DS7 (vB) - Concours blanc - Barème (ESSEC I 2023)

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidat·es sont invité·es à ***encadrer*** *dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*
Aucun document n'est autorisé. ***L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique*** *est* ***interdite****. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*
Si au cours de l'épreuve, un candidat ou une candidate repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

On suppose, et c'est valable pour toute l'épreuve, que la librairie suivante est importée sous son alias habituel :

- `import numpy as np`
- `import numpy.linalg as al`
- `import numpy.random as rd`
- `import matplotlib.pyplot as plt`
- `import pandas as pd`

On s'intéresse dans ce sujet à la méthode de Stein, introduite par Charles Stein (1920/2016) en 1972, dont les développements et applications sont nombreux.

Les parties 1 et 2 concernent la justification de la méthode, elles sont indépendantes.

Dans la partie 3, on s'intéresse à l'estimation en un point d'une densité d'une loi de probabilité. Cette partie peut être traitée indépendamment des deux premières parties.

Dans la partie 4, on met en œuvre la méthode de Stein, vue dans les parties 1 et 2, pour établir des convergences « uniformes » en loi et on démontre le résultat admis dans la partie 3. Cette partie est indépendante de la partie 3 à l'exception de sa dernière question.

Dans tout le problème :

- les variables aléatoires considérées sont définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.
- si X est une variable aléatoire, $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$ désignent respectivement, lorsqu'elles existent, l'espérance et la variance de X.
- W désigne l'ensemble des fonctions h de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ \left|h'(x)\right| \leqslant 1$$

- N est une variable aléatoire qui suit la loi normale $(0,1)$.
- on admet que si X est une variable aléatoire possédant une espérance et $h \in W$, $\mathbb{E}(h(X))$ existe. On note en particulier c_h l'espérance de $h(N)$.
- On note Φ la fonction de répartition de la loi normale $(0,1)$ définie par, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\Phi(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}} \ dt$. On rappelle que c'est la primitive sur $\mathbb{R}$, qui vaut $\frac{1}{2}$ en 0, de la fonction $\varphi : t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}$.

Partie 1 - Transformation de Stein

Soit $h \in W$. On définit sur $\mathbb{R}$, la fonction $\theta : x \mapsto \dfrac{\Phi(x)}{\varphi(x)}$ et la fonction f_h par,

$$f_h : x \mapsto \theta(-x) \int_{-\infty}^{x} h'(t)\Phi(t) \ dt + \theta(x) \int_{x}^{+\infty} h'(t)(1-\Phi(t)) \ dt$$

lorsque ces intégrales convergent.

L'objectif principal de cette partie est d'obtenir, pour X une variable aléatoire admettant une espérance, une expression de $\mathbb{E}(h(X)) - \mathbb{E}(h(N))$ qui ne fait pas intervenir N directement.

1. a) Montrer que pour tout $x \geqslant 0$ et $t \in [x, +\infty[$, $0 \leqslant x\varphi(t) \leqslant t\varphi(t)$. En déduire que :

$$\forall x \geqslant 0, \ 0 \leqslant x(1 - \Phi(x)) \leqslant \varphi(x)$$

(on remarquera que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\varphi'(t) = -t\varphi(t)$)

- **1 pt :** $\varphi(t) \geqslant 0$, **φ étant une densité**
- **1 pt : par croissance de l'intégrale, les bornes étant rangées dans l'ordre croissant**
- **1 pt :** $0 \leqslant x \displaystyle\int_{x}^{B} \varphi(t) \ dt \leqslant \varphi(x) - \varphi(B)$
- **1 pt :** $\displaystyle\lim_{B \to +\infty} \int_{x}^{B} \varphi(t) \ dt = 1 - \Phi(x)$

b) Procéder de façon analogue pour montrer que : $\forall x \leqslant 0,\ -\varphi(x) \leqslant x\Phi(x) \leqslant 0$.

- **1 pt :** $t\varphi(t) \leqslant x\varphi(t) \leqslant 0$ **pour** $t \leqslant x$
- **1 pt : par croissance de l'intégrale, les bornes étant rangées dans l'ordre croissant**
- **1 pt :** $\varphi(A) - \varphi(x) \leqslant x \displaystyle\int_A^x \varphi(t)\ dt \leqslant 0$
- **1 pt :** $\displaystyle\lim_{A\to-\infty} \int_A^x \varphi(t)\ dt = \int_{-\infty}^x \varphi(t)\ dt = \Phi(x)$

c) En déduire à l'aide d'une intégration par parties, pour tout x réel, la convergence des intégrales qui suivent et montrer que :

$$\int_{-\infty}^x \Phi(t)\ dt = x\Phi(x) + \varphi(x) \quad \text{et} \quad \int_x^{+\infty} (1-\Phi(t))\ dt = -x(1-\Phi(x)) + \varphi(x) \qquad (R_1)$$

- **1 pt : les fonctions Φ et $1-\Phi$ sont continues sur $\mathbb{R}$ donc $\displaystyle\int_{-\infty}^x \Phi(t)\ dt$ est impropre seulement en $-\infty$ et $\displaystyle\int_x^{+\infty} (1-\Phi(t))\ dt$ est impropre seulement en $+\infty$**
- **1 pt : IPP bien justifiée par la régularité $\mathcal{C}^1$**
- **1 pt :** $\displaystyle\int_A^x \Phi(t)\ dt = x\Phi(x) - A\,\Phi(A) + \varphi(x) - \varphi(A)$
- **1 pt : par théorème d'encadrement,** $\displaystyle\lim_{A\to-\infty} A\,\Phi(A) = 0$
- **1 pt :** $\displaystyle\int_x^B (1-\Phi(t))\ dt = B(1-\Phi(B)) - x(1-\Phi(x)) + \varphi(x) - \varphi(B)$
- **1 pt : par théorème d'encadrement,** $\displaystyle\lim_{B\to+\infty} B(1-\Phi(B)) = 0$

2. a) Montrer que pour tous réels x et y,

$$|h(x) - h(y)| \leqslant |x-y|, \quad \text{puis que } |h(x)| \leqslant |x| + |h(0)|$$

