Corrigés des sujets de révisions
Variables aléatoires discrètes

ECRICOME 2023 sujet 0 - rang du deuxième Pile, loi géométrique, couple de v.a.r. discrètes, loi de la somme, expérience en deux étapes, covariance, coefficient de corrélation linéaire

Soit $p \in]0,1[$. On considère une pièce donnant `Pile` avec probabilité p. On effectue une succession de lancers indépendants de cette pièce jusqu'à l'obtention du deuxième `Pile`.
On note alors X_1 le rang d'apparition du premier `Pile` et X_2 le nombre de lancers supplémentaires effectués après le premier `Pile` jusqu'à l'apparition du deuxième `Pile`.
Par exemple, si les lancers donnent dans cet ordre :

`Face`, `Pile`, `Face`, `Face`, `Face`, `Pile`,

alors $[X_1 = 2]$ et $[X_2 = 4]$ se réalisent.

1. Reconnaître la loi de X_1 et la loi de X_2.

2. Déterminer la loi conjointe du couple (X_1, X_2).

3. En déduire que les variables aléatoires X_1 et X_2 sont indépendantes.

4. Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 2$:

$$\mathbb{P}([X_1 + X_2 = n]) = (n-1)p^2(1-p)^{n-2}$$

On note alors Y la variable aléatoire égale au nombre de `Face` obtenus sur toute l'expérience.

5. Recopier et compléter la fonction **Python** suivante, prenant en argument d'entrée le réel p de $]0,1[$, et renvoyant une simulation de la variable aléatoire Y.

```
import numpy.random as rd
def simul_Y(p):
    Y = 0
    nb_Pile = 0
    while ________________ :
        if _____________________ :
            nb_Pile = nb_Pile + 1
        else :
            ______________
    return Y
```

6. Exprimer Y en fonction de X_1 et X_2.

7. En déduire l'espérance de Y, la variance de Y et la loi de Y.

Une fois le second `Pile` obtenu, si l'on a obtenu un nombre n de `Face`, alors on place $n+1$ boules numérotées de 0 à n dans une urne. On effectue alors un unique tirage dans cette urne et on note U la variable aléatoire égale au numéro obtenu. On note également $V = Y - U$.

8. Ecrire une fonction **Python** `simul_UV`, prenant en argument d'entrée la valeur du réel p de $]0,1[$, et renvoyant une simulation du couple (U,V). On pourra faire appel à la fonction `simul_Y` définie à la question ***5***.

9. Justifier que $U(\Omega)=\mathbb{N}$ et préciser $V(\Omega)$.

10. Pour tout $k\in\mathbb{N}$, déterminer $\mathbb{P}([U=k])$.

11. Montrer que la variable aléatoire $U+1$ suit une loi usuelle que l'on reconnaîtra.
En déduire l'espérance et la variance de U.

12. Montrer que V suit la même loi que U.

13. ***a)*** Montrer que U et V sont indépendantes.

b) En déduire la covariance du couple (Y,U).

c) Montrer que le coefficient de corrélation linéaire du couple (Y,U) est égal $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

EDHEC 2021 - Etude d'un jeu, loi géométrique

On dispose de deux pièces identiques donnant pile avec la probabilité p, élément de $]0,1[$, et face avec la probabilité $q = 1-p$.

Partie 1 : un jeu naïf

Deux joueurs A et B s'affrontent lors de lancers de ces pièces de la façon suivante, les lancers de chaque pièce étant supposés indépendants :
Pour la première manche, A et B lancent chacun leur pièce simultanément jusqu'à ce qu'ils obtiennent pile, le gagnant du jeu étant celui qui a obtenu pile le premier. En cas d'égalité et en cas d'égalité seulement, les joueurs participent à une deuxième manche dans les mêmes conditions et avec la même règle, et ainsi de suite jusqu'à la victoire de l'un d'entre eux.
Pour tout k de $\mathbb{N}^*$, on note X_k (resp. Y_k) la variable aléatoire égale au rang d'obtention du 1^{er} pile par A (resp. par B) lors de la $k^{\text{ème}}$ manche.
On note, toujours pour k dans $\mathbb{N}^*$, E_k l'événement « Il y a égalité à la fin de la $k^{\text{ème}}$ manche ».
On note E l'événement « Il y a perpétuellement égalité ».
On note G (resp. H) l'événement « A (resp. B) gagne à ce jeu », et pour tout entier naturel n non nul, on note G_n (resp. H_n) l'événement « A (resp. B) gagne le jeu à la $n^{\text{ème}}$ manche ».

1. Étude de la première manche.

a) Donner la loi commune à X_1 et Y_1. En déduire qu'il est quasi-impossible que la première manche dure éternellement. On admet alors qu'il en est de même pour chaque manche jouée.

Démonstration.

- L'expérience consiste en la succession d'une infinité d'épreuves de Bernoulli indépendantes et de même paramètre de succès p (probabilité d'obtenir Pile).
- La v.a.r. X (respectivement Y) prend pour valeur le rang du premier Pile obtenu.

$$\boxed{\text{On en déduit : } X \hookrightarrow \mathcal{G}(p) \text{ (respectivement } Y \hookrightarrow \mathcal{G}(p)).}$$

- Dans la suite, pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, notons :

$$\begin{array}{rcl} P_i^A & : & \text{« le joueur } A \text{ a obtenu Pile lors du } i^{\text{ème}} \text{ tirage »} \\ P_i^B & : & \text{« le joueur } B \text{ a obtenu Pile lors du } i^{\text{ème}} \text{ tirage »} \\ C & : & \text{« la première manche dure éternellement »} \end{array}$$

On introduit de manière similaire les événements F_i^A et F_i^B. On a alors :

$$\begin{array}{cccll} & \multicolumn{4}{l}{\text{L'événement } C \text{ est réalisé}} \\ \Leftrightarrow & \multicolumn{4}{l}{\text{La première manche dure éternellement}} \\ \Leftrightarrow & & A \text{ obtient Face au } 1^{\text{er}} \text{ tirage} & \texttt{ET} & B \text{ obtient Face au } 1^{\text{er}} \text{ tirage} \\ & \texttt{ET} & A \text{ obtient Face au } 2^{\text{ème}} \text{ tirage} & \texttt{ET} & B \text{ obtient Face au } 2^{\text{ème}} \text{ tirage} \\ & \texttt{ET} & A \text{ obtient Face au } 3^{\text{ème}} \text{ tirage} & \texttt{ET} & B \text{ obtient Face au } 3^{\text{ème}} \text{ tirage} \\ & & \vdots & & \vdots \\ \Leftrightarrow & & A \text{ obtient Face éternellement} & \texttt{ET} & B \text{ obtient Face éternellement} \\ \Leftrightarrow & & \bigcap\limits_{i=1}^{+\infty} F_i^A \text{ est réalisé} & \texttt{ET} & \bigcap\limits_{j=1}^{+\infty} F_i^B \text{ est réalisé} \end{array}$$

$$\boxed{C = \left(\bigcap_{i=1}^{+\infty} F_i^A\right) \cap \left(\bigcap_{i=1}^{+\infty} F_i^B\right)}$$

- Remarquons alors :

$$C \;=\; \left(\bigcap_{i=1}^{+\infty} F_i^A\right) \cap \left(\bigcap_{i=1}^{+\infty} F_i^B\right) \;\subset\; \bigcap_{i=1}^{+\infty} F_i^A$$

donc $\mathbb{P}(C) \;=\; \mathbb{P}\left(\left(\bigcap_{i=1}^{+\infty} F_i^A\right) \cap \left(\bigcap_{i=1}^{+\infty} F_i^B\right) \right) \;\leqslant\; \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{+\infty} F_i^A\right)$ *(par croissance de l'application $\mathbb{P}$)*

Or, d'après le théorème de la limite monotone :

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{+\infty} F_i^A\right) \;=\; \lim_{m\to+\infty} \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{m} F_i^A\right)$$

Et :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{m} F_i^A\right) &= \prod_{i=1}^{m} \mathbb{P}\left(F_i^A\right) && \textit{(par indépendance des lancers)} \\
&= \prod_{i=1}^{m} p \\
&= p^m \underset{m\to+\infty}{\longrightarrow} 0 && \textit{(car } p \in \,]0,1[\textit{)}
\end{aligned}$$

Finalement :

$$0 \;\leqslant\; \mathbb{P}(C) \;\leqslant\; \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{+\infty} F_i^A\right) = 0$$

$$\boxed{\text{On en conclut : } \mathbb{P}(C) = 0. \text{ Il est donc quasi-impossible que la première manche dure éternellement.}}$$

□

b) Écrire l'événement E_1 à l'aide des variables X_1 et Y_1.

Démonstration.

L'événement E_1 est réalisé

$\Leftrightarrow$ Il y a égalité à la fin de la 1ère manche

$\Leftrightarrow$ Les deux joueurs ont obtenu leur premier Pile lors du même lancer

$\Leftrightarrow$ Les v.a.r. X_1 et Y_1 prennent la même valeur

$\Leftrightarrow$ L'événement $[X_1 = Y_1]$ est réalisé

$$\boxed{E_1 \;=\; [X_1 = Y_1]}$$

Commentaire

- Donner le résultat permet de démontrer la compréhension et ainsi d'obtenir tous les points alloués à la question. La précédente rédaction est mise en avant pour permettre la bonne compréhension des mécanismes en jeu.
- On pouvait aussi remarquer :

L'événement E_1 est réalisé $\Leftrightarrow$ Les v.a.r. X_1 et Y_1 prennent la même valeur

$\Leftrightarrow$ Il existe $i \in \mathbb{N}^*$ tel que $[X_1 = i] \cap [Y_1 = i]$ est réalisé

$\Leftrightarrow$ $\bigcup_{i\in\mathbb{N}^*} [X_1 = i] \cap [Y_1 = i]$ est réalisé

Cela permet de conclure : $E_1 = \bigcup_{i\in\mathbb{N}^*} [X_1 = i] \cap [Y_1 = i]$.

□

c) Montrer que $\mathbb{P}(E_1) = \sum\limits_{i=1}^{+\infty} \mathbb{P}([X_1 = i])\,\mathbb{P}([Y_1 = i])$ et en déduire l'expression explicite de $\mathbb{P}(E_1)$ en fonction de p et q.

Démonstration.
La famille $\big([X_1 = i]\big)_{i\in\mathbb{N}^*}$ forme un système complet d'événements.
On en déduit, par la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\big([X_1 = Y_1]\big) &= \sum_{i=1}^{+\infty} \mathbb{P}\big([X_1 = i] \cap [X_1 = Y_1]\big) \\
&= \sum_{i=1}^{+\infty} \mathbb{P}\big([X_1 = i] \cap [i = Y_1]\big) \\
&= \sum_{i=1}^{+\infty} \mathbb{P}\big([X_1 = i]\big) \times \mathbb{P}\big([Y_1 = i]\big) \qquad \textit{(par indépendance des lancers)}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{P}(E_1) = \sum_{i=1}^{+\infty} \mathbb{P}\big([X_1 = i]\big) \times \mathbb{P}\big([Y_1 = i]\big)}$$

Commentaire

Si la question précédente peut paraître difficile de premier abord, la lecture de cette question éclaire quant au résultat que nous étions censés trouver en question précédente. On peut en effet, au brouillon, opérer par rétro-ingénierie pour trouver le résultat à démontrer en question précédente. Il est ici demandé de démontrer :

$$\mathbb{P}(E_1) = \sum_{i=1}^{+\infty} \mathbb{P}([X_1 = i])\,\mathbb{P}([Y_1 = i])$$

Or, par indépendance :

$$\mathbb{P}([X_1 = i])\,\mathbb{P}([Y_1 = i]) = \mathbb{P}\big([X_1 = i] \cap [Y_1 = i]\big)$$

Finalement, on doit démontrer :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(E_1) &= \sum_{i=1}^{+\infty} \mathbb{P}\big([X_1 = i] \cap [Y_1 = i]\big) \\
&= \mathbb{P}\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}^*} [X_1 = i] \cap [Y_1 = i]\right) \qquad \begin{array}{l}\textit{(la somme de probabilités doit}\\ \textit{faire penser à la probabilité}\\ \textit{d'une réunion !)}\end{array}
\end{aligned}$$

Démontrer : $E_1 = \bigcup\limits_{i\in\mathbb{N}^*} [X_1 = i] \cap [Y_1 = i]$ permet de démontrer l'égalité au-dessus. Cette question fournit donc, à quelques manipulations près, la réponse à la question précédente.

