

TP libre : Loi faible des grands nombres et suite de Syracuse

Commencer par importer les bibliothèques suivantes dans chaque fichier **Python** utilisé :

```
import numpy as np
import numpy.random as rd
import matplotlib.pyplot as plt
```

Le problème « $3x+1$ », également appelé « conjecture de Syracuse », date d'une centaine d'année et porte sur des suites d'entiers définies récursivement.

Considérons un entier naturel non nul N fixé. On définit la suite $(u_n(N))_{n \in \mathbb{N}^*}$ par récurrence en posant :

$$u_1 = N \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_{n+1} = \begin{cases} \frac{u_n}{2} & \text{si } u_n \text{ est pair} \\ 3u_n + 1 & \text{si } u_n \text{ est impair} \end{cases}$$

et on appelle cette suite la suite de Syracuse associée à l'entier N . Par exemple :

$$\begin{aligned} (u_n(1))_{n \in \mathbb{N}^*} &= (1, 4, 2, 1, 4, 2, 1, 4, 2, 1, \dots) \\ (u_n(2))_{n \in \mathbb{N}^*} &= (2, 1, 4, 2, 1, 4, 2, 1, 4, 2, 1, \dots) \\ (u_n(3))_{n \in \mathbb{N}^*} &= (3, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1, 4, 2, 1, \dots) \\ (u_n(4))_{n \in \mathbb{N}^*} &= (4, 2, 1, 4, 2, 1, 4, 2, 1, 4, 2, 1, \dots) \\ (u_n(5))_{n \in \mathbb{N}^*} &= (5, 16, 8, 4, 2, 1, 4, 2, 1, \dots) \end{aligned}$$

On remarque que si la suite de Syracuse prend la valeur 1, alors elle devient périodique et le cycle 1, 4, 2 se répète éternellement.

La conjecture de Syracuse s'énonce comme suit : pour tout entier naturel non nul N , il existe un rang $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $u_n(N) = 1$. Autrement dit, pour tout entier $N > 0$, la suite de Syracuse associée à N prend la valeur 1.

Cette conjecture n'est toujours pas démontrée (n'essayez pas de le faire !). Cependant, il a été vérifié par ordinateur qu'elle est vraie pour $N \leq 10^{20}$ environ. Dans ce TP, nous ferons comme si cette conjecture était vraie.

Pour tout entier $N > 0$, on appelle temps de vol de N , et on note $T(N)$, le premier entier $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $u_n(N) = 1$. Par exemple :

$$T(1) = 1, \quad T(2) = 2, \quad T(3) = 8, \quad T(4) = 3, \quad T(5) = 6$$

Puisque toute suite de Syracuse se répète une fois le nombre 1 atteint, toute l'information utile est contenue dans la première partie de la suite, jusqu'à ce qu'on tombe sur 1. Cette première partie de la suite a, par définition, une longueur égale à $T(N)$. On appellera trajectoire de vol associée à N cette partie de la suite.

Nous donnons maintenant deux fonctions **Python** qui permettent de calculer la trajectoire de vol de tout entier N non nul. La première permet de calculer le prochain terme d'une suite de Syracuse, tandis que la deuxième renvoie la trajectoire de vol associée à un entier non nul N donné, sous forme de liste.

```

1 def nextTermeSyracuse(u):
2     if u % 2 == 0: # Si u_n est pair
3         return u // 2
4     else: # Si u_n est impair
5         return 3*u+1

```

```

1 def trajectoireVolSyracuse(n):
2     L = [n]
3     if n == 1:
4         return L
5     else:
6         return L + trajectoireVolSyracuse(nextTermeSyracuse(n))

```

La deuxième fonction utilise un procédé récursif hors-programme (la fonction s'appelle elle-même, mais une condition d'arrêt assure que le procédé récursif ne va pas devenir une boucle infinie).

On se donne une suite $(X_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires indépendantes telle que, pour tout entier $k \in \mathbb{N}^*$, $X_k \hookrightarrow \mathcal{G}(\frac{1}{k})$. On note ensuite, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

- Y_k la variable aléatoire définie par : pour tout $\omega \in \Omega$, $Y_k(\omega)$ est égal au premier entier non nul N tel que le nombre $X_k(\omega)$ appartient à la trajectoire de vol associée à N .
- Z_k la variable aléatoire définie par : pour tout $\omega \in \Omega$, $Z_k(\omega)$ est égal au temps de vol de l'entier $X_k(\omega)$. Autrement dit, $Z_k = T(X_k)$.

