublement impropre  $\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x) dx$  converge absolument, ce qui revient à montrer la convergence pour ce calcul de moment.

- On a :

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x) dx &= \int_0^{+\infty} xf(x) dx && (\text{car } f \text{ est nulle en dehors de } [0, +\infty[) \\ &= \int_0^{+\infty} x^2 e^{-x^2/2} dx \end{aligned}$$

- D'autre part, d'après la question précédente :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx = 1 \quad (\text{l'intégrale est bien convergente})$$

et donc :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-x^2/2} dx = \sqrt{2\pi}$$

On en déduit que  $\int_0^{+\infty} x^2 e^{-x^2/2} dx$  converge.

De plus, la fonction  $x \mapsto x^2 e^{-x^2/2}$  est paire donc :

$$\int_0^{+\infty} x^2 e^{-x^2/2} dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-x^2/2} dx = \frac{\sqrt{2\pi}}{2} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

On peut conclure que  $X$  a une espérance et que  $\mathbb{E}(X) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$ .

□

2. On note  $F_X$  la fonction de répartition de  $X$ . Déterminer  $F_X(x)$  selon que  $x < 0$  ou  $x \geq 0$ .

*Démonstration.*

La fonction  $f$  est nulle en dehors de  $[0, +\infty[$  donc on peut considérer que  $X(\Omega) = [0, +\infty[$ .

Soit  $x \in \mathbb{R}$ .

- Si  $x < 0$ , alors  $F_X(x) = 0$  car  $[X \leq x] = \emptyset$ .

- Si  $x \geq 0$ , alors

$$\begin{aligned}
 F_X(x) &= \int_{-\infty}^x f(t) dt \\
 &= \int_0^x f(t) dt && \text{(car } f \text{ est nulle en dehors de } [0, +\infty[) \\
 &= \int_0^x te^{-t^2/2} dt \\
 &= - \left[ e^{-t^2/2} \right]_0^x \\
 &= 1 - e^{-x^2/2}
 \end{aligned}$$

Ainsi :  $F_X : x \mapsto \begin{cases} 1 - e^{-x^2/2} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$  .

□

### 3. Simulation

- a) On pose  $Z = X^2$  et on note  $F_Z$  sa fonction de répartition. Déterminer  $F_Z(x)$  dans chacun des cas  $x < 0$  et  $x \geq 0$  et montrer que  $Z$  suit une loi exponentielle dont on précisera le paramètre.

*Démonstration.*

On pose  $g : x \mapsto x^2$  de sorte que  $Z = g(X)$ . On a alors :

$$Z(\Omega) = g(X)(\Omega) = g(X(\Omega)) = g([0, +\infty[) = [0, +\infty[$$

Soit  $x \in \mathbb{R}$ .

- Si  $x < 0$ , alors  $F_Z(x) = 0$  car  $[Z \leq x] = \emptyset$ .
- Si  $x \geq 0$ , alors

$$\begin{aligned}
 F_Z(x) &= \mathbb{P}([Z \leq x]) \\
 &= \mathbb{P}([X^2 \leq x]) \\
 &= \mathbb{P}([X \leq \sqrt{x}]) && \text{(car } X \text{ est à valeurs positives)} \\
 &= F_X(\sqrt{x}) \\
 &= 1 - e^{-x/2} && \text{(car } \sqrt{x} \geq 0)
 \end{aligned}$$

Ainsi :  $F_Z : x \mapsto \begin{cases} 1 - e^{-x/2} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$  et on reconnaît la fonction de répartition d'une loi exponentielle de paramètre  $\frac{1}{2}$ . Or, la fonction de répartition caractérise la loi.

On en déduit que  $Z \hookrightarrow \mathcal{E}\left(\frac{1}{2}\right)$ .

□

- b) Utiliser la question 3.a) pour écrire une fonction **Python** d'en-tête `def simulX()` qui renvoie une simulation de  $X$ .



*Démonstration.*

Rappelons que  $X$  est à valeurs positives, ainsi  $X = \sqrt{X^2} = \sqrt{Z}$ .

On en déduit la fonction **Python** suivante :

```

1 def simulX():
2     Z = rd.exponential(2)
3     return np.sqrt(Z)

```

□

4. Pour tout entier naturel  $n$  non nul, on pose  $Y_n = \frac{X}{\sqrt{n}}$  et on note  $G_n$  la fonction de répartition de  $Y_n$ .

a) Montrer que l'on a :

$$G_n(x) = \begin{cases} 1 - e^{-nx^2/2} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

*Démonstration.*

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Puisque  $X(\Omega) = [0, +\infty[$ , on en déduit que  $Y_n(\Omega) = [0, +\infty[$ .

Soit  $x \in \mathbb{R}$ .

- Si  $x < 0$ , alors  $G_n(x) = 0$  car  $[Y_n \leq x] = \emptyset$ .
- Si  $x \geq 0$ , alors

$$\begin{aligned} G_n(x) &= \mathbb{P}([Y_n \leq x]) \\ &= \mathbb{P}([X \leq x\sqrt{n}]) && \text{(car } \sqrt{n} > 0) \\ &= F_X(x\sqrt{n}) \\ &= 1 - e^{-(x\sqrt{n})^2/2} && \text{(car } x\sqrt{n} \geq 0) \\ &= 1 - e^{-nx^2/2} \end{aligned}$$

Ainsi :  $G_n : x \mapsto \begin{cases} 1 - e^{-nx^2/2} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$ .