Évidemment, il ne s'agit pas de rédiger la question ***1.c)*** en indiquant : « d'après la question suivante ... ». En revanche, on ne peut reprocher à un candidat d'exploiter au maximum les informations fournies par le sujet. Il est donc conseillé de bien lire le sujet afin de vérifier si l'énoncé d'une question ne fournit pas la réponse à une question précédente.

- On a alors :

$$\begin{array}{rcll}
\mathbb{P}(E_1) & = & \sum\limits_{i=1}^{+\infty} \mathbb{P}\big([X_1 = i]\big)\, \mathbb{P}\big([Y_1 = i]\big) & \\
& = & \sum\limits_{i=1}^{+\infty} p\, q^{i-1} \times p\, q^{i-1} & \textit{(car } X_1 \hookrightarrow \mathcal{G}(p) \textit{ et } Y_1 \hookrightarrow \mathcal{G}(p)\textit{)} \\
& = & p^2 \sum\limits_{i=1}^{+\infty} q^{2i-2} & \\
& = & p^2 \sum\limits_{i=1}^{+\infty} \left(q^2\right)^{i-1} & \\
& = & p^2 \sum\limits_{i=0}^{+\infty} \left(q^2\right)^{i} & \\
& = & p^2\, \dfrac{1}{1-q^2} & \textit{(d'après la formule de la somme d'une série géométrique de raison } q^2 \in\,]0,1[\textit{)}
\end{array}$$

$$\boxed{\mathbb{P}(E_1) = \dfrac{p^2}{1-q^2}}$$

- Enfin, on remarque :

$$\begin{array}{rcl}
1 - q^2 & = & 1 - (1-p)^2 \\
& = & 1 - (1 - 2\,p + p^2) \\
& = & \cancel{1} - \cancel{1} + 2\,p - p^2 \\
& = & p\,(2-p) \\
& = & p\,\big(1 + (1-p)\big) \ = \ p\,(1+q)
\end{array}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } \mathbb{P}(E_1) = \dfrac{p^2}{1-q^2} = \dfrac{p^{\cancel{2}}}{\cancel{p}\,(1+q)} = \dfrac{p}{1+q}.}$$

□

d) Justifier sans aucun calcul que les événements G_1 et H_1 sont équiprobables. En déduire la probabilité de G_1 en fonction de p et q.

Démonstration.

- Les joueurs A et B jouent avec deux pièces identiques. De plus, le jeu auquel il participe est le même pour chaque joueur notamment car les lancers de pièces sont effectués de manière simultanée. Les rôles des joueurs A et B sont donc parfaitement symétriques (on pourrait échanger les noms de ces joueurs sans que cela ne modifie le problème). Ainsi, le joueurs A et B ont même probabilité de gagner la $1^{\text{ère}}$ manche.

$$\boxed{\text{On en déduit que les événements } G_1 \text{ et } H_1 \text{ sont équiprobables.}}$$

- À la fin de la $1^{\text{ère}}$ manche, seules trois situations sont possibles :
  - × le joueur A gagne la $1^{\text{ère}}$ manche. Autrement dit, l'événement G_1 est réalisé.
  - × le joueur B gagne la $1^{\text{ère}}$ manche. Autrement dit, l'événement H_1 est réalisé.
  - × il y a égalité lors de la $1^{\text{ère}}$ manche. Autrement dit, l'événement E_1 est réalisé.

  Ces trois événements sont de plus 2 à 2 incompatibles car il n'y a qu'un gagnant en fin de $1^{\text{ère}}$ manche et s'il y a égalité c'est qu'il n'y a pas de gagnant.

$$\boxed{\text{On en conclut que la famille } \big(E_1, G_1, H_1\big) \text{ est un système complet d'événements.}}$$

- En particulier, on a donc :

$$\begin{array}{lrcl} & \mathbb{P}(E_1)+\mathbb{P}(G_1)+\mathbb{P}(H_1) & = & 1 \\ \text{donc} & \mathbb{P}(E_1)+2\,\mathbb{P}(G_1) & = & 1 \qquad \textit{(car } \mathbb{P}(G_1)=\mathbb{P}(H_1)\textit{)} \\ \text{ainsi} & \mathbb{P}(G_1) & = & \dfrac{1}{2}\,\big(1-\mathbb{P}(E_1)\big) \\ & & = & \dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{p}{1+q}\right) \\ & & = & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{(1+q)-p}{1+q}\right) \\ & & = & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{(1-p)+q}{1+q}\right) = \dfrac{1}{\cancel{2}}\left(\dfrac{\cancel{2}\,q}{1+q}\right) \end{array}$$

$$\boxed{\text{On en conclut, à l'aide de la question précédente : } \mathbb{P}(G_1) = \dfrac{q}{1+q}.}$$

Commentaire

- La manière de procéder dans cette question est particulièrement intéressante car elle permet d'obtenir le résultat sans avoir à effectuer de calculs.
- Il est aussi possible de démontrer ce résultat de manière plus calculatoire. On remarque tout d'abord :

$$G_1 = [X_1 < Y_1]$$

Comme $\big([X_1 = k]\big)_{k\in\mathbb{N}^*}$ est un système complet d'événements, on en déduit, par la formule des probabilités totales :

$$\begin{array}{rcll} \mathbb{P}\big([X_1<Y_1]\big) & = & \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}\big([X_1=k]\cap[X_1<Y_1]\big) & \\ & = & \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}\big([X_1=k]\cap[k<Y_1]\big) & \\ & = & \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}\big([X_1=k]\big)\times\mathbb{P}\big([k<Y_1]\big) & \textit{(car } X_1 \textit{ et } Y_1 \textit{ sont indépendantes)} \\ & = & \sum\limits_{k=1}^{+\infty} p\,(1-p)^{k-1}\times(1-p)^k & \textit{(}\mathbb{P}\big([Y_1>k]\big)=(1-p)^k \textit{ car } Y_1 \hookrightarrow \mathcal{G}(p)\textit{)} \\ & = & p\,(1-p)\sum\limits_{k=1}^{+\infty}(1-p)^{2k-2} & \\ & = & p\,q\sum\limits_{k=1}^{+\infty}\big((1-p)^2\big)^{k-1} & \\ & = & p\,q\sum\limits_{k=0}^{+\infty}\big(q^2\big)^{k} & \textit{(par décalage d'indice)} \\ & = & p\,q\,\dfrac{1}{1-q^2} & \\ & = & \cancel{p}\,q\,\dfrac{1}{\cancel{p}\,(1+q)} & \end{array}$$

□

2. Calcul de la probabilité de l'événement G.

a) Écrire, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, l'événement G_n à l'aide des événements E_k et de l'événement $[X_n < Y_n]$.

Démonstration.
Soit $n \geqslant 2$. Remarquons :

L'événement G_n est réalisé

$\Leftrightarrow$ Le joueur A gagne le jeu à la $n^{\text{ème}}$ manche

$\Leftrightarrow$ Il y a égalité à la fin de la $1^{\text{ère}}$ manche

ET il y a égalité à la fin de la $2^{\text{ème}}$ manche

$\vdots$ $\vdots$

ET il y a égalité à la fin de la $(n-1)^{\text{ème}}$ manche

ET le joueur A obtient Pile avant le joueur B lors de la $n^{\text{ème}}$ manche

$\Leftrightarrow$ L'événement E_1 est réalisé

ET l'événement E_2 est réalisé

$\vdots$ $\vdots$

ET l'événement E_{n-1} est réalisé

ET l'événement $[X_n < Y_n]$ est réalisé *(le rang d'apparition du 1^{er} Pile du joueur A est strictement inférieur au rang d'apparition du 1^{er} Pile du joueur B)*

$\Leftrightarrow$ L'événement $\bigcap\limits_{k=1}^{n-1} E_k \cap [X_n < Y_n]$ est réalisé

$$\boxed{\forall n \geqslant 2,\ G_n \ = \ \left(\bigcap_{k=1}^{n-1} E_k\right) \cap [X_n < Y_n]}$$

□

b) Pour tout entier k supérieur ou égal à 2, calculer $\mathbb{P}_{E_1\cap\cdots\cap E_{k-1}}(E_k)$ puis en déduire :

$$\forall n \geqslant 2, \quad \mathbb{P}(G_n) \ = \ \left(\frac{p}{1+q}\right)^{n-1} \ \frac{q}{1+q}$$

Démonstration.
Soit $k \geqslant 2$.

- Par des arguments similaires à la question ***1.c)***, on a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_{E_1\cap\cdots\cap E_{k-1}}(E_k) &= \mathbb{P}_{E_1\cap\cdots\cap E_{k-1}}\big([X_k = Y_k]\big) \\
&= \sum_{i=1}^{+\infty} \mathbb{P}_{E_1\cap\cdots\cap E_{k-1}}\big([X_k = i]\big) \times \mathbb{P}_{E_1\cap\cdots\cap E_{k-1}}\big([Y_k = i]\big) && \textit{(par la formule des probabilités totales)} \\
&= \sum_{i=1}^{+\infty} \mathbb{P}\big([X_1 = i]\big) \times \mathbb{P}\big([Y_1 = i]\big) && (*) \\
&= \mathbb{P}(E_1) && \textit{(d'après la question 1.c))}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall k \geqslant 2,\ \mathbb{P}_{E_1\cap\cdots\cap E_{k-1}}(E_k) = \mathbb{P}(E_1)}$$

- Pour valider le résultat précédent, il faut encore démontrer $(*)$:

$$\forall i \in \mathbb{N}^*, \ \mathbb{P}_{E_1 \cap \cdots \cap E_{k-1}}\big([X_k = i] \big) = \mathbb{P}\big([X_1 = i] \big)$$

Soit $i \in \mathbb{N}^*$.

× Si l'événement $E_1 \cap \cdots \cap E_{k-1}$ est réalisé, c'est qu'il y a égalité entre les joueurs A et B lors $(k-1)^{\text{ère}}$ manches du jeu.

× Dans ce cas, l'expérience consiste en une succession infine d'épreuves de Bernoulli indépendantes et de même paramètre de succès p (probabilité que le joueur A obtienne Pile).

× Dans ce cas, la v.a.r. X_k prend pour valeur le rang du premier succès de l'expérience.

On en conclut que la loi conditionnelle de X_k sachant l'événement $E_1 \cap \cdots \cap E_{k-1}$ est la loi géométrique de paramètre p ($\mathcal{G}(p)$).

En particulier, comme $X_1 \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$:

$$\boxed{\forall i \in \mathbb{N}^*, \ \mathbb{P}_{E_1 \cap \cdots \cap E_{k-1}}\big([X_k = i] \big) \ = \ p\,(1-p)^{i-1} \ = \ \mathbb{P}\big([X_1 = i] \big)}$$

Commentaire

- Cette première partie de la question semble assez ardue pour peu que l'on souhaite faire les choses correctement. Il est difficile de savoir quel était le niveau de détail attendu.
La formulation de la question :

« calculer $\mathbb{P}_{E_1 \cap \cdots \cap E_{k-1}}(E_k)$ »

laisse penser qu'il fallait détailler l'explication et ne pas se contenter de l'affirmation : $\mathbb{P}_{E_1 \cap \cdots \cap E_{k-1}}(E_k) = \mathbb{P}(E_1)$.

- Dans l'énoncé, il est précisé que les tirages sont indépendants. Pour autant, cela ne signifie pas que les manches le sont. Le résultat d'une manche dépend du résultat de la manche précédente pour la bonne raison qu'une manche n'est jouée que si toutes les précédentes ont abouti à une égalité. En particulier, les événements $E_1 \cap \cdots \cap E_{k-1}$ et E_k ne sont pas indépendants. On peut tout aussi bien démontrer que les événements de la famille $(E_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ ne sont pas indépendants. Par exemple, les événements E_1 et E_2 ne sont pas indépendants.