On remarque que $0 \leq Y_k \leq X_k$, donc Y_k admet une espérance car X_k en admet une (par un théorème de domination hors-programme) et $\mathbb{E}(Y_k) \leq \mathbb{E}(X_k)$. De même, Y_k admet un moment d'ordre 2 et donc une variance.

Il n'est par contre pas évident que Z_k admette une variance, on supposera que c'est le cas dans la suite.

- Compléter la fonction suivante pour qu'elle renvoie une simulation de la v.a.r. Y_k .

```

1 def simuY(k):
2     X = rd.geometric(1/k)
3     Y = 1
4     while not(X in trajectoireVolSyracuse(Y)):
5         Y = Y + 1
6     return Y

```

- Expliquer ce que renvoie le programme suivant lorsque N est grand.

```

1 def mystere(N, k):
2     S = 0
3     for i in range(N):
4         S = S + simuY(k)
5     return S / N

```

Ce programme calcule une approximation de l'espérance de Y_k .

- Compléter la fonction suivante pour qu'elle renvoie une simulation de la v.a.r. Z_k .

```

1 def simuZ(k):
2     X = rd.geometric(1/k)
3     return len(trajectoireVolSyracuse(X))

```

- Expliquer ce que renvoie le programme suivant lorsque N est grand.

```

1 def mystere(N, k):
2     F = 0
3     for i in range(N):
4         F = F + simuY(k)/N
5     return F

```

Ce programme calcule une approximation de l'espérance de Z_k .

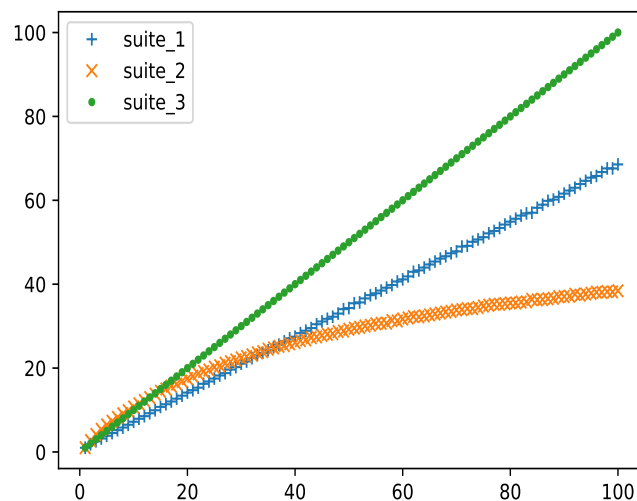
- On exécute le script suivant

```

1 N = 10**5
2 nb_points = 100
3 abscisse = [k for k in range(1,nb_points+1)]
4 ordonneeY = []
5 ordonneeZ = []
6 for k in abscisse:
7     print(k)
8     ordonneeY.append(approxEspY(N, k))
9     ordonneeZ.append(approxEspZ(N, k))
10 ordonneeX = [k for k in range(1,nb_points+1)]
11 plt.plot(abscisse, ordonneeY, '+', label='suite_1')
12 plt.plot(abscisse, ordonneeZ, 'x', label='suite_2')
13 plt.plot(abscisse, ordonneeX, '.', label='suite_3')
14 plt.legend(loc='best')

```

et on reproduit ci-dessous la figure obtenue :



Préciser qui sont les trois suites représentées. Qu'y a-t-il de remarquable ?

- la suite 1 est la suite $(\mathbb{E}(Y_k))_{k \in \mathbb{N}^*}$.
- la suite 2 est la suite $(\mathbb{E}(Z_k))_{k \in \mathbb{N}^*}$.
- la suite 3 est la suite $(\mathbb{E}(X_k))_{k \in \mathbb{N}^*}$. En effet, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{E}(X_k) = k$.

Le tracé de la suite $(\mathbb{E}(Y_k))_{k \in \mathbb{N}^*}$ laisse présager une relation affine de la forme $\mathbb{E}(Y_k) = ak + b$.

Le tracé de la suite $(\mathbb{E}(Z_k))_{k \in \mathbb{N}^*}$ semble montrer que la suite croît de plus en plus lentement (logarithmiquement ou comme \sqrt{k} par exemple).