□

b) Étudier la convergence en loi de la suite  $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ .

*Démonstration.*

Soit  $x \in \mathbb{R}$ .

- Si  $x < 0$ , alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} G_n(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} 0 = 0$ .
- Si  $x > 0$ , alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} G_n(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} 1 - e^{-nx^2/2} = 1$ .

Soit  $W$  une variable aléatoire qui suit la loi certaine égale à 0. Rappelons sa fonction de répartition :

$$F_W : x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

La fonction de répartition de  $W$  est continue sur  $\mathbb{R}^*$  et discontinue en 0. D'où :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} G_n(x) = F_W(x)$$

en tout point de continuité de  $F_W$ .

Autrement dit :  $Y_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} W$ .

□

c) Montrer que, pour tout réel  $\varepsilon > 0$ , on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(|Y_n| > \varepsilon) = 0$$

*Démonstration.*

Soit  $\varepsilon > 0$ . Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ .

- La variable aléatoire  $Y_n$  admet une espérance comme transformée affine de  $X$  qui en admet une. De plus :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Y_n) &= \mathbb{E}\left(\frac{X}{\sqrt{n}}\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{n}}\mathbb{E}(X) && \text{(par linéarité de l'espérance)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{\pi}{2}} && \text{(d'après la question 1.c)} \\ &= \sqrt{\frac{\pi}{2n}} \end{aligned}$$

- On a :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(|Y_n| > \varepsilon) &= \mathbb{P}(Y_n > \varepsilon) && \text{(car } Y_n \text{ est positive)} \\ &\leq \mathbb{P}(Y_n \geq \varepsilon) && \text{(car } [Y_n > \varepsilon] \subset [Y_n \geq \varepsilon]) \\ &\leq \frac{\mathbb{E}(Y_n)}{\varepsilon} && \text{(inégalité de Markov, car } Y_n \text{ est positive et admet une espérance)} \\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{\varepsilon\sqrt{2n}} \end{aligned}$$

- On a montré que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 \leq \mathbb{P}(|Y_n| > \varepsilon) \leq \frac{\sqrt{\pi}}{\varepsilon\sqrt{2n}}$$

et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{\pi}}{\varepsilon\sqrt{2n}} = 0$  donc, d'après le théorème d'encadrement :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(|Y_n| > \varepsilon) = 0.$$

□

5. On considère une suite  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  de variables aléatoires mutuellement indépendantes, et suivant toutes la même loi que  $X$ . Pour tout entier naturel  $n$  non nul, on pose  $M_n = \min(X_1, \dots, X_n)$ .

- a) Exprimer, pour tout réel  $x$ ,  $\mathbb{P}(M_n > x)$  à l'aide de la fonction  $F_X$ , puis en déduire que  $M_n$  suit la même loi que la variable  $Y_n$  présentée à la question 4.

*Démonstration.*

Soit  $x \in \mathbb{R}$ .

$$\begin{aligned}\mathbb{P}([M_n > x]) &= \mathbb{P}([\min(X_1, \dots, X_n) > x]) \\ &= \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^n [X_k > x]\right) \\ &= \prod_{k=1}^n \mathbb{P}([X_k > x]) && \text{(par indépendance)} \\ &= \prod_{k=1}^n \mathbb{P}([X > x]) && \text{(car les } X_k \text{ suivent la même loi que } X\text{)} \\ &= \prod_{k=1}^n (1 - \mathbb{P}([X \leq x])) \\ &= \prod_{k=1}^n (1 - F_X(x)) \\ &= (1 - F_X(x))^n\end{aligned}$$

Ainsi :  $\forall x \in \mathbb{R}, \mathbb{P}([M_n > x]) = (1 - F_X(x))^n$ .

- Si  $x < 0$ , alors

$$\begin{aligned}F_{M_n}(x) &= 1 - \mathbb{P}([M_n > x]) \\ &= 1 - (1 - F_X(x))^n \\ &= 1 - (1 - 0)^n && \text{(car } x < 0\text{)} \\ &= 0\end{aligned}$$

- Si  $x \geq 0$ , alors

$$\begin{aligned}F_{M_n}(x) &= 1 - (1 - F_X(x))^n \\ &= 1 - (1 - (1 - e^{-x^2/2}))^n && \text{(car } x \geq 0\text{)} \\ &= 1 - (e^{-x^2/2})^n \\ &= 1 - e^{-nx^2/2}\end{aligned}$$

Ainsi :  $F_{M_n} : x \mapsto \begin{cases} 1 - e^{-nx^2/2} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$  et on remarque que  $M_n$  et  $Y_n$  ont la même fonction de répartition. Or, la fonction de répartition caractérise la loi.

On peut conclure que  $M_n$  et  $Y_n$  suivent la même loi.

□

- b)** Compléter la fonction **Python** suivante afin qu'elle renvoie une simulation de  $M_n$  à l'appel de `simulM(n)`.

```
1 def simulM(n):  
2     X=np.array([----- for k in range(n)])  
3     M=-----  
4     return M
```

*Démonstration.*

On propose la fonction **Python** suivante :

```
1 def simulM(n):  
2     X = np.array([simulX() for k in range(n)])  
3     M = np.min(X)  
4     return M
```

□