Les événements E_1 et E_2 sont indépendants

$$\begin{array}{rll}
\Leftrightarrow & \mathbb{P}\big(E_1 \cap E_2\big) \ = \ \mathbb{P}(E_1) \times \mathbb{P}(E_2) & \\
\Leftrightarrow & \mathbb{P}(E_2) \ = \ \mathbb{P}(E_1) \times \mathbb{P}(E_2) & \textit{(car } E_1 \cap E_2 = E_2 \textit{ puisque } E_2 \subset E_1 \ (*)\textit{)} \\
\Leftrightarrow & 1 \ = \ \mathbb{P}(E_1) \times 1 & \textit{(car } \mathbb{P}(E_2) \neq 0\textit{)} \\
\Leftrightarrow & 1 \ = \ \dfrac{p}{1+q} & \\
\Leftrightarrow & 1+q \ = \ p & \\
\Leftrightarrow & 1+(1-p) \ = \ p & \\
\Leftrightarrow & 2 \ = \ 2\,p & \\
\Leftrightarrow & 1 \ = \ p &
\end{array}$$

Comme $p \in \,]0,1[$, on en conclut bien que E_1 et E_2 ne sont pas indépendants.

$(*)$ Démontrons enfin $E_2 \subset E_1$.
Supposons E_2 réalisé. Il y a donc égalité lors de la $2^{\text{ème}}$ manche. En particulier, la $2^{\text{ème}}$ manche est jouée. Cela démontre qu'il y a eu égalité lors de la manche précédente.
Ainsi, l'événement E_1 est réalisé.

- Soit $n \geqslant 2$. D'après ce qui précède :

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(G_n) \\
= \ & \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n-1} E_k \cap [X_n < Y_n]\right) \\
= \ & \mathbb{P}(E_1) \times \mathbb{P}_{E_1}(E_2) \times \ldots \times \mathbb{P}_{E_1 \cap \cdots \cap E_{n-2}}(E_{n-1}) \times \mathbb{P}_{E_1 \cap \cdots \cap E_{n-1}}\big([X_n < Y_n]\big) && \textit{(par la formule des probabilités composées)} \\
= \ & \mathbb{P}(E_1) \times \mathbb{P}(E_1) \times \ldots \times \mathbb{P}(E_1) \times \mathbb{P}_{E_1 \cap \cdots \cap E_{n-1}}\big([X_n < Y_n]\big) && \textit{(d'après le point précédent)} \\
= \ & \Big(\mathbb{P}(E_1)\Big)^{n-1} \times \mathbb{P}_{E_1 \cap \cdots \cap E_{n-1}}\big([X_n < Y_n]\big)
\end{aligned}$$

- Comme $\big([X_n = i]\big)_{i \in \mathbb{N}^*}$ est un système complet d'événements, on en déduit, par la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}_{E_1 \cap \cdots \cap E_{n-1}}\big([X_n < Y_n]\big) \\
= \ & \sum_{i=1}^{+\infty} \mathbb{P}_{E_1 \cap \cdots \cap E_{n-1}}\big([X_n = i] \cap [X_n < Y_n]\big) \\
= \ & \sum_{i=1}^{+\infty} \mathbb{P}_{E_1 \cap \cdots \cap E_{n-1}}\big([X_n = i] \cap [i < Y_n]\big) \\
= \ & \sum_{i=1}^{+\infty} \mathbb{P}_{E_1 \cap \cdots \cap E_{n-1}}\big([X_n = i]\big) \times \mathbb{P}_{E_1 \cap \cdots \cap E_{n-1}}\big([i < Y_n]\big) && \textit{(car } X_n \textit{ et } Y_n \textit{ sont indépendantes)} \\
= \ & \sum_{i=1}^{+\infty} \mathbb{P}\big([X_1 = i]\big) \times \mathbb{P}\big([i < Y_1]\big) && \textit{(d'après le point } (*) \textit{ précédent)} \\
= \ & \sum_{i=1}^{+\infty} \mathbb{P}\big([X_1 = i] \cap [i < Y_1]\big) \\
= \ & \sum_{i=1}^{+\infty} \mathbb{P}\big([X_1 = i] \cap [X_1 < Y_1]\big) \\
= \ & \mathbb{P}\big([X_1 < Y_1]\big) = \mathbb{P}(G_1) && \textit{(par la formule des probabilités totales)}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } \forall n \geqslant 2,\ \mathbb{P}_{E_1 \cap \cdots \cap E_{n-1}}\big([X_n < Y_n]\big) = \mathbb{P}(G_1).}$$

- On déduit de ce qui précède que pour tout $n \geqslant 2$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(G_n) &= \Big(\mathbb{P}(E_1)\Big)^{n-1} \times \mathbb{P}_{E_1 \cap \cdots \cap E_{n-1}}\big([X_n < Y_n]\big) \\
&= \left(\frac{p}{1+q}\right)^{n-1} \frac{q}{1+q}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall n \geqslant 2,\ \mathbb{P}(G_n) = \left(\frac{p}{1+q}\right)^{n-1} \frac{q}{1+q}}$$

$\square$

c) Vérifier que le résultat précédent reste valable pour $n = 1$.

Démonstration.

- D'une part : $\mathbb{P}(G_1) = \dfrac{q}{1+q}$ d'après la question ***1.d)***.
- D'autre part : $\left(\dfrac{p}{1+q}\right)^{1-1} \dfrac{q}{1+q} = \left(\dfrac{p}{1+q}\right)^{0} \dfrac{q}{1+q} = \dfrac{q}{1+q}$.

$$\boxed{\text{Le résultat précédent est valable pour } n = 1.}$$

□

d) Exprimer G en fonction des G_n puis conclure, après calcul : $\mathbb{P}(G) = \dfrac{1}{2}$.

Démonstration.

- Tout d'abord :

$$\begin{array}{rll} & \multicolumn{2}{l}{\text{L'événement } G \text{ est réalisé}} \\ \Leftrightarrow & & \text{Le joueur } A \text{ gagne lors de la } 1^{\text{ère}} \text{ manche} \\ & \texttt{OU} & \text{le joueur } A \text{ gagne lors de la } 2^{\text{ème}} \text{ manche} \\ & \vdots & \qquad\qquad\qquad \vdots \\ & \texttt{OU} & \text{le joueur } A \text{ gagne lors de la } k^{\text{ème}} \text{ manche} \\ & \vdots & \qquad\qquad\qquad \vdots \\ \Leftrightarrow & & \text{L'événement } G_1 \text{ est réalisé} \\ & \texttt{OU} & \text{l'événement } G_2 \text{ est réalisé} \\ & \vdots & \qquad\qquad\qquad \vdots \\ & \texttt{OU} & \text{l'événement } G_k \text{ est réalisé} \\ & \vdots & \qquad\qquad\qquad \vdots \\ \Leftrightarrow & \multicolumn{2}{l}{\text{L'événement } \bigcup\limits_{k=1}^{+\infty} G_k \text{ est réalisé}} \end{array}$$

$$\boxed{G = \bigcup_{k=1}^{+\infty} G_k}$$

- Remarquons que pour tout couple $(i, j) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ tel que $i \neq j$, on a :

$$G_i \cap G_j = \varnothing$$

En effet, le joueur A ne peut gagner la partie lors de deux manches différentes (d'ailleurs la partie s'arrête lors de la victoire d'un joueur).

- Ensuite :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(G) &= \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{+\infty} G_k\right) \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(G_k) && \textit{(car } (G_k)_{k\in\mathbb{N}^*} \textit{ est une famille d'événements 2 à 2 incompatibles)} \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{p}{1+q}\right)^{k-1} \frac{q}{1+q} \\
&= \frac{q}{1+q} \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{p}{1+q}\right)^{k} && \textit{(par décalage d'indice)} \\
&= \frac{q}{1+q} \frac{1}{1-\left(\frac{p}{1+q}\right)} && \textit{(en reconnaissant la somme d'une série de raison } \tfrac{p}{1+q} \in \,]0,1[\textit{)} \\
&= \frac{q}{1+q} \frac{1}{\frac{1+q-p}{1+q}} \\
&= \frac{q}{\cancel{1+q}} \frac{\cancel{1+q}}{(1-p)+q} \\
&= \frac{q}{q+q}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On a bien : } \mathbb{P}(G) = \frac{q}{2\,q} = \frac{1}{2}.}$$

□

e) Expliquer comment obtenir la probabilité de l'événement H : « B gagne à ce jeu » et en déduire que le ce jeu a presque sûrement une fin, c'est à dire que $\mathbb{P}(E) = 0$.

Démonstration.
On procède comme en question ***1.d)***.

- Les rôles des joueurs A et B sont parfaitement symétriques. Ainsi, le joueurs A et B ont même probabilité de gagner le jeu.

$$\boxed{\text{On en déduit que les événements } G \text{ et } H \text{ sont équiprobables.}}$$

Commentaire

Ce qui est accepté en question ***1.d)*** doit l'être aussi ici. Cependant, la formulation de la question est ici bien différente et il est donc possible qu'une autre réponse soit attendue. Afin de déterminer $\mathbb{P}(H)$, il est aussi possible de suivre la démarche des questions ***2.a)b)c)d)***. Plus précisément, on démontre :

× $\forall n \geqslant 2,\ H_n = \left(\bigcap_{k=1}^{n-1} E_k\right) \cap [X_n > Y_n]$,

× $\forall n \geqslant 2,\ \mathbb{P}_{E_1\cap\cdots\cap E_{n-1}}\big([X_n > Y_n]\big) = \mathbb{P}(H_1)$,

× $\forall n \geqslant 2,\ \mathbb{P}(H_n) = \left(\frac{p}{1+q}\right)^{n-1} \frac{q}{1+q}$,

× $H = \bigcup_{k=1}^{+\infty} H_k$,

× $\mathbb{P}(H) = \frac{1}{2}$.

- Lors de la partie, seules trois situations sont possibles :
  - × le jeu ne prend jamais fin car il y a égalité à chaque manche ou car une manche dure éternellement. Autrement dit, l'événement E est réalisé.
  - × le jeu a pris fin et le joueur A a remporté la partie. Autrement dit, l'événement G est réalisé.
  - × le jeu a pris fin et le joueur B a remporté la partie. Autrement dit, l'événement H est réalisé.

  Ces trois événements sont de plus 2 à 2 incompatibles car s'il y a égalité il n'y a pas de gagnant et s'il y a un gagnant en fin de partie, il ne peut y en avoir qu'un seul.

  On en conclut que la famille (E, G, H) est un système complet d'événements.

- En particulier, on a donc :

$$\mathbb{P}(E) + \mathbb{P}(G) + \mathbb{P}(H) = 1$$

donc $$\mathbb{P}(E) + 2\,\mathbb{P}(G) = 1 \qquad \textit{(car } \mathbb{P}(G) = \mathbb{P}(H)\textit{)}$$

ainsi $$\mathbb{P}(E) = 1 - 2\,\mathbb{P}(G) = 1 - 2\,\frac{1}{2} = 0$$

On a bien : $\mathbb{P}(E) = 0$. □

Partie 2 : un autre jeu

En parallèle du jeu précédent, A parie sur le fait que la manche gagnée par le vainqueur le sera par un lancer d'écart et B parie le contraire.

3. a) À l'aide du système complet d'événements $\big([X_1 = i]\big)_{i\in\mathbb{N}^*}$, montrer : $\mathbb{P}\big([Y_1 = X_1 + 1]\big) = \dfrac{pq}{1+q}$.

