

# 1 Indicatrices

Soit  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$  un espace probabilisé.

On distingue deux types d'indicatrices qu'il ne faut pas confondre.

- Si  $A$  est un événement, on note

$$\mathbb{1}_A : \omega \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } \omega \in A \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

la *variable aléatoire indicatrice* de l'événement  $A$ .

- Si  $I$  est une partie de  $\mathbb{R}$ , on note

$$\mathbb{1}_I : x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \in I \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

la *fonction indicatrice* de  $I$ .

Soient  $A$  et  $B$  deux événements

1. Reconnaître l'événement  $[\mathbb{1}_A = 1]$  puis reconnaître la loi de  $\mathbb{1}_A$ . Donner son espérance et sa variance.
2. Montrer que  $\mathbb{1}_A \times \mathbb{1}_B = \mathbb{1}_{A \cap B}$ .
3. Montrer que  $\mathbb{1}_A + \mathbb{1}_{\bar{A}} = 1$ .
4. Montrer que  $\mathbb{1}_{A \cup B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_{A \cap B}$ .
5. En déduire que, si  $A$  et  $B$  sont incompatibles, alors  $\mathbb{1}_{A \cup B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B$ .
6. Calculer  $\text{Cov}(\mathbb{1}_A, \mathbb{1}_B)$ .
7. En déduire que  $\mathbb{1}_A$  et  $\mathbb{1}_B$  sont indépendantes si et seulement si  $A$  et  $B$  sont indépendants.

Soient  $I$  et  $J$  deux parties de  $\mathbb{R}$ .

8. Montrer que  $\mathbb{1}_I \times \mathbb{1}_J = \mathbb{1}_{I \cap J}$ .
9. Montrer que  $\mathbb{1}_I + \mathbb{1}_{\mathbb{R} \setminus I} = 1$ .

Soit  $X$  une variable aléatoire et soit  $a \in \mathbb{R}$ .

10. Montrer que  $\mathbb{1}_{[a, +\infty[}(X) = \mathbb{1}_{[X \geq a]}$ .
11. On suppose dans cette question que  $X$  admet une densité notée  $f$ . Soit  $g$  une fonction continue sur  $\mathbb{R}$  sauf éventuellement en un nombre fini de points. Démontrer que la variable aléatoire  $g(X)\mathbb{1}_{[X \geq a]}$  admet une espérance si et seulement si l'intégrale

$$\int_a^{+\infty} g(t)f(t) dt$$

converge absolument.

## 2 Lemme de Borel-Cantelli

**Théorème 1.** Soit  $(A_n)$  une suite infinie d'événements. On définit l'événement

$B$  : « un nombre infini d'événements  $A_n$  sont simultanément réalisés »

- Si la série  $\sum \mathbb{P}(A_n)$  converge, alors l'événement  $B$  est quasi-impossible.
- Si les événements de la famille  $(A_n)$  sont indépendants et si la série  $\sum \mathbb{P}(A_n)$  diverge, alors l'événement  $B$  est quasi-certain.

1. (a) Soit  $G$  une partie de  $\mathbb{N}$ . Montrer que :

$$G \text{ est infini} \iff \forall i \in \mathbb{N}, \exists j \geq i, j \in G$$

(b) En déduire que  $B = \bigcap_{i=1}^{+\infty} \bigcup_{j=i}^{+\infty} A_j$  puis que  $\overline{B} = \bigcup_{i=1}^{+\infty} \bigcap_{j=i}^{+\infty} \overline{A_j}$ .

On suppose jusqu'à mention du contraire que la série  $\sum \mathbb{P}(A_n)$  **converge**.

2. (a) Soient  $(D_k)$  une suite infinie d'événements. Montrer que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^n D_k\right) \leq \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(D_k)$$

- (b) En déduire que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{j=n}^{+\infty} A_j\right) \leq \sum_{k=n}^{+\infty} \mathbb{P}(A_j)$$

3. Montrer que  $\mathbb{P}(B) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}\left(\bigcup_{j=n}^{+\infty} A_j\right)$  puis en déduire que  $\mathbb{P}(B) = 0$ .

On suppose maintenant que les événements de la famille  $(A_n)$  sont indépendants et que la série  $\sum \mathbb{P}(A_n)$  **diverge**.

4. Montrer que  $\mathbb{P}(\overline{B}) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}\left(\bigcap_{j=n}^{+\infty} \overline{A_j}\right)$ .

