Colles de Mathématiques en E2A
Estimation
Semaine 23 : 17 - 21 mars

Toutes les définitions et tous les énoncés de théorèmes/propositions du cours sont exigibles des élèves. Les démonstrations des théorèmes du cours ne sont pas exigibles, sauf si elles apparaissent en question de cours.

On pourra à tout moment demander à un·e élève de donner la nature (réel, suite, fonction, ensemble, proposition, etc) d'une expression manipulée dans un exercice, pour vérifier sa bonne compréhension. On pourra aussi demander de préciser quelles sont les variables libres et quelles sont les variables liées (muettes).

On portera une attention toute particulière à ce que les objets soient correctement introduits avant d'être utilisés, et ne soient pas introduits pour rien.

1 Chapitre XVIII : Estimation

1.1 Définitions

- Notion de n-échantillon et d'observation.
- Estimateur de θ. Estimation de θ.
- Estimateur moyenne empirique.
- Fonction de vraisemblance et estimateur du maximum de vraisemblance.
- Intervalle de confiance. Intervalle de confiance asymptotique.
  Le programme officiel ne traite que des intervalles de confiance de l'espérance mathématique faisant intervenir l'estimateur de moyenne empirique.

1.2 Résultats

Il n'y a aucun théorème au programme à connaître par coeur, seulement des méthodes.

1.3 Méthodes

- Il faut savoir mettre en oeuvre la méthode du maximum de vraisemblance pour construire l'estimateur du maximum de vraisemblance.
- Il faut savoir construire un intervalle de confiance (exact) avec l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.
  (Seulement dans le cadre de l'estimation du paramètre p d'une loi de Bernoulli, à l'aide de l'estimateur moyenne empirique)
- Il faut savoir construire un intervalle de confiance asymptotique avec le théorème central limite.
  (Seulement dans le cadre de l'estimation du paramètre p d'une loi de Bernoulli, à l'aide de l'estimateur moyenne empirique)

2 Questions de cours

1. Citer puis démontrer l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev à l'aide de l'inégalité de Markov.

2. Citer puis démontrer la loi faible des grands nombres à l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.
3. Citer le théorème central limite et démontrer que $S_n^* = \overline{X}_n^*$.
4. Soit $\lambda > 0$. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de v.a.r. . On suppose que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $X_n \hookrightarrow \mathcal{B}\left(n, \dfrac{\lambda}{n}\right)$. Montrer que $X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathscr{L}} X$ où $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$.
5. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de v.a.r. . On suppose que : $\forall n \geq 3$, $X_n \hookrightarrow \mathcal{U}([\frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}])$. Montrer que $X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathscr{L}} X$ où $X \hookrightarrow \mathcal{U}([0,1])$. (exo 7 du TD reformulé)
6. Définition de la fonction de vraisemblance dans le cas discret et calcul de l'estimateur du maximum de vraisemblance pour la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$. `(exo 4)`
7. Définition de la fonction de vraisemblance dans le cas à densité et calcul de l'estimateur du maximum de vraisemblance pour la loi uniforme $\mathcal{U}([0,\theta])$. `(exo 6)`