Démonstration.
Comme $\big([X_1 = i]\big)_{i\in\mathbb{N}^*}$ est un système complet d'événements, on en déduit, par la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\big([Y_1 = X_1 + 1]\big) &= \sum_{i=1}^{+\infty} \mathbb{P}\big([X_1 = i] \cap [Y_1 = X_1 + 1]\big) \\
&= \sum_{i=1}^{+\infty} \mathbb{P}\big([X_1 = i] \cap [Y_1 = i + 1]\big) \\
&= \sum_{i=1}^{+\infty} \mathbb{P}\big([X_1 = i]\big) \times \mathbb{P}\big([Y_1 = i + 1]\big) && \textit{(car } X_1 \textit{ et } Y_1 \textit{ sont indépendantes)} \\
&= \sum_{i=1}^{+\infty} p\,(1-p)^{i-1} \times p\,(1-p)^i \\
&= p^2\,(1-p) \sum_{i=1}^{+\infty} (1-p)^{2i-2} \\
&= p^2\,q \sum_{i=1}^{+\infty} \big(q^2\big)^{i-1} && \textit{(car } q = 1-p\textit{)} \\
&= p^2\,q \sum_{i=0}^{+\infty} \big(q^2\big)^{i} && \textit{(par décalage d'indice)} \\
&= p^2\,q\,\frac{1}{1-q^2} && \textit{(en reconnaissant la somme d'une série géométrique de raison } q^2 \in \,]0,1[\textit{)}
\end{aligned}$$

Finalement : $\mathbb{P}\big([Y_1 = X_1 + 1]\big) = p^{\cancel{2}}\,q\,\dfrac{1}{\cancel{(1-q)}(1+q)} = \dfrac{pq}{1+q}$. □

b) En déduire la probabilité u que l'un des deux joueurs gagne à la première manche par un lancer d'écart.

Démonstration.

- Notons D l'événément : « l'un des deux joueurs gagne à la première manche par un lancer d'écart ». On a alors :

$$\begin{array}{cl} & \text{L'événement } D \text{ est réalisé} \\ \Leftrightarrow & \text{L'un des deux joueurs gagne à la première manche par un lancer d'écart} \\ \Leftrightarrow & \begin{array}{ll} & \text{Le joueur } A \text{ gagne par un lancer d'écart} \\ \texttt{OU} & \text{Le joueur } B \text{ gagne par un lancer d'écart} \end{array} \\ \Leftrightarrow & \begin{array}{ll} & \text{Le joueur } A \text{ obtient Pile un lancer avant le joueur } B \\ \texttt{OU} & \text{le joueur } B \text{ obtient Pile un lancer avant le joueur } A \end{array} \\ \Leftrightarrow & \begin{array}{ll} & \text{L'événement } [Y_1 = X_1 + 1] \text{ est réalisé} \\ \texttt{OU} & \text{l'événement } [X_1 = Y_1 + 1] \text{ est réalisé} \end{array} \\ \Leftrightarrow & \text{L'événement } [Y_1 = X_1 + 1] \cup [X_1 = Y_1 + 1] \text{ est réalisé} \end{array}$$

$$\boxed{\text{On en déduit : } D = [Y_1 = X_1 + 1] \cup [X_1 = Y_1 + 1].}$$

- Par ailleurs, comme $\big([Y_1 = i]\big)_{i \in \mathbb{N}^*}$ est un système complet d'événements, on en déduit, par la formule des probabilités totales :

$$\begin{array}{rcll} \mathbb{P}\big([X_1 = Y_1 + 1]\big) & = & \sum\limits_{i=1}^{+\infty} \mathbb{P}\big([Y_1 = i] \cap [X_1 = Y_1 + 1]\big) & \\ & = & \sum\limits_{i=1}^{+\infty} \mathbb{P}\big([Y_1 = i] \cap [X_1 = i + 1]\big) & \\ & = & \sum\limits_{i=1}^{+\infty} \mathbb{P}\big([Y_1 = i]\big) \times \mathbb{P}\big([X_1 = i + 1]\big) & \textit{(car } Y_1 \textit{ et } X_1 \textit{ sont indépendantes)} \\ & = & \sum\limits_{i=1}^{+\infty} p\,(1-p)^{i-1} \times p\,(1-p)^i & \\ & = & \mathbb{P}\big([Y_1 = X_1 + 1]\big) & \textit{(en reconnaissant le calcul de la question précédente)} \end{array}$$

$$\boxed{\mathbb{P}\big([X_1 = Y_1 + 1]\big) \ = \ \mathbb{P}\big([Y_1 = X_1 + 1]\big)}$$

- Finalement :

$$\begin{array}{rcll} \mathbb{P}(D) & = & \mathbb{P}\big([Y_1 = X_1 + 1] \cup [X_1 = Y_1 + 1]\big) & \\ & = & \mathbb{P}\big([Y_1 - X_1 = 1] \cup [Y_1 - X_1 = -1]\big) & \\ & = & \mathbb{P}\big([Y_1 - X_1 = 1]\big) + \mathbb{P}\big([Y_1 - X_1 = -1]\big) & \textit{(car les événements } [Y_1 - X_1 = 1] \textit{ et } [Y_1 - X_1 = -1] \textit{ sont incompatibles)} \\ & = & \mathbb{P}\big([Y_1 = X_1 + 1]\big) + \mathbb{P}\big([X_1 = Y_1 + 1]\big) & \\ & = & 2\,\mathbb{P}\big([Y_1 = X_1 + 1]\big) & \\ & = & 2\,\dfrac{pq}{1+q} & \end{array}$$

$$\boxed{u = \mathbb{P}(D) = 2\,\dfrac{pq}{1+q}}$$

Commentaire

- En question ***3.a)***, il est demandé de déterminer $\mathbb{P}\big([Y_1 = X_1 + 1]\big)$. Or :

$$[Y_1 = X_1 + 1] \ = \ [Y_1 - X_1 = 1]$$

Présenté ainsi, on comprend que cette question n'est rien d'autre qu'une illustration de la technique premettant de calculer la loi d'une somme (en l'occurrence différence) de v.a.r. .

- En question ***4.a)***, il est demandé de déterminer $\mathbb{P}(D)$. Or :

$$D \ = \ [Y_1 - X_1 = 1] \cup [Y_1 - X_1 = -1] \ = \ [\,|Y_1 - X_1| \, = 1]$$

Présenté ainsi, on comprend que cette question n'est rien d'autre qu'une illustration de la technique premettant de calculer la loi d'une somme (en l'occurrence différence) de v.a.r. .

□

4. a) Utiliser les événements E_k pour écrire l'événement K_n « l'un des deux joueurs gagne à la $n^{\text{ème}}$ manche par un lancer d'écart », ceci pour tout n de $\mathbb{N}^*$.

Démonstration.

- Tout d'abord, d'après la question précédente : $K_1 = [\,|Y_1 - X_1| \, = 1]$.
- Soit $n \geqslant 2$. Remarquons :

L'événement K_n est réalisé

$\Leftrightarrow$ L'un des deux joueurs gagne à la $n^{\text{ème}}$ manche par un lancer d'écart

$\Leftrightarrow$ Il y a égalité à la fin de la $1^{\text{ère}}$ manche
ET il y a égalité à la fin de la $2^{\text{ème}}$ manche
$\vdots$ $\vdots$
ET il y a égalité à la fin de la $(n-1)^{\text{ème}}$ manche
ET l'un des deux joueurs obtient Pile un lancer avant l'autre lors de la $n^{\text{ème}}$ manche

$\Leftrightarrow$ L'événement E_1 est réalisé
ET l'événement E_2 est réalisé
$\vdots$ $\vdots$
ET l'événement E_{n-1} est réalisé
ET l'événement $[\,|Y_n - X_n| \, = 1]$ est réalisé *(les rangs d'apparitions du 1^{er} Pile des deux joueurs diffèrent de 1)*

$\Leftrightarrow$ L'événement $\bigcap\limits_{k=1}^{n-1} E_k \cap [\,|Y_n - X_n| \, = 1]$ est réalisé

$$\boxed{\forall n \geqslant 2, \ K_n \ = \ \bigcap_{k=1}^{n-1} E_k \cap [\,|Y_n - X_n| \, = 1]}$$

□

b) En déduire, pour tout entier naturel n non nul, la valeur de $\mathbb{P}(K_n)$.

Démonstration.

- Tout d'abord, d'après la question ***3.b)*** : $\mathbb{P}(K_1) = u = 2\,\dfrac{pq}{1+q}$.
- Soit $n \geqslant 2$.

$$\begin{array}{rcll}
\mathbb{P}(K_n) & = & \mathbb{P}\left(\bigcap\limits_{k=1}^{n-1} E_k \cap [\,|Y_n - X_n| = 1]\right) & \\
& = & \mathbb{P}\left(\bigcap\limits_{k=1}^{n-1} E_k\right) \mathbb{P}_{E_1\cap\ldots\cap E_{n-1}}\big([\,|Y_n - X_n| = 1]\big) & \textit{(par la formule des probabilités composées)} \\
& = & \left(\dfrac{p}{1+q}\right)^{n-1} \mathbb{P}_{E_1\cap\ldots\cap E_{n-1}}\big([\,|Y_n - X_n| = 1]\big) & \textit{(d'après la question } \textbf{\textit{2.b}}\textit{)} \\
& = & \left(\dfrac{p}{1+q}\right)^{n-1} \mathbb{P}\big([\,|Y_1 - X_1| = 1]\big) & \textit{(en mettant en place un raisonnement similaire à celui de la question } \textbf{\textit{2.b)}}\textit{)} \\
& = & 2\,p\left(\dfrac{p}{1+q}\right)^{n-1} \dfrac{q}{1+q} & \textit{(d'après la question } \textbf{\textit{3.d)}}\textit{)} \\
& = & 2\,p\,\mathbb{P}(G_n) &
\end{array}$$

$$\boxed{\text{En remarquant que cette formule est valide au rang 1, on conclut : } \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}(K_n) = 2\,p\,\mathbb{P}(G_n).}$$

□

5. Donner finalement la probabilité de l'événement K : « A gagne ce pari ».

Démonstration.

- Tout d'abord, par des arguments similaires à la question ***2.d)*** :

$$K = \bigcup_{j=1}^{+\infty} K_j$$

- On en déduit :

$$\begin{array}{rcll}
\mathbb{P}(K) & = & \mathbb{P}\left(\bigcup\limits_{j=1}^{+\infty} K_j\right) & \\
& = & \sum\limits_{j=1}^{+\infty} \mathbb{P}(K_j) & \textit{(car } (K_j)_{j\in\mathbb{N}^*} \textit{ est une famille d'événements 2 à 2 incompatibles)} \\
& = & 2\,p \sum\limits_{j=1}^{+\infty} \mathbb{P}(G_j) & \textit{(d'après la question précédente)} \\
& = & 2\,p\,\mathbb{P}(G) &
\end{array}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } \mathbb{P}(K) = 2\,p\mathbb{P}(G) = 2\,p\frac{1}{2} = p.}$$

□

Partie 3 : informatique

On rappelle que la commande `grand(1, 1, 'geom', p)` permet à **Scilab** de simuler une variable aléatoire suivant la loi géométrique de paramètre p.

6. Compléter le script **Python** suivant pour qu'il simule l'expérience décrite dans la partie 1 et affiche le nom du vainqueur du premier jeu ainsi que le numéro de la manche à laquelle il a gagné.

```
p = float(input('entrez une valeur pour p :'))
c = 1
X = rd.geometric(p)
Y = rd.geometric(p)
while X == Y :
    X = ____________________
    Y = ____________________
    c = _______
if X < Y :
    ___________________________________
else :
    ___________________________________
print(c)
```

Démonstration.

```
p = float(input('entrez une valeur pour p :'))
c = 1
X = rd.geometric(p)
Y = rd.geometric(p)
while X == Y :
    X = rd.geometric(p)
    Y = rd.geometric(p)
    c = c+1
if X < Y :
    print('Le vainqueur est A')
else :
    print('Le vainqueur est B')
print(c)
```

□

7. Compléter la commande suivante afin qu'une fois ajoutée au script précédent elle permette de simuler le deuxième jeu et d'en donner le nom du vainqueur.

```
if _______________________________ :
    print('A gagne le deuxième jeu')
else :
    _________________________________________
```

Démonstration.

```
if X == Y + 1 or Y == X + 1 :
    print('A gagne le deuxième jeu')
else :
    print('B gagne le deuxième jeu')
```

□

EDHEC 2015 - intégration, séries, couple de v.a.r. discrètes, loi géométrique, loi uniforme discrète, expérience en deux étapes

Partie I

Dans cette partie, x désigne un réel de $[0,1[$.