- **1 pt : comme $h \in W$:**
  - × **la fonction h est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$,**
  - × **pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|h'(x)| \leqslant 1$.**
- **1 pt : inégalité des accroissements finis citée**
- **1 pt :** $|h(x) - h(0)| \leqslant |x|$
- **1 pt : inégalité triangulaire pour conclure**

b) Pour tout x réel, justifier la convergence de $\displaystyle\int_{-\infty}^x h'(t)\Phi(t)\ dt$ et montrer que :

$$\int_{-\infty}^x h'(t)\Phi(t)\ dt = h(x)\Phi(x) - \int_{-\infty}^x h(t)\varphi(t)\ dt$$

On admet de même que, $\displaystyle\int_x^{+\infty} h'(t)(1-\Phi(t))\ dt$ *converge et que,*

$$\int_x^{+\infty} h'(t)(1-\Phi(t))\ dt = -h(x)(1-\Phi(x)) + \int_x^{+\infty} h(t)\varphi(t)\ dt$$

- **1 pt : $h \in W$ donc la fonction $t \mapsto h'(t)\Phi(t)$ est continue sur $\mathbb{R}$. On en déduit que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^x h'(t)\Phi(t)\ dt$ est seulement impropre en $-\infty$**

- **1 pt :** $|h'(t)\Phi(t)| = |h'(t)|\,\Phi(t) \leqslant \Phi(t)$
- **1 pt : par théorème de comparaison pour les intégrales généralisées de fonctions continues et positives,** $\displaystyle\int_{-\infty}^{x} h'(t)\Phi(t)\ dt$ **est (absolument) convergente**
- **1 pt :** $\displaystyle\int_{A}^{x} h'(t)\Phi(t)\ dt = h(x)\Phi(x) - h(A)\Phi(A) - \int_{A}^{x} h(t)\varphi(t)\ dt$
- **4 pt :** $\displaystyle\lim_{A\to-\infty} h(A)\Phi(A) = 0$
  × **1 pt :** $|h(A)\Phi(A)| \leqslant -A\Phi(A) + |h(0)|\,\Phi(A)$
  × **1 pt : Φ est une fonction de répartition donc :** $\displaystyle\lim_{A\to-\infty} \Phi(A) = 0$
  × **1 pt : d'après la question *1.b)*,** $\displaystyle\lim_{A\to-\infty} A\Phi(A) = 0$
  × **1 pt : thm d'encadrement cité**
- **1 pt :** $\displaystyle\int_{A}^{x} h(t)\varphi(t)\ dt = h(x)\Phi(x) - h(A)\Phi(A) - \int_{A}^{x} h'(t)\Phi(t)\ dt$ **pour justifier la convergence de** $\displaystyle\int_{-\infty}^{x} h(t)\varphi(t)\ dt$

c) En déduire que, pour tout x réel :

$$-\int_{-\infty}^{x} h'(t)\Phi(t)\ dt + \int_{x}^{+\infty} h'(t)(1-\Phi(t))\ dt = c_h - h(x)$$

- **1 pt :** $\displaystyle -\int_{-\infty}^{x} h'(t)\Phi(t)\ dt + \int_{x}^{+\infty} h'(t)(1-\Phi(t))\ dt = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t)\varphi(t)\ dt - h(x)$
- **1 pt : relation de Chasles citée**
- **1 pt : par thm de transfert** $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} h(t)\varphi(t)\ dt = \mathbb{E}(h(N)) = c_h$
- **1 pt : $h(N)$ admet une espérance pour justifier l'utilisation du thm de transfert**

3. a) Établir que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\theta'(x) = 1 + x\theta(x)$$
$$\theta''(x) = x + (1+x^2)\theta(x)$$
$$\theta(-x)\Phi(x) = \theta(x)(1-\Phi(x))$$

- **1 pt : θ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ comme quotient de deux fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ dont le dénominateur ne s'annule pas**
- **1 pt :** $\theta'(x) = 1 + x\theta(x)$
- **1 pt :** $\theta''(x) = x + (1+x^2)\theta(x)$
- **1 pt :** $\theta(-x)\Phi(x) = \theta(x)(1-\Phi(x))$
- **1 pt : qualité des explications**

b) En déduire que f_h est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ qui vérifie, pour tout x réel :

$$f_h'(x) - xf_h(x) = c_h - h(x)$$

Pourquoi peut-on alors affirmer que f_h est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$?

- **1 pt : par somme et produit de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, f_h est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ (en décomposant en des intégrales sur un segment pour la partie qui dépend de x)**
- **2 pt : $f_h'(x) - x f_h(x) = c_h - h(x)$**
- **1 pt : f_h est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$**

c) En conclure que, si X est une variable aléatoire admettant une espérance,

$$|\mathbb{E}(h(X)) - \mathbb{E}(h(N))| = \left|\mathbb{E}(f_h'(X) - X f_h(X))\right|$$

- **1 pt : puisque $h \in W$ et puisque X et N admettent chacune une espérance, il vient (d'après le résultat admis en début d'énoncé) que $\mathbb{E}(h(X))$ et $\mathbb{E}(h(N))$ existent**
- **1 pt : $\mathbb{E}(f_h'(X) - X f_h(X))$ existe par transformation affine**
- **1 pt : $|\mathbb{E}(h(X)) - \mathbb{E}(h(N))| = |\mathbb{E}(f_h'(X) - X f_h(X))|$**
- **1 pt : linéarité de l'espérance citée (si tout le reste est juste)**

4. *Majoration de $|f_h|$.*

a) Montrer, en utilisant les égalités (R_1), que pour tout x réel :

$$\theta(-x) \int_{-\infty}^{x} \Phi(t)\ dt + \theta(x) \int_{x}^{+\infty} (1 - \Phi(t))\ dt = 1$$

- **1 pt : $\theta(-x) \displaystyle\int_{-\infty}^{x} \Phi(t)\ dt + \theta(x) \int_{x}^{+\infty} (1 - \Phi(t))\ dt = (\theta(-x) + \theta(x))\varphi(x)$**
- **1 pt : $\theta(-x) + \theta(x) = \frac{1}{\varphi(x)}$**
- **1 pt : explications**

b) En déduire que pour tout x réel : $|f_h(x)| \leqslant 1$.