5. Montrer que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\mathbb{P}\left(\bigcap_{j=n}^{+\infty} \overline{A_j}\right) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \mathbb{P}\left(\bigcap_{j=n}^N \overline{A_j}\right)$ .

6. (a) Montrer que, pour tout  $x \in \mathbb{R} : e^{-x} \geq 1 - x$ .

- (b) En déduire que, pour tout entiers naturels  $n \leq N$ ,

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{j=n}^N \overline{A_j}\right) \leq e^{-\sum_{j=n}^N \mathbb{P}(A_j)}$$

7. En déduire que  $\mathbb{P}(\overline{B}) = 0$ .

### 3 Fonction génératrice des probabilités

Soit  $X$  une variable aléatoire à valeurs dans  $\mathbb{N}$ . Pour tout  $t \in [0, 1]$ , on note

$$G_X(t) = \mathbb{E}(t^X)$$

et on appelle  $G_X$  la *fonction génératrice des probabilités* associée à  $X$ .

1. (a) Montrer que, pour tout  $t \in [0, 1]$ , la série  $\sum t^k \mathbb{P}([X = k])$  converge.
- (b) En déduire que, pour tout  $t \in [0, 1]$ ,  $\mathbb{E}(t^X)$  existe et

$$\mathbb{E}(t^X) = \sum_{k=0}^{+\infty} t^k \mathbb{P}([X = k])$$

2. (a) Montrer que, si  $X$  et  $Y$  sont deux variables aléatoires à valeurs dans  $\mathbb{N}$  et indépendantes, alors

$$\forall t \in [0, 1], G_{X+Y}(t) = G_X(t)G_Y(t)$$

- (b) Soient  $X_1, \dots, X_n$  des variables aléatoires à valeurs dans  $\mathbb{N}$  et mutuellement indépendantes. Montrer que :

$$G_{\sum_{i=1}^n X_i} = \prod_{i=1}^n G_{X_i}$$

3. Soit  $t \in [0, 1]$ .

- (a) On suppose que  $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$  où  $p \in ]0, 1[$ . Montrer que  $G_X(t) = pt + 1 - p$ .
- (b) On suppose que  $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$  où  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $p \in ]0, 1[$ . Montrer que  $G_X(t) = (pt + 1 - p)^n$ .
- (c) On suppose que  $X \hookrightarrow \mathcal{U}([1, n])$  où  $n \in \mathbb{N}^*$ . Montrer que  $G_X(t) = \begin{cases} \frac{t}{n} \frac{1-t^n}{1-t} & \text{si } t < 1 \\ 1 & \text{si } t = 1 \end{cases}$ .
- (d) On suppose que  $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$  où  $p \in ]0, 1[$ . Montrer que  $G_X(t) = \frac{pt}{1 - (1-p)t}$ .
- (e) On suppose que  $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$  où  $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ . Montrer que  $G_X(t) = e^{\lambda(t-1)}$ .

4. (a) Montrer que  $G_X(0) = \mathbb{P}([X = 0])$ .
- (b) Montrer que, pour tout  $t \in ]0, 1]$ ,

$$\frac{G_X(t) - G_X(0)}{t} = \mathbb{P}([X = 1]) + t \sum_{k=1}^{+\infty} t^{k-1} \mathbb{P}([X = k + 1])$$

puis en déduire que  $G_X'(0) = \mathbb{P}([X = 1])$ .

- (c) On admet que, pour tout  $t \in [0, 1[$  et pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$G_X^{(n)}(t) = \sum_{k=n}^{+\infty} \left( \prod_{i=0}^{n-1} (k-i) \right) t^{k-n} \mathbb{P}([X = k])$$

En déduire que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\mathbb{P}([X = n]) = \frac{G_X^{(n)}(0)}{n!}$ .

(Ainsi, la fonction génératrice des probabilités caractérise la loi)

- (d) Démontrer que la fonction génératrice des probabilités caractérise la loi sans utiliser le résultat précédent.

5. Déduire des questions précédentes une preuve de deux résultats de cours suivants :

- (a) Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  et soit  $p \in ]0, 1[$ . Soient  $X_1, \dots, X_n$  des variables aléatoires mutuellement indépendantes et suivant toutes la loi  $\mathcal{B}(p)$ . Alors  $\sum_{k=1}^n X_k \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$ .
- (b) Soient  $\lambda > 0$  et  $\mu > 0$ . Soient  $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$  et  $Y \hookrightarrow \mathcal{P}(\mu)$  deux variables aléatoires indépendantes. Alors  $X + Y \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda + \mu)$ .