1. a) Montrer : $\forall m \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant \displaystyle\int_0^x \frac{t^m}{1-t^2}\,dt \leqslant \frac{1}{1-x^2} \times \frac{1}{m+1}$.

Démonstration.
Soit $m \in \mathbb{N}$.

- Remarquons tout d'abord que la fonction $f_m : t \mapsto \dfrac{t^m}{1-t^2}$ est continue sur le **segment** $[0,x]$.
  Ainsi, l'intégrale $\displaystyle\int_0^x \frac{t^m}{1-t^2}\,dt$ est bien définie.
- Soit $t \in [0,x[$.

$$\begin{array}{llcccl}
 & & 0 \leqslant & t & \leqslant x & \\
\text{donc} & & 0 \leqslant & t^2 & \leqslant x^2 & \textit{(par croissance de la fonction } x \mapsto x^2 \textit{ sur } [0,+\infty[\textit{)} \\
\text{ainsi} & & 0 \geqslant & -t^2 & \geqslant -x^2 & \\
\text{d'où} & & 1 \geqslant & 1-t^2 & \geqslant 1-x^2 & \\
\text{puis} & & 1 \leqslant & \dfrac{1}{1-t^2} & \leqslant \dfrac{1}{1-x^2} & \textit{(par décroissance de la fonction inverse sur }]0,+\infty[\textit{)} \\
\text{enfin} & 0 \leqslant t^m & \leqslant & \dfrac{t^m}{1-t^2} & \leqslant \dfrac{t^m}{1-x^2} & \textit{(car } t^m \geqslant 0\textit{)}
\end{array}$$

Par croissance de l'intégrale, les bornes étant dans l'ordre croissant $(0 \leqslant x)$:

$$\underbrace{\int_0^x 0\,dt}_{=0} \leqslant \int_0^x \frac{t^m}{1-t^2}\,dt \leqslant \int_0^x \frac{t^m}{1-x^2}\,dt$$

Enfin :

$$\begin{aligned}
\int_0^x \frac{t^m}{1-x^2}\,dt &= \frac{1}{1-x^2}\int_0^x t^m\,dt \\
&= \frac{1}{1-x^2}\,\frac{1}{m+1}\left[\ t^{m+1}\ \right]_0^x \\
&= \frac{1}{1-x^2}\,\frac{1}{m+1}\left(x^{m+1} - \cancel{0^{m+1}}\right) \\
&\leqslant \frac{1}{1-x^2}\,\frac{1}{m+1} \qquad \textit{(car } x^{m+1} \leqslant 1 \textit{ et } \frac{1}{1-x^2}\,\frac{1}{m+1} \geqslant 0\textit{)}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On obtient bien : } \forall m \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant \int_0^x \frac{t^m}{1-t^2}\,dt \leqslant \frac{1}{1-x^2} \times \frac{1}{m+1}.}$$

□

b) En déduire que : $\displaystyle\lim_{m\to+\infty} \int_0^x \frac{t^m}{1-t^2} = 0$.

Démonstration.
D'après la question précédente :

$$\forall m \in \mathbb{N}, 0 \ \leqslant \ \int_0^x \frac{t^m}{1-t^2}\, dt \ \leqslant \ \frac{1}{1-x^2} \times \frac{1}{m+1}$$

Or :

× $\displaystyle\lim_{m\to+\infty} 0 = 0$,

× $\displaystyle\lim_{m\to+\infty} \frac{1}{1-x^2} \times \frac{1}{m+1} = 0$.

$$\boxed{\text{Ainsi, par théorème d'encadrement : } \lim_{m\to+\infty} \int_0^x \frac{t^m}{1-t^2}\, dt = 0.}$$

Commentaire

Il n'y a pas, dans le programme ECG, de théorème permettant de passer à la limite sous le symbole d'intégration. Toute tentative de ce genre révèle donc une mauvaise compréhension des objets étudiés.

□

2. a) Pour tout réel t de $[0,1[$ et pour tout k élément de $\mathbb{N}^*$, calculer $\displaystyle\sum_{j=0}^{k-1} t^{2j}$.

Démonstration.
Soit $t \in [0,1[$ et soit $k \in \mathbb{N}^*$.

$$\sum_{j=0}^{k-1} t^{2j} \quad = \quad \sum_{j=0}^{k-1} \left(t^2\right)^j \quad = \quad \frac{1-\left(t^2\right)^k}{1-t^2} \qquad \textit{(car } t^2 \neq 1\textit{)}$$

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \forall t \in [0,1[,\ \sum_{j=0}^{k-1} t^{2j} = \frac{1-t^{2k}}{1-t^2}}$$

□

b) En déduire : $\displaystyle\sum_{j=0}^{k-1} \frac{x^{2j+1}}{2j+1} = \int_0^x \frac{1}{1-t^2}\, dt - \int_0^x \frac{t^{2k}}{1-t^2}\, dt.$

Démonstration.
Soit $k \in \mathbb{N}^*$. D'après la question précédente :

$$\forall t \in [0,1[,\ \sum_{j=0}^{k-1} t^{2j} = \frac{1-t^{2k}}{1-t^2}$$

- On en déduit :

$$\begin{aligned} \int_0^x \left(\sum_{j=0}^{k-1} t^{2j}\right) dt \quad &= \quad \int_0^x \frac{1-t^{2k}}{1-t^2}\, dt \\ &= \quad \int_0^x \frac{1}{1-t^2}\, dt - \int_0^x \frac{t^{2k}}{1-t^2}\, dt \qquad \textit{(par linéarité de l'intégrale sur un segment)} \end{aligned}$$

- Enfin :

$$\begin{aligned}
\int_0^x \left(\sum_{j=0}^{k-1} t^{2j}\right) dt &= \sum_{j=0}^{k-1} \int_0^x t^{2j}\ dt && \textit{(par linéarité de l'intégrale sur un segment)} \\
&= \sum_{j=0}^{k-1} \frac{1}{2j+1} \left[\ t^{2j+1}\ \right]_0^x \\
&= \sum_{j=0}^{k-1} \frac{1}{2j+1} \left(x^{2j+1} - \cancel{0^{2j+1}}\right)
\end{aligned}$$

> En combinant ces deux résultats, on obtient : $\displaystyle\sum_{j=0}^{k-1} \frac{x^{2j+1}}{2j+1} = \int_0^x \frac{1}{1-t^2}\ dt - \int_0^x \frac{t^{2k}}{1-t^2}\ dt$. □

c) Utiliser la question ***1.*** pour montrer que la série de terme général $\dfrac{x^{2j+1}}{2j+1}$ converge et exprimer $\displaystyle\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{x^{2j+1}}{2j+1}$ sous forme d'une intégrale que l'on ne cherchera pas à calculer.

Démonstration.
Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

- D'après la question ***1.*** :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad 0 \leqslant \int_0^x \frac{t^{2k}}{1-t^2}\ dt \leqslant \frac{1}{1-x^2} \times \frac{1}{2k+1}$$

> Ainsi, par théorème d'encadrement : $\displaystyle\lim_{k\to+\infty} \int_0^x \frac{t^{2k}}{1-t^2}\ dt = 0$.

Commentaire

- Il était possible de rédiger autrement.
En question ***1.***, on a démontré que l'intégrale $\displaystyle\int_0^x \frac{t^m}{1-t^2}\ dt$ est bien définie. On peut donc noter u_m la quantité définie par cette intégrale. On démontre en ***1.a)*** que la suite (u_m) est convergente et de limite nulle. Il en est de même de toutes ses sous-suites. En particulier : $\displaystyle\lim_{m\to+\infty} u_{2m} = 0$. Autrement dit :

$$\lim_{m\to+\infty} \int_0^x \frac{t^{2m}}{1-t^2}\ dt = 0$$

- On détaille dans le point précédent avec précision les mécanismes permettant d'obtenir la limite. Mais les arguments de composition de limite ou de changement de variable (on pose $m = 2k$) sont tout autant acceptables.

- Ainsi, d'après la question précédente, $\displaystyle\sum_{j=0}^{k-1} \frac{x^{2j+1}}{2j+1}$ apparaît comme la somme de deux quantités admettant une limite finie lorsque k tend vers $+\infty$.

On en déduit que la série $\sum \dfrac{x^{2j+1}}{2j+1}$ est convergente, de somme :

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{x^{2j+1}}{2j+1} &= \lim_{k\to+\infty} \left(\int_0^x \frac{1}{1-t^2}\,dt - \int_0^x \frac{t^{2k}}{1-t^2}\,dt\right) \\ &= \lim_{k\to+\infty} \int_0^x \frac{1}{1-t^2}\,dt - \lim_{k\to+\infty} \int_0^x \frac{t^{2k}}{1-t^2}\,dt \\ &= \int_0^x \frac{1}{1-t^2}\,dt\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{La série } \sum \frac{x^{2j+1}}{2j+1} \text{ est convergente, de somme : } \int_0^x \frac{1}{1-t^2}\,dt.}$$

□

d) Conclure : $\forall k \in \mathbb{N},\ \displaystyle\sum_{j=k}^{+\infty} \frac{x^{2j+1}}{2j+1} = \int_0^x \frac{t^{2k}}{1-t^2}\,dt.$

Démonstration.
Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

- La série $\sum \dfrac{x^{2j+1}}{2j+1}$ est convergente. On a donc :

$$\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{x^{2j+1}}{2j+1} = \sum_{j=0}^{k-1} \frac{x^{2j+1}}{2j+1} + \sum_{j=k}^{+\infty} \frac{x^{2j+1}}{2j+1}$$

- On en déduit :

$$\begin{aligned}\sum_{j=k}^{+\infty} \frac{x^{2j+1}}{2j+1} &= \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{x^{2j+1}}{2j+1} - \sum_{j=0}^{k-1} \frac{x^{2j+1}}{2j+1} \\ &= \cancel{\int_0^x \frac{1}{1-t^2}}\,dt - \left(\cancel{\int_0^x \frac{1}{1-t^2}}\,dt - \int_0^x \frac{t^{2k}}{1-t^2}\,dt\right) \qquad \textit{(d'après la question } \textbf{\textit{2.c)}} \textit{ et la question } \textbf{\textit{2.b)}}\textit{)}\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{j=k}^{+\infty} \frac{x^{2j+1}}{2j+1} = \int_0^x \frac{t^{2k}}{1-t^2}\,dt}$$

- Il reste à démontrer cette égalité lorsque $k = 0$.
  D'après la question ***2.c)***, on a :

$$\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{x^{2j+1}}{2j+1} = \int_0^x \frac{1}{1-t^2}\,dt = \int_0^x \frac{t^{2\times 0}}{1-t^2}\,dt$$

  On en déduit que l'égalité est aussi vérifiée lorsque $k = 0$.

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N},\ \sum_{j=k}^{+\infty} \frac{x^{2j+1}}{2j+1} = \int_0^x \frac{t^{2k}}{1-t^2}\,dt}$$

□

On admet sans démonstration que l'on a aussi : $\forall k \in \mathbb{N},\ \displaystyle\sum_{j=k+1}^{+\infty} \frac{x^{2j}}{2j} = \int_0^x \frac{t^{2k+1}}{1-t^2}\,dt.$

Partie II

Un joueur réalise une suite de lancers indépendants d'une pièce.
Cette pièce donne pile avec la probabilité p $(0 < p < 1)$ et face avec la probabilité $q = 1 - p$.
On note N la variable aléatoire égale au rang d'apparition du premier pile.
Si N prend la valeur n, le joueur place n boules numérotées de 1 à n dans une urne, puis il extrait une boule au hasard de cette urne. On dit que le joueur a gagné si le numéro porté par la boule tirée est impair et on désigne par A l'événement : « le joueur gagne ».
On appelle X la variable aléatoire égale au numéro porté par la boule extraite de l'urne.

3. Reconnaître la loi de N.

Démonstration.

- L'expérience consiste en la succession d'une infinité d'épreuves de Bernoulli (dont le succès est l'obtention de pile) indépendantes et de même paramètre p (probabilité d'obtention de pile).
- La v.a.r. N est le rang d'apparition du premier succès de cette expérience.

$$\boxed{\text{On en déduit : } N \hookrightarrow \mathcal{G}(p).}$$

$\square$

4. ***a)*** Montrer que, si m est un entier naturel, la commande `2 * np.floor(m/2)` renvoie la valeur m si et seulement si m est pair.