- **3 pt : $|f_h(x)| \leqslant \theta(-x) \displaystyle\int_{-\infty}^{x} \left|h'(t)\right| \Phi(t)\ dt + \theta(x) \int_{x}^{+\infty} \left|h'(t)\right| (1 - \Phi(t))\ dt$**
  - × **1 pt : calcul**
  - × **1 pt : inégalité triangulaire citée**
  - × **1 pt : justification pour enlever certaines valeurs absolues**
- **1 pt : $|h'(t)|\,\Phi(t) \leqslant \Phi(t)$ et $|h'(t)|\,(1 - \Phi(t)) \leqslant 1 - \Phi(t)$**
- **1 pt : par croissance de l'intégrale, les bornes étant rangées dans l'ordre croissant :**

$$\int_{-\infty}^{x} \left|h'(t)\right| \Phi(t)\ dt \leqslant \int_{-\infty}^{x} \Phi(t)\ dt \qquad \text{et} \qquad \int_{x}^{+\infty} \left|h'(t)\right| (1-\Phi(t))\ dt \leqslant \int_{x}^{+\infty} (1-\Phi(t))\ dt$$

5. *Majoration de $|f_h''|$.*

a) Montrer que pour tout x réel :

$$\theta''(-x) \int_{-\infty}^{x} \Phi(t)\ dt + \theta''(x) \int_{x}^{+\infty} (1 - \Phi(t))\ dt = 1$$

- **3 pt : $\theta''(-x) \displaystyle\int_{-\infty}^{x} \Phi(t)\ dt + \theta''(x) \int_{x}^{+\infty} (1 - \Phi(t))\ dt = 1$**

b) Établir pour tout x réel l'égalité :

$$f_h''(x) = -h'(x) + \theta''(-x) \int_{-\infty}^{x} h'(t)\Phi(t)\ dt + \theta''(x) \int_{x}^{+\infty} h'(t)(1 - \Phi(t))\ dt$$

- **2 pt :** $f_h''(x) = -h'(x) + (1+x^2)f_h(x) + x(c_h - h(x))$
- **1 pt :** $\theta''(-x)\displaystyle\int_{-\infty}^{x} h'(t)\Phi(t)\ dt + \theta''(x)\int_{x}^{+\infty} h'(t)(1-\Phi(t))\ dt = x(c_h - h(x)) + (1+x^2)f_h(x)$
- **1 pt :** $f_h''(x) = -h'(x) + \theta''(-x)\displaystyle\int_{-\infty}^{x} h'(t)\Phi(t)\ dt + \theta''(x)\int_{x}^{+\infty} h'(t)(1-\Phi(t))\ dt$

c) Étudier les variations sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x \mapsto \Phi(x) + \dfrac{x}{1+x^2}\varphi(x)$. En déduire son signe et le signe de θ''.
En conclure que, pour tout x réel : $|f_h''(x)| \leqslant 2$.

- **1 pt : On note $g : x \mapsto \Phi(x) + \dfrac{x}{1+x^2}\varphi(x)$. La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme et produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$**
- **2 pt :** $g'(x) = \frac{2\varphi(x)}{(1+x^2)^2}$
- **1 pt : g est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ car** $\varphi(x) > 0$
- **1 pt :** $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = 0 + 0 \times 0 = 0$
- **1 pt : pour tout $x \in \mathbb{R}$,** $g(x) > 0$
- **1 pt :** $\theta''(x) = \frac{1+x^2}{\varphi(x)} g(x)$ **donc** $\theta''(x) > 0$
- **3 pt :** $\forall x \in \mathbb{R},\ |f_h''(x)| \leqslant 2$
  - × **1 pt : calcul**
  - × **1 pt : inégalité triangulaire citée**
  - × **1 pt : $h \in W$ et croissance de l'intégrale avec les bornes dans l'ordre croissant**

Partie 2 - Majoration uniforme de la distance de Kolmogorov

Dans la suite du problème, si X est une variable aléatoire de fonction de répartition F_X, on définit, pour tout x réel, $d_X(x)$ la distance de Kolmogorov au point x entre la loi de X et la loi normale centrée réduite par :

$$d_X(x) = |F_X(x) - \Phi(x)|$$

On définit, pour tout x réel, la fonction h_x sur $\mathbb{R}$ par $h_x(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \leqslant x \\ 0 & \text{si } t > x \end{cases}$.

On définit aussi la fonction γ sur $\mathbb{R}$ par :

$$\gamma(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t < 0 \\ 0 & \text{si } t > 1 \\ 1 - 3t^2 + 2t^3 & \text{si } t \in [0,1] \end{cases}$$

Soit X une variable aléatoire.

6. Pour tout x réel, quelle est la loi de la variable aléatoire $h_x(X)$? En déduire que $\mathbb{E}(h_x(X))$ existe et vaut $F_X(x)$.

- **1 pt :** $h_x(X)(\Omega) \subset \{0,1\}$ **donc $h_x(X)$ suit une loi de Bernoulli**
- **1 pt :** $[h_x(X) = 1] = [X \leqslant x]$
- **1 pt :** $h_x(X) \hookrightarrow \mathcal{B}(F_X(x))$**, donc $h_x(X)$ admet une espérance et** $\mathbb{E}(h_x(X)) = F_X(x)$

7. *a)* Écrire une fonction **Python** `gamma(t)` qui calcule et renvoie la valeur de $\gamma(t)$, t étant donné.

```python
def gamma(t):
    if t < 0:
        return 1
    elif t > 1:
        return 0
    else:
        return 1 - 3 * t**2 + 2 * t**3
```

- **3 pt : 1 pt par cas**

b) Utiliser la fonction précédente pour écrire un script qui affiche le graphe de γ sur le segment $[-1, 2]$ dans un repère.

- **1 pt :** `abscisse = np.linspace(-1,2,100)`
- **1 pt :** `ordonnees = [gamma(t) for t in abscisse]`
- **1 pt :** `plt.plot(abscisse, ordonnees)`

8. a) Montrer que γ est continue sur $\mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ privé de 0 et 1.

- **1 pt : γ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ privé de 0 et 1**
- **1 pt : γ est continue en 0**
- **1 pt : γ est continue en 1**

b) Étudier les variations de γ sur $[0, 1]$ et montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\gamma(t) \in [0, 1]$.