Dans la suite de cette partie, on suppose que  $X$  est une variable aléatoire **finie**, toujours à valeurs entières positives.

6. (a) Vérifier que  $G_X$  est alors une fonction polynomiale.
- (b) Montrer que  $\mathbb{E}(X) = G_X'(1)$ .
- (c) Montrer que  $\mathbb{V}(X) = G_X''(1) + G_X'(1) - (G_X'(1))^2$ .

## 4 Fonction génératrice des moments

Soit  $X$  une variable aléatoire. Pour tout  $t \in \mathbb{R}$  tel que la variable aléatoire  $e^{tX}$  admet une espérance, on note

$$M_X(t) = \mathbb{E}(e^{tX})$$

et on appelle  $M_X$  la *fonction génératrice des moments* associée à  $X$ .

1. Vérifier que  $M_X(0) = 1$  puis que  $M_X(t) \geq 0$  sous réserve d'existence.
2. Une formule pour le cas discret et une autre pour le cas à densité.

(a) On suppose dans cette question que  $X(\Omega) \subset \mathbb{N}$ . Soit  $t \in \mathbb{R}$ . Montrer que, sous réserve d'existence,

$$M_X(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} e^{tk} \mathbb{P}([X = k]) = G_X(e^t)$$

où  $G_X$  est définie en début de partie 3.

(b) On suppose dans cette question que  $X$  est une variable aléatoire admettant une densité  $f$  nulle en dehors de  $]a, b[$ , où  $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ . Soit  $t \in \mathbb{R}$ . Montrer que, sous réserve d'existence,

$$M_X(t) = \int_a^b e^{tx} f(x) dx$$

3. Une fonction qui porte bien son nom. On suppose dans cette question que  $X(\Omega)$  est un ensemble fini.

(a) Montrer que, pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,

$$M_X(t) = \sum_{k \in X(\Omega)} e^{tk} \mathbb{P}([X = k])$$

(b) En déduire que  $M_X$  est de classe  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}$ , que  $X$  admet des moments à tout ordre, et que pour tout  $r \in \mathbb{N}$ ,

$$M_X^{(r)}(0) = \mathbb{E}(X^r)$$

$\hookrightarrow$  Pour généraliser ce résultat au cas  $X$  infinie ou  $X$  à densité, il faut des théorèmes de dérivation sous le symbole somme ou intégral, qui sont hors programme.

4. Fonction génératrice des moments d'une combinaison linéaire.

(a) Soient  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires indépendantes. Soit  $t \in \mathbb{R}$ . Montrer que, si  $M_X(t)$  et  $M_Y(t)$  sont bien définis, alors  $M_{X+Y}(t)$  est bien défini et on a :

$$M_{X+Y}(t) = M_X(t)M_Y(t)$$

(b) Soient  $X_1, \dots, X_n$  des variables aléatoires mutuellement indépendantes et soit  $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ . Soit  $t \in \mathbb{R}$ . Montrer que, si  $M_{X_i}(a_i t)$  est bien défini pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , alors  $M_{\sum_{i=1}^n a_i X_i}(t)$  est bien défini et on a :

$$M_{\sum_{i=1}^n a_i X_i}(t) = \prod_{i=1}^n M_{X_i}(a_i t)$$

5. (a) On suppose que  $X \hookrightarrow \mathcal{U}([a, b])$  où  $a < b$ . Montrer que  $M_X(t) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} \frac{e^{tb} - e^{ta}}{t} & \text{si } t \neq 0 \\ 1 & \text{si } t = 0 \end{cases}$ .

(b) On suppose que  $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$  où  $\lambda > 0$ . Montrer que  $M_X(t) = \frac{\lambda}{\lambda - t}$  pour tout  $t < \lambda$ .

(c) On suppose que  $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1)$ . Montrer que  $M_X(t) = e^{\frac{1}{2}t^2}$  pour tout  $t \in \mathbb{R}$ .

(d) En déduire que si  $X \hookrightarrow \mathcal{N}(m, \sigma^2)$  où  $m \in \mathbb{R}$  et  $\sigma > 0$ , alors  $M_X(t) = e^{\frac{1}{2}\sigma^2 t^2 + mt}$  pour tout  $t \in \mathbb{R}$ .