Démonstration.

- Si `x` est une variable, l'instruction `np.floor(x)` permet d'obtenir la partie entière par défaut de `x`.
- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\lfloor x \rfloor = x \quad \Leftrightarrow \quad x \text{ est un entier}$$

On a alors, pour tout $m \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} 2\left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor = m \quad & \Leftrightarrow \quad \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor = \frac{m}{2} \\ & \Leftrightarrow \quad \frac{m}{2} \text{ est un entier} \\ & \Leftrightarrow \quad \exists n \in \mathbb{N},\ \frac{m}{2} = n \\ & \Leftrightarrow \quad \exists n \in \mathbb{N},\ m = 2 \times n \\ & \Leftrightarrow \quad m \text{ est pair} \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, } \texttt{2 * np.floor(m/2)} \text{ renvoie la valeur } m \text{ si et seulement si } m \text{ est pair.}}$$

$\square$

b) Compléter les commandes **Python** suivantes pour qu'elles simulent N et X puis renvoient l'un des deux messages « le joueur a gagné » ou « le joueur a perdu ».

```
p = float(input('Donner la valeur de p :'))
N = rd.geometric(_____) # simulation d’une loi géométrique
X = rd.randint(_____,_______) # simulation d’une loi uniforme discrète
if _________________________:
    print('______________________')
else:
    print('______________________')
```

Démonstration.
On rappelle que la v.a.r. N est égale au rang du premier pile et que X est la v.a.r. prenant la valeur du numéro de la boule tirée. Enfin, rappelons que la partie est gagnée si ce numéro est impair. Afin de simuler N, X et le résultat de l'expérience, on procède comme suit.

- **Début du programme** : initialisation des variables.
  × La valeur de la variable `p` est choisie par l'utilisateur à l'aide de la fonction `input`.

```
1 p = float(input('Donner la valeur de p :'))
```

  × En ligne 2, on simule la v.a.r. N à l'aide de la fonction `rd.geometric`. Comme $N \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$, il faut écrire :

```
2 N = rd.geometric(p) # simulation d'une loi géométrique
```

  × En ligne 3, on simule la v.a.r. X à l'aide de la fonction `rd.randint`. En ligne 2, le nombre n de boules placées dans l'urne est stockée dans la variable `N`. Une fois connu ce nombre n, la v.a.r. X suit une loi uniforme sur $[\![1,n]\!]$ (plus précisément, il s'agit d'une loi conditionnelle, voir le commentaire ci-dessous). Pour simuler cette v.a.r. , il faut donc écrire :

```
3 X = rd.randint(1,N+1) # simulation d'une loi uniforme discrète
```

- **Structure conditionnelle**.
  Les lignes 4 à 7 suivantes consistent à déterminer si le joueur gagne la partie. Il s'agit alors de vérifier si le numéro de la boule piochée par le joueur (et stocké dans la variable `X`) est impair. On teste cette propriété à l'aide de la question précédente. Rappelons que le test d'égalité se fait à l'aide du symbole `==` (le symbole `=` permet quant à lui de réaliser une affectation).

```
4 if X == 2*np.floor(X/2):
```

  Si le numéro est pair, c'est-à-dire si la condition précédente est vérifiée, on affiche « le joueur a perdu » à l'aide de la fonction `print`. Dans l'autre cas, on affiche « le joueur a gagné ».

```
5     print('le joueur a perdu')
6 else:
7     print('le joueur a gagné')
```

Commentaire

- Afin de permettre une bonne compréhension des mécanismes en jeu, on a détaillé la réponse à cette question. Cependant, compléter correctement le programme **Python** démontre la bonne compréhension de la simulation demandée et permet certainement d'obtenir la majorité des points alloués à cette question.
- On a mentionné dans la réponse que la loi de X dépendait de la valeur prise par la v.a.r. N. On peut être plus précis et rigoureux. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la loi conditionnelle de X sachant l'événement $[N = n]$ n'est autre que la loi $\mathcal{U}([\![1,n]\!])$.
  Autrement dit :
$$\forall k \in [\![1,n]\!], \ \mathbb{P}_{[N=n]}\big([X = k]\big) = \frac{1}{n}$$

□

5. a) Donner, pour tout entier naturel k supérieur ou égal à j, la valeur de $\mathbb{P}_{[N=2j]}\big([X = 2k+1]\big)$.

Démonstration.
Soit $j \in \mathbb{N}$ et soit $k \geqslant j$.

- Si l'événement $[N = 2j]$ est réalisé, c'est que le premier pile est apparu au rang $2j$.
  L'urne est alors remplie avec des boules numérotés de 1 à $2j$.
- Dans ce cas, l'événement $[X = 2k+1]$ est réalisé si et seulement si le joueur pioche la boule numérotée $2k+1$ dans l'urne. Or, comme $k \geqslant j$, alors $2k+1 \geqslant 2j+1 > 2j$.
  Il est donc impossible que le joueur pioche une telle boule.

$$\boxed{\text{On en déduit : } \mathbb{P}_{[N=2j]}\big([X = 2k+1]\big) = 0.}$$

□

b) Donner, pour tout entier naturel k supérieur ou égal à $j+1$, la valeur de $\mathbb{P}_{[N=2j+1]}\big([X = 2k+1]\big)$.

Démonstration.
Soit $j \in \mathbb{N}$ et soit $k \geqslant j+1$.

L'argument est similaire à celui de la question précédente : si le premier pile apparaît au rang $2j+1$ alors le joueur ne peut tirer une boule numérotée $2k+1 \geqslant 2\,(j+1)+1 = 2j+2 > 2j+1$.

$$\boxed{\text{On en déduit : } \mathbb{P}_{[N=2j+1]}\big([X = 2k+1]\big) = 0.}$$

□

c) Déterminer $\mathbb{P}_{[N=2j]}\big([X = 2k+1]\big)$ lorsque k appartient à $[\![0, j-1]\!]$.

Démonstration.
Soit $j \in \mathbb{N}$ et soit $k \in [\![0, j-1]\!]$.

- Si l'événement $[N = 2j]$ est réalisé, c'est que le premier pile est apparu au rang $2j$.
  L'urne est alors remplie avec des boules numérotés de 1 à $2j$.
- Dans ce cas, l'événement $[X = 2k+1]$ est réalisé si et seulement si le joueur pioche la boule numérotée $2k+1$ dans l'urne. Or, comme $k \in [\![0, j-1]\!]$ alors $2k+1 \in [\![1, 2j-1]\!] \subset [\![1, 2j]\!]$.

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Toutes les boules de l'urne étant piochées avec la même probabilité, on en déduit :}\\ \mathbb{P}_{[N=2j]}\big([X = 2k+1]\big) = \dfrac{1}{2j}.\end{array}}$$

Commentaire

La notation $2k+1$ désigne un entier impair. Attention cependant à ne pas en tirer de conclusion hâtive. L'événement $[X = 2k+1]$ est réalisé si et seulement si on pioche `LA` boule impaire numérotée $2k+1$ de l'urne. Cet événement ne doit en aucun cas être confondu avec l'événement A_{2j} « piocher une boule impaire dans l'urne contenant les boules numérotées 1 à $2j$ ». Cet dernier événement est réalisé si et seulement on tire une boule portant un numéro de l'ensemble $\{1, 3, 5, \ldots, 2j-1\}$. On peut donc l'écrire :

$$A_{2j} \;=\; \bigcup_{k=0}^{j-1} \, [X = 2k+1]$$

□

d) Déterminer $\mathbb{P}_{[N=2j+1]}\big([X = 2k+1]\big)$ lorsque k appartient à $[\![0, j]\!]$.

Démonstration.
Soit $j \in \mathbb{N}$ et soit $k \in [\![0, j]\!]$.
L'argument est similaire à celui de la question précédente.

- Si l'événement $[N = 2j + 1]$ est réalisé, c'est que le premier pile est apparu au rang $2j + 1$.
- Dans ce cas, l'événement $[X = 2k + 1]$ est réalisé si et seulement si le joueur pioche la boule numérotée $2k + 1$ dans l'urne (avec $2k + 1 \in [\![1, 2j + 1]\!]$).

Toutes les boules de l'urne étant piochées avec la même probabilité, on en déduit : $\mathbb{P}_{[N=2j+1]}\big([X = 2k+1]\big) = \dfrac{1}{2j+1}$.

Commentaire

- Le raisonnement étant similaire au précédent, donner directement le résultat permet certainement d'obtenir l'ensemble des points alloués à cette question.
- La difficulté d'un sujet se mesure en grande partie au nombre de questions intermédiaires présentes dans l'énoncé. Les questions ***5.a)***, ***5.b)***, ***5.c)***, ***5.d)***, sont destinées à résoudre la question ***6.a)***. Avoir traité ces questions en amont permet de se focaliser sur les difficultés inhérentes à la question ***6***.
  Ce découpage présente quand même certains désavantages :
  - × il y a une impression de répétition. Les question ***5.a)*** et ***5.b)*** sont assez similaires et il en est de même des questions ***5.c)*** et ***5.d)***.
  - × la multiplication des questions intermédiaires a tendance à rendre moins lisible le but du sujet. Ici, les questions ***5.a)*** à ***5.d)*** ne sont pas motivées même si on se doute qu'elles sont destinées à aider à traiter la suite du sujet.

□

6. a) Justifier : $\mathbb{P}\big([X = 2k+1]\big) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}\big([N = n]\big)\, \mathbb{P}_{[N=n]}\big([X = 2k+1]\big)$.

En admettant que l'on peut scinder la somme précédente selon la parité de n, montrer :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}\big([X = 2k+1]\big) \ = \ \frac{p}{q} \left(\sum_{j=k+1}^{+\infty} \frac{q^{2j}}{2j} \ + \ \sum_{j=k}^{+\infty} \frac{q^{2j+1}}{2j+1} \right)$$

Démonstration.
Soit $k \in \mathbb{N}$.

- La famille $\big([N = n]\big)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est un système complet d'événements.
  Ainsi, d'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\big([X = 2k+1]\big) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}\big([N = n] \cap [X = 2k+1]\big) \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}\big([N = n]\big)\, \mathbb{P}_{[N=n]}\big([X = 2k+1]\big) \end{aligned}$$

(car pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $\mathbb{P}\big([N = n]\big) = p\, q^{n-1} \neq 0$)

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}\big([X = 2k+1]\big) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}\big([N = n]\big)\, \mathbb{P}_{[N=n]}\big([X = 2k+1]\big)}$$

- L'énoncé suggère alors de scinder la somme suivant la parité de n.