- **1 pt : γ est strictement décroissante sur $]0, 1[$**
- **1 pt : γ est continue sur $[0, 1]$, donc γ est strictement décroissante sur $[0, 1]$**
- **1 pt :**

t	0		1
Signe de $\gamma'(t)$	$\|$	$-$	$\|$
Variations de γ	1	$\searrow$	0

- **1 pt : pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\gamma(t) \in [0, 1]$**

c) Établir que γ est dérivable en 1 et que $\gamma'(1) = 0$.
On montrerait de même que γ est dérivable en 0 et que $\gamma'(0) = 0$. On l'admet.

- **1 pt :** $\displaystyle\lim_{t \to 1^+} \frac{\gamma(t) - \gamma(1)}{t - 1} = 0$
- **1 pt :** $\displaystyle\lim_{t \to 1^-} \frac{\gamma(t) - \gamma(1)}{t - 1} = 0$

d) Justifier que γ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et que pour tout t réel $|\gamma'(t)| \leqslant \dfrac{3}{2}$.

- **1 pt : γ' est continue en 0**
- **1 pt : γ' est continue en 1**
- **2 pt : pour tout t réel $|\gamma'(t)| \leqslant \dfrac{3}{2}$ (1 pt pour le cas $0 < t < 1$)**

On suppose dans la suite de cette partie que X admet une espérance et on considère un réel M_X qui vérifie, pour tout $h \in W$, $|\mathbb{E}(h(X)) - \mathbb{E}(h(N))| \leqslant M_X$.

9. Soit $t > 0$ et x un réel. Pour tout $y \in \mathbb{R}$, on pose $k_x(y) = \gamma\left(\dfrac{y-x}{t}\right)$.

a) Montrer que pour tout y réel, $h_x(y) \leqslant k_x(y)$.

- **1 pt : cas** $y \leqslant x$
- **2 pt : cas** $y > x$

b) *On admet l'existence de* $\mathbb{E}(k_x(X))$ *et de* $\mathbb{E}(k_x(N))$. Justifier l'inégalité suivante :

$$\mathbb{E}(h_x(X)) - \mathbb{E}(h_x(N)) \leqslant \mathbb{E}(k_x(X)) - \mathbb{E}(k_x(N)) + \mathbb{E}(k_x(N)) - \mathbb{E}(h_x(N))$$

- **1 pt :** $h_x(X) \leqslant k_x(X)$
- **1 pt : par croissance de l'espérance** $\mathbb{E}(h_x(X)) \leqslant \mathbb{E}(k_x(X))$

c) Montrer que $\mathbb{E}(k_x(N)) - \mathbb{E}(h_x(N)) = \displaystyle\int_x^{x+t} k_x(u)\varphi(u)du$.

- **1 pt :** k_x **est continue sur** $\mathbb{R}$ **comme composée de** γ **et d'une fonction affine toutes les deux continues sur** $\mathbb{R}$
- **1 pt : par théorème de transfert, l'intégrale** $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} k_x(u)\varphi(u)du$ **est absolument convergente et vérifie :**

$$\mathbb{E}(k_x(N)) = \int_{-\infty}^{+\infty} k_x(u)\varphi(u)du$$

- **1 pt :** $k_x(u) = 0 \iff u \geqslant x + t$ **donc** $\mathbb{E}(k_x(N)) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x+t} k_x(u)\varphi(u)du$
- **1 pt :** $\mathbb{E}(h_x(N)) = F_N(x) = \Phi(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} \varphi(u)du$
- **2 pt :** $k_x(u) = 1 \iff u \leqslant x$ **donc** $\mathbb{E}(h_x(N)) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} 1 \times \varphi(u)du = \int_{-\infty}^{x} k_x(u)\varphi(u)du$

d) Établir que la fonction g, définie sur $\mathbb{R}$ par $g : u \mapsto \dfrac{2t}{3}k_x(u)$, appartient à W. En déduire que :

$$\mathbb{E}(h_x(X)) - \mathbb{E}(h_x(N)) \leqslant \frac{3}{2t}M_X + \frac{t}{\sqrt{2\pi}} \leqslant \frac{3}{2t}M_X + \frac{t}{2}$$

- **1 pt :** g **est de classe** $\mathcal{C}^1$ **sur** $\mathbb{R}$ **comme transformée affine de** k_x
- **1 pt :** $|g'(u)| = \left|\dfrac{2t}{3}k_x'(u)\right| = \left|\dfrac{2t}{3}\dfrac{1}{t}\gamma'\left(\dfrac{u-x}{t}\right)\right| = \dfrac{2}{3}\left|\gamma'\left(\dfrac{u-x}{t}\right)\right| \leqslant \dfrac{2}{3} \times \dfrac{3}{2} = 1$
- **2 pt :** $\left|\mathbb{E}\left(k_x(X)\right) - \mathbb{E}\left(k_x(N)\right)\right| \leqslant \dfrac{3}{2t}M_X$
- **1 pt :** $\mathbb{E}(h_x(X)) - \mathbb{E}(h_x(N)) \leqslant \dfrac{3}{2t}M_X + \displaystyle\int_x^{x+t} k_x(u)\varphi(u)du$
- **2 pt :** $\displaystyle\int_x^{x+t} k_x(u)\varphi(u)du \leqslant \frac{t}{\sqrt{2\pi}}$
- **1 pt :** $\pi \geqslant 3$ **donc** $2\pi \geqslant 6 \geqslant 4$ **donc** $\sqrt{2\pi} \geqslant \sqrt{4} = 2$ **donc** $\dfrac{t}{\sqrt{2\pi}} \leqslant \dfrac{t}{2}$

On admet de même, qu'en utilisant la fonction k_{x-t}, *on a :*

$$\mathbb{E}(h_x(N)) - \mathbb{E}(h_x(X)) \leqslant \frac{3}{2t}M_X + \frac{t}{2}$$

10. En étudiant la fonction $t \mapsto \dfrac{3}{2t}M_X + \dfrac{t}{2}$ sur $]0, +\infty[$, en déduire que, pour tout x réel,

$$|\mathbb{E}(h_x(X)) - \mathbb{E}(h_x(N))| \leqslant \sqrt{3M_X}, \text{ puis que } d_X(x) \leqslant \sqrt{3M_X} \qquad (R_2)$$