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\big([X = 2k+1]\big) \\
= &\sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ pair}}}^{+\infty} \mathbb{P}\big([N=n]\big)\, \mathbb{P}_{[N=n]}\big([X=2k+1]\big) + \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ impair}}}^{+\infty} \mathbb{P}\big([N=n]\big)\, \mathbb{P}_{[N=n]}\big([X=2k+1]\big)
\end{aligned}$$

- Étudions chacune de ces sommes.

$$\begin{aligned}
&\sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ pair}}}^{+\infty} \mathbb{P}\big([N=n]\big)\, \mathbb{P}_{[N=n]}\big([X=2k+1]\big) \\
= &\sum_{j=1}^{+\infty} \mathbb{P}\big([N=2j]\big)\, \mathbb{P}_{[N=2j]}\big([X=2k+1]\big) \\
= &\sum_{\substack{j=1 \\ k \in [\![0, j-1]\!]}}^{+\infty} \mathbb{P}\big([N=2j]\big)\, \mathbb{P}_{[N=2j]}\big([X=2k+1]\big) + \cancel{\sum_{\substack{j=1 \\ k \geqslant j}}^{+\infty} \mathbb{P}\big([N=2j]\big)\, \mathbb{P}_{[N=2j]}\big([X=2k+1]\big)} \\
= &\sum_{j=k+1}^{+\infty} \mathbb{P}\big([N=2j]\big)\, \mathbb{P}_{[N=2j]}\big([X=2k+1]\big) \qquad (*) \\
= &\sum_{j=k+1}^{+\infty} p\, q^{2j-1} \times \frac{1}{2j} \qquad \textit{(d'après la question } \textbf{\textit{3}} \textit{ et la question } \textbf{\textit{5.c)}}\textit{)} \\
= &\frac{p}{q} \sum_{j=k+1}^{+\infty} \frac{q^{2j}}{2j}
\end{aligned}$$

La ligne $(*)$ est obtenue en constatant que pour $j \in \mathbb{N}$:

$$\left\{\begin{array}{l} j \in [\![1, +\infty[\![\\ k \in [\![0, j-1]\!] \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 1 \leqslant j \\ 0 \leqslant k \leqslant j-1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 1 \leqslant j \\ k+1 \leqslant j \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\ k+1 \leqslant j\right. \Leftrightarrow \left\{\ j \in [\![k+1, +\infty[\![\right.$$

- On procède de même pour la deuxième somme.

$$\begin{aligned}
&\sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ impair}}}^{+\infty} \mathbb{P}\big([N=n]\big)\, \mathbb{P}_{[N=n]}\big([X=2k+1]\big) \\
= &\sum_{j=0}^{+\infty} \mathbb{P}\big([N=2j+1]\big)\, \mathbb{P}_{[N=2j+1]}\big([X=2k+1]\big) \\
= &\sum_{\substack{j=0 \\ k \in [\![0, j]\!]}}^{+\infty} \mathbb{P}\big([N=2j+1]\big)\, \mathbb{P}_{[N=2j+1]}\big([X=2k+1]\big) + \cancel{\sum_{\substack{j=1 \\ k \geqslant j+1}}^{+\infty} \mathbb{P}\big([N=2j+1]\big)\, \mathbb{P}_{[N=2j+1]}\big([X=2k+1]\big)} \\
= &\sum_{j=k}^{+\infty} \mathbb{P}\big([N=2j+1]\big)\, \mathbb{P}_{[N=2j+1]}\big([X=2k+1]\big) \\
= &\sum_{j=k}^{+\infty} p\, q^{2j} \times \frac{1}{2j+1} = \frac{p}{q} \sum_{j=k}^{+\infty} \frac{q^{2j+1}}{2j+1} \qquad \textit{(d'après la question } \textbf{\textit{3}} \textit{ et la question } \textbf{\textit{5.c)}}\textit{)}
\end{aligned}$$

- Finalement :

$$\mathbb{P}\big([X=2k+1]\big) = \frac{p}{q}\sum_{j=k+1}^{+\infty}\frac{q^{2j}}{2j} + \frac{p}{q}\sum_{j=k}^{+\infty}\frac{q^{2j+1}}{2j+1}$$

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}\big([X=2k+1]\big) = \frac{p}{q}\left(\sum_{j=k+1}^{+\infty}\frac{q^{2j}}{2j} + \sum_{j=k}^{+\infty}\frac{q^{2j+1}}{2j+1}\right)}$$

□

b) En déduire : $\forall k \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}\big([X=2k+1]\big) = \dfrac{p}{q}\displaystyle\int_0^q \frac{t^{2k}}{1-t}\,dt$.

Démonstration.
Soit $k \in \mathbb{N}$. On a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\big([X=2k+1]\big) &= \frac{p}{q}\left(\sum_{j=k+1}^{+\infty}\frac{q^{2j}}{2j} + \sum_{j=k}^{+\infty}\frac{q^{2j+1}}{2j+1}\right) \\
&= \frac{p}{q}\left(\int_0^q \frac{t^{2k+1}}{1-t^2}\,dt + \int_0^q \frac{t^{2k}}{1-t^2}\,dt\right) && \textit{(d'après la question } \textbf{2.d)} \textit{ avec } x=q\in[0,1[\textit{ et la propriété admise)} \\
&= \frac{p}{q}\int_0^q \frac{t^{2k+1}+t^{2k}}{1-t^2}\,dt && \textit{(par linéarité de l'intégrale)} \\
&= \frac{p}{q}\int_0^q \frac{t^{2k}\,(t+1)}{(1-t)(1+t)}\,dt \\
&= \frac{p}{q}\int_0^q \frac{t^{2k}}{1-t}\,dt
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On a bien : } \forall k \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}\big([X=2k+1]\big) = \frac{p}{q}\int_0^q \frac{t^{2k}}{1-t}\,dt.}$$

□

7. a) Montrer : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^q \frac{t^{2n+2}}{(1-t)^2(1+t)}\,dt = 0$.

Démonstration.
- Soit $t \in [0,q]$. Alors :

$$\begin{array}{lccccl}
 & 0 & \leqslant & t & \leqslant & q \\
\text{donc} & 0 & \geqslant & -t & \geqslant & -q \\
\text{ainsi} & 1 & \geqslant & 1-t & \geqslant & 1-q \\
\text{d'où} & \dfrac{1}{1} & \leqslant & \dfrac{1}{1-t} & \leqslant & \dfrac{1}{1-q} \quad \textit{(par décroissance de la fonction inverse sur }]0,+\infty[\textit{)} \\
\text{puis} & 1 & \leqslant & \left(\dfrac{1}{1-t}\right)^2 & \leqslant & \left(\dfrac{1}{1-q}\right)^2 \quad \textit{(par croissance de la fonction } u\mapsto u^2 \textit{ sur } [0,+\infty[\textit{)}
\end{array}$$

Finralement, en multipliant par $\dfrac{t^{2n+2}}{1+t} \geqslant 0$, on obtient :

$$0 \leqslant \frac{t^{2n+2}}{1+t} \leqslant \frac{t^{2n+2}}{(1-t)^2\,(1+t)} \leqslant \frac{1}{(1-q)^2}\,\frac{t^{2n+2}}{1+t}$$

- Par croissance de l'intégrale, les bornes étant dans l'ordre croissant ($0 \leqslant q$) :

$$\begin{array}{ccccc} \displaystyle\int_0^q 0 \, dt & \leqslant & \displaystyle\int_0^q \frac{t^{2n+2}}{(1-t)^2\,(1+t)} \, dt & \leqslant & \displaystyle\int_0^q \frac{1}{(1-q)^2} \, \frac{t^{2n+2}}{1+t} \, dt \\ \shortparallel & & & & \shortparallel \\ 0 & & & & \displaystyle\frac{1}{(1-q)^2} \int_0^q \frac{t^{2n+2}}{1+t} \, dt \end{array}$$

- Or :
  - × $\lim\limits_{n\to+\infty} 0 = 0$.
  - × $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_0^q \frac{t^{2n+2}}{1+t} \, dt = 0$ d'après la question ***1.b)***.

$$\boxed{\text{Ainsi, par théorème d'encadrement : } \lim_{n\to+\infty} \int_0^q \frac{t^{2n+2}}{(1-t)^2\,(1+t)} \, dt = 0.}$$

Commentaire

On se sert ici du résultat ***1.b)***. Il était aussi possible de s'en passer en effectuant une démonstration analogue à la ***1.b)***. En remarquant $0 \leqslant \dfrac{1}{1+t} \leqslant 1$, on obtient :

$$0 \ \leqslant \ \frac{t^{2n+2}}{(1-t)^2\,(1+t)} \ \leqslant \ \frac{t^{2n+2}}{(1-q)^2}$$

Puis, par croissance de l'intégrale :

$$0 \ \leqslant \ \int_0^q \frac{t^{2n+2}}{(1-t)^2\,(1+t)} \, dt \ \leqslant \ \frac{1}{(1-q)^2} \times \frac{1}{2n+3}$$

et on conclut par théorème d'encadrement comme en ***1.b)***.

$\square$

b) Montrer :

$$\sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}\big(\,[X = 2k+1]\,\big) = \frac{p}{q} \left(\int_0^q \frac{1}{(1-t)^2(1+t)} \, dt - \int_0^q \frac{t^{2n+2}}{(1-t)^2(1+t)} \, dt \right)$$

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}$.

- On a :

$$\begin{array}{rcll} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}\big(\,[X=2k+1]\,\big) & = & \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{p}{q} \int_0^q \frac{t^{2k}}{1-t} \, dt & \textit{(d'après la question } \textbf{\textit{6.b)}}\textit{)} \\ & = & \displaystyle\frac{p}{q} \int_0^q \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{t^{2k}}{1-t} \right) dt & \textit{(par linéarité de l'intégrale)} \\ & = & \displaystyle\frac{p}{q} \int_0^q \frac{1}{1-t} \left(\sum_{k=0}^{n} \left(t^2\right)^k \right) dt & \\ & = & \displaystyle\frac{p}{q} \int_0^q \frac{1}{1-t} \left(\frac{1-\left(t^2\right)^{n+1}}{1-t^2} \right) dt & \end{array}$$

- Enfin, pour tout $t \in [0, q]$:

$$\frac{1}{1-t}\left(\frac{1-\left(t^2\right)^{n+1}}{1-t^2}\right) = \frac{1}{1-t}\,\frac{1-t^{2n+2}}{(1-t)\,(1+t)} = \frac{1-t^{2n+2}}{(1-t)^2\,(1+t)}$$

On en conclut, par linéarité de l'intégrale :
$$\sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}\big([X=2k+1]\big) = \frac{p}{q}\left(\int_0^q \frac{1}{(1-t)^2\,(1+t)}\,dt - \int_0^q \frac{t^{2n+2}}{(1-t)^2\,(1+t)}\,dt\right)$$

□

c) En déduire : $\mathbb{P}(A) = \dfrac{p}{q}\displaystyle\int_0^q \frac{1}{(1-t)^2(1+t)}\,dt$.

Démonstration.

- Remarquons tout d'abord :

$$\begin{aligned} A \text{ est réalisé} &\Leftrightarrow \text{le joueur a pioché une boule impaire} \\ &\Leftrightarrow X \text{ prend une valeur impaire} \\ &\Leftrightarrow \text{il existe } k \in \mathbb{N},\ [X=2k+1] \text{ est réalisé} \\ &\Leftrightarrow \bigcup_{k=0}^{+\infty} [X=2k+1] \text{ est réalisé} \end{aligned}$$

On en conclut : $A = \displaystyle\bigcup_{k=0}^{+\infty} [X=2k+1]$

- On en déduit :

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}(A) \\ =\ & \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=0}^{+\infty} [X=2k+1]\right) \\ =\ & \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=0}^{n} [X=2k+1]\right) && \textit{(par le théorème de la limite monotone)} \\ =\ & \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}\big([X=2k+1]\big) && \textit{(car les événements de la famille } \big([X=2k+1]\big)_{k\in[\![0,n]\!]} \textit{ sont 2 à 2 incompatibles)} \\ =\ & \lim_{n\to+\infty} \frac{p}{q}\left(\int_0^q \frac{1}{(1-t)^2\,(1+t)}\,dt - \int_0^q \frac{t^{2n+2}}{(1-t)^2\,(1+t)}\,dt\right) && \textit{(d'après la question précédente)} \\ =\ & \lim_{n\to+\infty} \frac{p}{q}\int_0^q \frac{1}{(1-t)^2\,(1+t)}\,dt - \lim_{n\to+\infty} \frac{p}{q}\int_0^q \frac{t^{2n+2}}{(1-t)^2\,(1+t)}\,dt && \textit{(car ces deux limites existent et sont finies)} \\ =\ & \frac{p}{q}\int_0^q \frac{1}{(1-t)^2\,(1+t)}\,dt && \textit{(d'après la question \textbf{7.a)})} \end{aligned}$$

On en conclut : $\mathbb{P}(A) = \dfrac{p}{q}\displaystyle\int_0^q \frac{1}{(1-t)^2\,(1+t)}\,dt$.

□

8. a) Trouver trois constantes réelles a, b et c telles que, pour tout t différent de 1 et de -1, on ait :

$$\frac{1}{(1-t)^2(1+t)} = \frac{a}{1-t} + \frac{b}{1+t} + \frac{c}{(1-t)^2}$$

Démonstration.
Soit $t \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$.