- **1 pt :** $\psi'(t) = \frac{t^2-3M_X}{2t^2} = \frac{(t-\sqrt{3M_X})(t+\sqrt{3M_X})}{2t^2}$
- **1 pt :**

t	0		$\sqrt{3M_X}$		$+\infty$
Signe de $\psi'(t)$	||	$-$	0	$+$	
Variations de ψ	|| $+\infty$	$\searrow$	$\sqrt{3M_X}$	$\nearrow$	$+\infty$

- **1 pt : pour tout** $t > 0$**,** $|\mathbb{E}(h_x(X)) - \mathbb{E}(h_x(N))| \leqslant \psi(t)$
- **1 pt : choix de** $t = \sqrt{3M_X}$
- **1 pt :** $d_X(x) = |F_X(x) - \Phi(x)| = |\mathbb{E}(h_x(X)) - \mathbb{E}(h_x(N))| \leqslant \sqrt{3M_X}$

Partie 3 - Estimation d'une densité

On considère X une variable aléatoire à densité de fonction de répartition F et de densité de probabilité f qui dépendent d'un paramètre inconnu θ, où $\theta \in \Theta$, Θ un intervalle de $\mathbb{R}$.

Soit a un point de continuité de f, fixé. On souhaite estimer $f(a)$.

Par exemple, si X suit la loi exponentielle de paramètre θ et $a > 0$, on souhaite estimer $\theta e^{-\theta a}$.

On dispose pour tout $\theta \in \Theta$, d'une suite de variables aléatoires $(X_i)_{i \geqslant 1}$ indépendantes de même loi que X.

On choisit une suite $(h_n)_{n \geqslant 1}$ de réels strictement positifs tels que :

$$\lim_{n \to +\infty} h_n = 0 \text{ et } \lim_{n \to +\infty} nh_n = +\infty$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et $\omega \in \Omega$, on définit :

$$C_n(\omega) \text{ comme le nombre d'indices } i \in [\![1, n]\!] \text{ tels que } X_i(\omega) \in \,]a - h_n, a + h_n]$$

et $f_n(\omega) = \dfrac{1}{2nh_n}C_n(\omega)$.

11. On suppose que l'on dispose d'un fichier `stats.csv` qui comporte une colonne nommée `salaire`. On considère que les valeurs de cette colonne constituent la réalisation d'un échantillon de la loi de X dont la taille dépasse 10000.

a) Après avoir exécuté `import pandas as pd`, quelle(s) instruction(s) permet(tent) de lire dans le fichier `stats.csv` les valeurs de la colonne `salaire` et d'affecter cette série `pandas` obtenue à une variable `échantillon` ?

On supposera que le fichier `stats.csv` se trouve dans le répertoire de travail.

- **1 pt :** `donnees = pd.read_csv('stats.csv')`
- **1 pt :** `échantillon = donnees['salaire']`

b) On souhaite calculer et afficher $f_n(\omega)$ pour a donné, lorsque la réalisation d'un échantillon $(X_1(\omega), \dots, X_n(\omega))$ de la loi de X est représentée en **Python** par `échantillon` et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $h_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$.

Compléter le script suivant pour qu'il réalise cette tâche.

```
a = float(input('a='))
n = échantillon.count()
h = 1 / np.sqrt(n)
C = 0
for i in range(n):
    if ... and ...:
        ... += 1
print(C / ...)
```

- **1 pt :** `if échantillon[i] > a - h and échantillon[i] <= a + h:`
- **1 pt :** `C += 1`
- **1 pt :** `print(C / (2 * n * h))`

12. Montrer que C_n suit une loi binomiale de paramètres (n, p_n) en précisant l'expression de p_n en fonction de a et h_n.

En déduire que $\mathbb{E}(f_n)$ existe et vaut : $\dfrac{F(a+h_n) - F(a-h_n)}{2h_n}$.

- **2 pt : explications pertinentes pour obtenir que C_n suit une loi binomiale de paramètres (n, p_n) (1 pt pour l'indépendance)**
- **1 pt :** $p_n = F(a+h_n) - F(a-h_n)$
- **1 pt :** f_n **admet une espérance en tant que transformée affine de** C_n
- **1 pt :** $\mathbb{E}(f_n) = \dfrac{F(a+h_n) - F(a-h_n)}{2h_n}$ **par linéarité**

13. a) En utilisant la dérivabilité de F en a, montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{E}(f_n) = f(a)$.

- **1 pt :** f **est continue en** a **donc** F **est dérivable en** a
- **1 pt :** F **admet un développement limité à l'ordre** 1 **au point** a **qui s'écrit :**

$$F(a+h) = F(a) + hF'(a) + \underset{h\to 0}{o}(h) = F(a) + hf(a) + \underset{h\to 0}{o}(h)$$

- **1 pt :** $F(a+h_n) - F(a-h_n) = 2h_n f(a) + \underset{n\to+\infty}{o}(h_n)$
- **1 pt :** $\mathbb{E}(f_n) = f(a) + \underset{n\to+\infty}{o}(1)$

b) Montrer que $\mathbb{V}(f_n)$ existe et que $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{V}(f_n) = 0$.

- **1 pt :** f_n **admet une variance en tant que transformée affine de** C_n
- **1 pt :** $\mathbb{V}(f_n) = \dfrac{1-p_n}{2nh_n}\, \mathbb{E}(f_n)$
- **1 pt :** $\mathbb{V}(f_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \times f(a) = 0$

On suppose désormais, que $f(a) > 0$, que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $p_n \in]0,1[$, que F est de classe $\mathcal{C}^2$ au voisinage de a et que $\lim\limits_{n\to+\infty} nh_n^3 = 0$.

On note pour tout $n \geqslant 1$, $\sigma_n = \sqrt{np_n(1-p_n)}$ et $\theta_n = \sqrt{2h_n f(a)}$.

On définit les variables aléatoires : $D_n = \dfrac{C_n - np_n}{\sigma_n}$ et $\hat{f}_n = \dfrac{\theta_n\sqrt{n}}{f(a)}(f_n - f(a))$.

14. ***a)*** En utilisant le développement limité de F à l'ordre 2 au point a, montrer que :

$$p_n \underset{n\to+\infty}{=} 2h_n f(a) + o(h_n^2) \underset{n\to+\infty}{=} \theta_n^2 + o(h_n^2)$$

- **1 pt : F est de classe $\mathcal{C}^2$ au voisinage de a donc admet un développement limité d'ordre 2 au point a qui s'écrit :**

$$\begin{aligned} F(a+h) &= F(a) + hF'(a) + \frac{1}{2}h^2F''(a) + \underset{h\to 0}{o}(h^2) \\ &= F(a) + hf(a) + \frac{1}{2}h^2F''(a) + \underset{h\to 0}{o}(h^2) \end{aligned}$$

- **1 pt :** $F(a+h_n) - F(a-h_n) = 2h_n f(a) + \underset{n\to+\infty}{o}(h_n^2)$

b) En déduire que : $p_n \underset{n\to+\infty}{\sim} 2h_n f(a)$, puis que $\lim\limits_{n\to+\infty} np_n = +\infty$.

- **1 pt :** $\dfrac{p_n}{2h_n f(a)} = \dfrac{2h_n f(a) + \underset{n\to+\infty}{o}(h_n^2)}{2h_n f(a)} = 1 + \underset{n\to+\infty}{o}(h_n)$ **et** $h_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$
- **1 pt :** $2f(a) > 0$ **et** $nh_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ **donc, par produit,** $2nh_n f(a) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$

c) Montrer que $\hat{f}_n = \dfrac{\sigma_n}{\theta_n\sqrt{n}} D_n + \sqrt{n}\left(\dfrac{p_n}{\theta_n} - \theta_n\right)$ et que l'on a :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sigma_n}{\theta_n\sqrt{n}} = 1 \quad ; \quad \lim_{n\to+\infty} \sqrt{n}\left(\frac{p_n}{\theta_n} - \theta_n\right) = 0$$

- **1 pt :** $\hat{f}_n = \frac{1}{\theta_n\sqrt{n}} C_n - \theta_n\sqrt{n}$
- **1 pt :** $\dfrac{\sigma_n}{\theta_n\sqrt{n}} D_n + \sqrt{n}\left(\dfrac{p_n}{\theta_n} - \theta_n\right) = \frac{1}{\theta_n\sqrt{n}} C_n - \theta_n\sqrt{n}$
- **1 pt :** $\dfrac{\sigma_n}{\theta_n\sqrt{n}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{1-p_n}$
- **1 pt :** $\sqrt{n}\left(\dfrac{p_n}{\theta_n} - \theta_n\right) = \underset{n\to+\infty}{o}\left(\sqrt{nh_n^3}\right)$

On admet, dans la suite de cette partie, que $(\hat{f}_n)_{n\geqslant 1}$ converge en loi vers N ce qui implique que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, avec $x \leqslant y$, on a :

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(x \leqslant \hat{f}_n \leqslant y) = \Phi(y) - \Phi(x)$$

15. Soit $\alpha \in]0,1[$. On pose $\eta_\alpha = t_\alpha^2$ où t_α est le quantile d'ordre $1 - \frac{\alpha}{2}$ de la loi normale $(0,1)$.

a) Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left((f(a))^2 - \left(2f_n + \dfrac{\eta_\alpha}{2nh_n}\right) f(a) + f_n^2 \leqslant 0\right) = 1 - \alpha$.

- **3 pt :** $\left[(f(a))^2 - \left(2f_n + \dfrac{\eta_\alpha}{2nh_n}\right) f(a) + f_n^2 \leqslant 0\right] = \left[-t_\alpha \leqslant \hat{f}_n \leqslant t_\alpha\right]$ **(1 pt pour les justifications sur les signes)**
- **1 pt : par convergence en loi de $(\hat{f}_n)_{n\geqslant 1}$ vers N, on a :**

$$\mathbb{P}\left(\left[-t_\alpha \leqslant \hat{f}_n \leqslant t_\alpha\right]\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \Phi(t_\alpha) - \Phi(-t_\alpha) = 2\Phi(t_\alpha) - 1 = 1 - \alpha$$

b) On note, pour $n \geqslant 1$, $\Delta_n = \sqrt{\left(f_n + \dfrac{\eta_\alpha}{4nh_n}\right)^2 - f_n^2}$.

Montrer que :

$$\lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}\left(f(a) \in \left[f_n + \frac{\eta_\alpha}{4nh_n} - \Delta_n, f_n + \frac{\eta_\alpha}{4nh_n} + \Delta_n\right]\right) = 1 - \alpha$$

- **3 pt :** $\left[(f(a))^2 - \left(2f_n + \dfrac{\eta_\alpha}{2nh_n}\right) f(a) + f_n^2 \leqslant 0\right] = \left[f(a) \in \left[f_n + \frac{\eta_\alpha}{4nh_n} - \Delta_n, f_n + \frac{\eta_\alpha}{4nh_n} + \Delta_n\right]\right]$

Partie 4 - Convergence « uniforme » en loi vers la loi normale

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère n variables aléatoires $X_1, \ldots, X_n$ indépendantes centrées qui possèdent un moment d'ordre 3. On admet alors que ces variables aléatoires possèdent une variance.

On pose, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $\mathbb{E}(X_k^2) = v_k$, $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} X_k$, $Y_k = S_n - X_k$ et on suppose que $\sum\limits_{k=1}^{n} v_k = 1$.

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ telle que pour tout x réel, $|f(x)| \leqslant 1$ et $|f''(x)| \leqslant 2$.

On admet que si X et Y sont des variables aléatoires possédant une espérance alors $\mathbb{E}(Yf(X))$ et $\mathbb{E}(f'(X))$ existent.

16. a) Montrer que $\sum\limits_{k=1}^{n} v_k \mathbb{E}(f'(S_n) - f'(Y_k)) + \sum\limits_{k=1}^{n} \mathbb{E}(X_k^2 f'(Y_k)) = \mathbb{E}(f'(S_n))$.

- **3 pt : toutes les variables aléatoires admettent une espérance (1 pt pour le lemme des coalitions, 1 pt pour l'indépendance citée pour l'espérance du produit)**
- **2 pt :** $\sum\limits_{k=1}^{n} v_k \mathbb{E}(f'(S_n) - f'(Y_k)) + \sum\limits_{k=1}^{n} \mathbb{E}(X_k^2 f'(Y_k)) = \mathbb{E}(f'(S_n))$

b) Montrer que $\sum\limits_{k=1}^{n} \mathbb{E}(X_k [f(S_n) - f(Y_k)]) = \sum\limits_{k=1}^{n} \mathbb{E}(X_k f(S_n)) = \mathbb{E}(S_n f(S_n))$.

- **3 pt : toutes les variables aléatoires admettent une espérance (1 pt pour le lemme des coalitions, 1 pt pour l'indépendance citée pour l'espérance du produit)**
- **2 pt :** $\sum\limits_{k=1}^{n} \mathbb{E}(X_k [f(S_n) - f(Y_k)]) = \sum\limits_{k=1}^{n} \mathbb{E}(X_k f(S_n)) = \mathbb{E}(S_n f(S_n))$

c) En déduire que :

$$\mathbb{E}(f'(S_n) - S_n f(S_n)) = \sum_{k=1}^{n} v_k \mathbb{E}(f'(S_n) - f'(Y_k)) + \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}\left(X_k \left[X_k f'(Y_k) - (f(S_n) - f(Y_k))\right]\right)$$

- **1 pt : toutes les variables aléatoires admettent une espérance**
- **2 pt :** $\mathbb{E}(f'(S_n) - S_n f(S_n)) = \sum\limits_{k=1}^{n} v_k \mathbb{E}(f'(S_n) - f'(Y_k)) + \sum\limits_{k=1}^{n} \mathbb{E}(X_k [X_k f'(Y_k) - (f(S_n) - f(Y_k))])$

17. Soit a et b deux réels.

a) Montrer que :

$$bf'(a) - (f(a+b) - f(a)) = \int_0^1 b(f'(a) - f'(a+tb))\, dt$$

- **1 pt : l'intégrale** $\displaystyle\int_0^1 b(f'(a) - f'(a+tb))\, dt$ **est bien définie**
- **2 pt :** $bf'(a) - (f(a+b) - f(a)) = \displaystyle\int_0^1 b(f'(a) - f'(a+tb))\, dt$

b) En déduire que :

$$\left|bf'(a) - (f(a+b) - f(a))\right| \leqslant b^2$$

- **1 pt : inégalité triangulaire**
- **1 pt : IAF**
- **1 pt : par croissance de l'intégrale, les bornes étant rangées dans l'ordre croissant**

c) En conclure que :

$$\left|\mathbb{E}(f'(S_n) - S_n f(S_n))\right| \leqslant 2\sum_{k=1}^{n} v_k \mathbb{E}(|X_k|) + \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}(|X_k|^3)$$

puis, grâce à l'inégalité (R_2), que, pour tout x réel :

$$d_{S_n}(x) \leqslant \sqrt{3\left(2\sum_{k=1}^{n} v_k \mathbb{E}(|X_k|) + \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}(|X_k|^3)\right)} \qquad (R_3)$$

- **1 pt :** $|\mathbb{E}(f'(S_n) - S_n f(S_n))| \leqslant \sum_{k=1}^{n} v_k\, |\mathbb{E}(f'(S_n) - f'(Y_k))| + \sum_{k=1}^{n} |\mathbb{E}\left(X_k\left[X_k f'(Y_k) - (f(S_n) - f(Y_k))\right]\right)|$
- **3 pt :** $|\mathbb{E}(f'(S_n) - f'(Y_k))| \leqslant 2\mathbb{E}(|X_k|)$ **(2 pt pour les explications)**
- **3 pt :** $|\mathbb{E}\left(X_k\ \left[X_k f'(Y_k) - (f(S_n) - f(Y_k))\right]\right)| \leqslant \mathbb{E}\left(|X_k|^3\right)$ **(1 pt pour les explications)**
- **1 pt : poser** $M_X = 2\sum_{k=1}^{n} v_k \mathbb{E}(|X_k|) + \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}(|X_k|^3)$
- **1 pt : vérification que l'on peut appliquer la majoration** $|\mathbb{E}(f'(S_n) - S_n f(S_n))| \leqslant M_X$ **avec** $f = f_h$ **pour tout** $h \in W$
- **1 pt : vérification que l'on peut appliquer la question *10***

Une définition - *Dans la suite du sujet, si* $(X_n)_{n\geqslant 1}$ *est une suite de variables aléatoires réelles et* $(\delta_n)_{n\geqslant 1}$ *une suite réelle de limite nulle qui vérifient,*

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}, d_{X_n}(x) \leqslant \delta_n$$

on dira alors que $(X_n)_{n\geqslant 1}$ *converge uniformément en loi vers* N*.*
On remarque, et on l'admet pour la suite, que si $(X_n)_{n\geqslant 1}$ *converge uniformément en loi vers* N *alors* $(X_n)_{n\geqslant 1}$ *converge en loi vers* N*.*

18. *Une première application.* On suppose dans cette question que $(Z_k)_{k\geqslant 1}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes, suivant la même loi et admettant des moments d'ordre 1 à 3.

On note pour $i \in [\![1, 3]\!]$, $s_i = \mathbb{E}(|Z_k - \mathbb{E}(Z_k)|^i)$, $\sigma = \sqrt{s_2}$ et , $X_k = \dfrac{Z_k - \mathbb{E}(Z_k)}{\sigma\sqrt{n}}$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

On suppose que $\sigma \neq 0$.

On utilise les notations de la question précédente.

a) Montrer que l'on peut appliquer l'inégalité (R_3) qui donne ici :

$$d_{S_n}(x) \leqslant \sqrt{3\frac{2\sigma^2 s_1 + s_3}{\sigma^3\sqrt{n}}}$$

- **1 pt : indépendance des** X_k
- **1 pt : existence des moments d'ordre** 1 **à** 3 **des** X_k
- **1 pt : les** X_k **sont centrées**
- **1 pt :** $\sum_{k=1}^{n} v_k = 1$

- **3 pt :** $M_X = \dfrac{2\sigma^2 s_1 + s_3}{\sigma^3\sqrt{n}}$

b) En déduire que $(S_n)_{n\geqslant 1}$ converge uniformément en loi vers N, donc converge en loi vers N. Quel résultat du cours nous aurait permis d'obtenir cette dernière convergence directement ?

- **1 pt :** $\delta_n = \sqrt{3\frac{2\sigma^2 s_1+s_3}{\sigma^3\sqrt{n}}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$
- **1 pt : citer le TCL**
- **1 pt : vérifier que l'on peut appliquer le TCL**
- **2 pt :** $S_n = W_n^*$ **où** $W_n = \sum\limits_{k=1}^{n} Z_k$

19. *Une deuxième application.* On suppose dans cette question que $Z_1, \dots, Z_n$ sont des variables aléatoires indépendantes suivant la même loi de Bernoulli de paramètre $p_n \in]0,1[$.

On pose $\sigma_n = \sqrt{np_n(1-p_n)}$ et $X_k = \dfrac{Z_k - p_n}{\sigma_n}$ pour tout $k \in [\![1,n]\!]$.

a) Montrer que $\mathbb{E}(|X_k|) = \dfrac{2\sigma_n}{n}$ et $\mathbb{E}(|X_k|^3) \leqslant \dfrac{2}{n\sigma_n}$.

- **1 pt : loi de** $|X_k|$ **et de** $|X_k|^3$
- **1 pt :** $\mathbb{E}(|X_k|) = \dfrac{2\sigma_n}{n}$
- **2 pt :** $\mathbb{E}(|X_k|^3) \leqslant \dfrac{2}{n\sigma_n}$

b) En déduire que, pour tout x réel :

$$d_{S_n}(x) \leqslant 2\sqrt{3\left(\frac{\sigma_n}{n} + \frac{1}{2\sigma_n}\right)}$$

- **1 pt : on démontre comme à la question *18.a)* que l'on peut appliquer** (R_3)
- **2 pt :** $M_X \leqslant 4\left(\dfrac{\sigma_n}{n} + \dfrac{1}{2\sigma_n}\right)$

c) Justifier le résultat suivant :
si pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, T_n est une variable aléatoire qui suit la loi binomiale (n, p_n) avec $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} np_n = +\infty$ alors, $\left(\dfrac{T_n - np_n}{\sqrt{np_n(1-p_n)}}\right)_{n\geqslant 1}$ converge uniformément en loi vers N.

- **1 pt : poser** $T_n = \sum\limits_{k=1}^{n} Z_k$ **où les** Z_k **sont indépendantes et suivent toutes la même loi de Bernoulli de paramètre** p_n **puis poser** $\sigma_n = \sqrt{np_n(1-p_n)}$ **et** $X_k = \dfrac{Z_k - p_n}{\sigma_n}$
- **1 pt :** $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} X_k = \dfrac{T_n - np_n}{\sqrt{np_n(1-p_n)}}$
- **1 pt : poser** $\delta_n = 2\sqrt{3\left(\dfrac{\sigma_n}{n} + \dfrac{1}{2\sigma_n}\right)}$
- **2 pt :** $\delta_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$

20. *Un petit lemme.* Soit $(V_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires réelles qui converge uniformément en loi vers N. Soit $(a_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de réels strictement positifs qui converge vers a, tel que $a > 0$, et $(b_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de réels qui converge vers b.

a) Soit X une variable aléatoire et (α, β) un couple de réels avec $\alpha > 0$. On note $F_{\alpha X+\beta}$ et $F_{\alpha N+\beta}$ les fonctions de répartition respectives de $\alpha X + \beta$ et $\alpha N + \beta$.

Montrer que, pour tout x réel,

$$|F_{\alpha X+\beta}(x) - F_{\alpha N+\beta}(x)| = d_X \left(\frac{x-\beta}{\alpha} \right)$$

- **1 pt : calcul**
- **1 pt :** $\alpha > 0$

b) Montrer que pour tout x réel,

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\mathbb{P}(a_n V_n + b_n \leqslant x) - \mathbb{P}(a_n N + b_n \leqslant x)\right) = 0$$

- **1 pt : poser $(\delta_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de limite nulle telle que**

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}, d_{V_n}(x) \leqslant \delta_n$$

- **1 pt :** $|\mathbb{P}(a_n V_n + b_n \leqslant x) - \mathbb{P}(a_n N + b_n \leqslant x)| \leqslant \delta_n$
- **1 pt : thm d'encadrement**

c) Établir que $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}(a_n N + b_n \leqslant x) = \mathbb{P}(aN + b \leqslant x)$ puis en déduire que $(a_n V_n + b_n)_{n\geqslant 1}$ converge en loi vers $aN + b$. Quelle est la loi de la variable aléatoire $aN + b$?

- **1 pt :** $\mathbb{P}(a_n N + b_n \leqslant x) - \mathbb{P}(aN + b \leqslant x) = \Phi\left(\frac{x-b_n}{a_n}\right) - \Phi\left(\frac{x-b}{a}\right)$
- **1 pt : Φ est continue en** $\dfrac{x-b}{a}$
- **1 pt : pour tout $x \in \mathbb{R}$,** $\mathbb{P}(a_n V_n + b_n \leqslant x) - \mathbb{P}(aN + b \leqslant x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$
- **1 pt : $N \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$ et $a > 0$ donc, par transformation affine, $aN + b$ suit une loi normale**
- **1 pt :** $aN + b \hookrightarrow \mathcal{N}\left(b, a^2\right)$

21. On reprend les notations de la partie 3.

a) Justifier que $(D_n)_{n\geqslant 1}$ converge uniformément en loi vers N.

- **1 pt :** $D_n = \dfrac{C_n - np_n}{\sigma_n} = \dfrac{C_n - np_n}{\sqrt{np_n(1-p_n)}}$
- **1 pt : vérification des hypothèses pour appliquer la question *19.c)***

b) En utilisant les résultats des questions ***14.*** et ***20.***, en déduire que la suite $(\hat{f}_n)_{n\geqslant 1}$ converge en loi vers N.

- **1 pt : récapitulation des résultats de la question *14.***
- **1 pt :** $(a_n D_n + b_n)_{n\geqslant 1}$ **converge en loi vers** $1 \times N + 0 = N$