- Tout d'abord pour tout $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned} \frac{a}{1-t} + \frac{b}{1+t} + \frac{c}{(1-t)^2} &= \frac{a\,(1-t)\,(1+t) + b\,(1-t)^2 + c\,(1+t)}{(1-t)^2\,(1+t)} \\ &= \frac{a - a\,t^2 + b - 2b\,t + b\,t^2 + c + c\,t}{(1-t)^2\,(1+t)} \\ &= \frac{(a+b+c) + (-2b+c)\,t + (-a+b)\,t^2}{(1-t)^2\,(1+t)} \end{aligned}$$

- On a alors :

$$\begin{aligned} & \forall t \in \mathbb{R} \setminus \{-1,1\}, \quad \frac{1}{(1-t)^2(1+t)} = \frac{a}{1-t} + \frac{b}{1+t} + \frac{c}{(1-t)^2} \\ \iff \quad & \forall t \in \mathbb{R} \setminus \{-1,1\}, \quad \frac{1}{(1-t)^2(1+t)} = \frac{(a+b+c) + (-2b+c)\,t + (-a+b)\,t^2}{(1-t)^2\,(1+t)} \\ \iff \quad & \forall t \in \mathbb{R} \setminus \{-1,1\}, \quad 1 = (a+b+c) + (-2b+c)\,t + (-a+b)\,t^2 \\ \iff \quad & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} a & + & b & + & c & = & 1 \\ & - & 2\,b & + & c & = & 0 \\ -a & + & b & & & = & 0 \end{array} \right. \\ \underset{L_3 \leftarrow L_3 + L_1}{\iff} \quad & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} a & + & b & + & c & = & 1 \\ & - & 2\,b & + & c & = & 0 \\ & & 2\,b & + & c & = & 1 \end{array} \right. \\ \underset{L_3 \leftarrow L_3 + L_2}{\iff} \quad & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} a & + & b & + & c & = & 1 \\ & - & 2\,b & + & c & = & 0 \\ & & & & 2\,c & = & 1 \end{array} \right. \\ \underset{\substack{L_1 \leftarrow 2\,L_1 - L_3 \\ L_2 \leftarrow 2\,L_2 - L_3}}{\iff} \quad & \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} 2\,a & + & 2\,b & & & = & 1 \\ & - & 4\,b & & & = & -1 \\ & & & & 2\,c & = & 1 \end{array} \right. \\ \underset{L_1 \leftarrow 2\,L_1 + L_2}{\iff} \quad & \left\{ \begin{array}{rrrcl} 4\,a & & & = & 1 \\ & 4\,b & & = & 1 \\ & & 2\,c & = & 1 \end{array} \right. \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On en conclut : } \forall t \in \mathbb{R} \setminus \{-1,1\}, \ \frac{1}{(1-t)^2(1+t)} = \frac{\frac{1}{4}}{1-t} + \frac{\frac{1}{4}}{1+t} + \frac{\frac{1}{2}}{(1-t)^2}.}$$

□

b) Écrire $\mathbb{P}(A)$ explicitement en fonction de q.

Démonstration.

- Tout d'abord :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A) &= \frac{p}{q} \int_0^q \frac{1}{(1-t)^2\,(1+t)}\, dt \\ &= \frac{p}{q} \int_0^q \left(\frac{\frac{1}{4}}{1-t} + \frac{\frac{1}{4}}{1+t} + \frac{\frac{1}{2}}{(1-t)^2} \right) dt \\ &= \frac{p}{q} \left(\frac{1}{4} \int_0^q \frac{1}{1-t}\, dt + \frac{1}{4} \int_0^q \frac{1}{1+t}\, dt + \frac{1}{2} \int_0^q \frac{1}{(1-t)^2}\, dt \right) \qquad \textit{(par linéarité de l'intégrale)}\end{aligned}$$

- De plus :

$$\begin{aligned}\int_0^q \frac{1}{1-t}\, dt &= -\int_0^q \frac{-1}{1-t}\, dt \\ &= -\left[\ \ln\left(|1-t|\right)\ \right]_0^q = -\left(\ln\left(|1-q|\right) - \cancel{\ln\left(|1|\right)}\right) = -\ln(1-q)\end{aligned}$$

$$\int_0^q \frac{1}{1+t}\, dt = \left[\ \ln\left(|1+t|\right)\ \right]_0^q = \ln\left(|1+q|\right) - \cancel{\ln\left(|1|\right)} = \ln(1+q)$$

$$\begin{aligned}\int_0^q \frac{1}{(1-t)^2}\, dt &= -\int_0^q (-1)\ (1-t)^{-2}\, dt = -\left[\ (1-t)^{-1}\ \right]_0^q \\ &= -\left[\frac{1}{1-t}\right]_0^q = -\left(\frac{1}{1-q} - \frac{1}{1}\right) = 1 - \frac{1}{1-q} = \frac{q}{1-q}\end{aligned}$$

- Finalement :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A) &= \frac{p}{q}\left(-\frac{1}{4}\ \ln(1-q) + \frac{1}{4}\ \ln(1+q) + \frac{1}{2}\ \frac{q}{1-q}\right) \\ &= \frac{1-q}{q}\left(\frac{1}{4}\ \ln\left(\frac{1+q}{1-q}\right) + \frac{1}{2}\ \frac{q}{1-q}\right) = \frac{1-q}{4\,q}\ \ln\left(\frac{1+q}{1-q}\right) + \frac{1}{2}\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{P}(A) = \frac{1-q}{4q}\ \ln\left(\frac{1+q}{1-q}\right) + \frac{1}{2}}$$

□

c) En déduire : $\mathbb{P}(A) > \dfrac{1}{2}$.

Démonstration.

- Tout d'abord, comme $p = 1 - q \in\ ]0, 1[$. Ainsi : $1 - q > 0$ et $\dfrac{1-q}{4q} > 0$.
- Par ailleurs :

$$\ln\left(\frac{1+q}{1-q}\right) = \ln\left(\frac{(1-q)+2\,q}{1-q}\right) = \ln\left(1 + \frac{2\,q}{1-q}\right) > 0 \qquad \text{car } \frac{2\,q}{1-q} > 0$$

$$\boxed{\text{On en conclut : } \mathbb{P}(A) = \frac{1-q}{4q}\ \ln\left(\frac{1+q}{1-q}\right) + \frac{1}{2} > \frac{1}{2}.}$$

□

EML 2014 - tirages avec remise dans une urne, loi uniforme discrète, convergence en loi

Pour tout entier n supérieur ou égal à 2, on considère une urne contenant n boules numérotées de 1 à n, dans laquelle on effectue une succession de $(n+1)$ tirages d'une boule avec remise et l'on note X_n la variable aléatoire égale au numéro du tirage où, pour la première fois, on a obtenu un numéro supérieur ou égal au numéro précédent.
Ainsi, pour tout entier n supérieur ou égal à 2, la variable X_n prend ses valeurs dans $[\![2, n+1]\!]$.
Par exemple, si $n = 5$ et si les tirages amènent successivement les numéros 5, 3, 2, 2, 6, 3, alors $X_5 = 4$.
Pour tout k de $[\![1, n+1]\!]$, on note N_k la variable aléatoire égale au numéro obtenu au $k^{\text{ème}}$ tirage.

Partie I : Étude du cas $n = 3$

On suppose dans cette partie **uniquement** que $n = 3$.
L'urne contient donc les boules numérotées 1, 2, 3.

1. a) Exprimer l'évenement $[X_3 = 4]$ à l'aide d'événements faisant intervenir les variables N_1, N_2, N_3.
En déduire $\mathbb{P}([X_3 = 4])$.

Démonstration.
Rappelons qu'on effectue $n + 1 = 4$ tirages successifs (et avec remise) dans l'urne.

- L'événement $[X_3 = 4]$ est réalisé si et seulement si c'est le $4^{\text{ème}}$ tirage qui a amené, pour la première fois, un numéro plus grand que le numéro tiré au tirage précédent.
  Cela signifie que :
  - × le numéro obtenu au $2^{\text{ème}}$ tirage est strictement plus petit que celui obtenu au 1^{er} tirage.
  - × le numéro obtenu au $3^{\text{ème}}$ tirage est strictement plus petit que celui obtenu au $2^{\text{ème}}$ tirage.
  - × le numéro obtenu au $4^{\text{ème}}$ tirage est supérieur ou égal à celui obtenu au $3^{\text{ème}}$ tirage.

  Les 3 premiers tirages constituent donc une séquence strictement décroissante d'entiers de l'ensemble $[\![1, 3]\!]$ (l'urne ne contenant que les boules 1, 2 et 3).
  On a donc forcément obtenu 3 au premier tirage, 2 au $2^{\text{ème}}$ et 1 au $3^{\text{ème}}$.
  (le numéro obtenu au $4^{\text{ème}}$ tirage sera alors forcément supérieur ou égal à 1)

  $$\boxed{\text{Ainsi : } [X_3 = 4] = [N_1 = 3] \cap [N_2 = 2] \cap [N_3 = 1].}$$

Commentaire

- Il est à noter que la décomposition de l'événément $[X_3 = 4]$ démontre la bonne compréhension et permet donc, à elle seule, d'obtenir la totalité des points alloués sur cette étape.
- Sur un exercice de probabilités discrètes, il faut prendre le temps en début d'énoncé de bien comprendre l'expérience aléatoire et les v.a.r. en présence. C'est aussi le but de la rédaction précédant la décomposition de l'événement : prendre le temps de caractériser la réalisation de l'événément permet de rentrer dans le sujet.

- On en déduit :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\big([X_3 = 4]\big) &= \mathbb{P}\big([N_1 = 3] \cap [N_2 = 2] \cap [N_3 = 1]\big) \\
&= \mathbb{P}\big([N_1 = 3]\big) \times \mathbb{P}\big([N_2 = 2]\big) \times \mathbb{P}\big([N_3 = 1]\big) && \textit{(par indépendance des tirages)} \\
&= \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{27} && \textit{(car pour tout } i \in [\![1, 3]\!], \ N_i \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1, 3]\!])\textit{)}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{P}\big([X_3 = 4]\big) = \frac{1}{27}}$$

□

b) Montrer que $\mathbb{P}([X_3 = 2]) = \dfrac{2}{3}$, et en déduire $\mathbb{P}([X_3 = 3])$.

Démonstration.

- L'événement $[X_3 = 2]$ est réalisé si et seulement si c'est le $2^{\text{ème}}$ tirage qui a amené, pour la première fois, un numéro plus grand que le numéro tiré au tirage précédent.
  Cela signifie que le numéro obtenu au $2^{\text{ème}}$ tirage est supérieur ou égal à celui obtenu au 1^{er} tirage (les numéros obtenus aux $3^{\text{ème}}$ et $4^{\text{ème}}$ tirages ne sont pas contraints). Trois cas se présentent :
  × si on a obtenu 1 au premier tirage :
  alors on a pu tirer n'importe quel numéro au deuxième tirage.
  × si on a obtenu 2 au premier tirage :
  alors on a tiré les numéros 2 ou 3 au deuxième tirage.
  × si on a obtenu 3 au premier tirage :
  alors on a obligatoirement tiré le numéro 3 au deuxième tirage.

  Ainsi :
$$\begin{aligned}
[X_3 = 2] &= \quad [N_1 = 1] \cap \Big([N_2 = 1] \cup [N_2 = 2] \cup [N_2 = 3] \Big) \\
&\quad \cup \ [N_1 = 2] \cap \Big([N_2 = 2] \cup [N_2 = 3] \Big) \\
&\quad \cup \ [N_1 = 3] \cap \Big([N_2 = 3] \Big) \\
&= \Big([N_1 = 1] \cap \Omega \Big) \cup \Big([N_1 = 2] \cap [N_2 \geqslant 2] \Big) \cup \Big([N_1 = 3] \cap [N_2 = 3] \Big)
\end{aligned}$$
$$\boxed{[X_3 = 2] = [N_1 = 1] \cup \Big([N_1 = 2] \cap [N_2 \geqslant 2] \Big) \cup \Big([N_1 = 3] \cap [N_2 = 3] \Big)}$$

- On en déduit :
$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\big([X_3 = 2] \big) \\
= \ &\mathbb{P}\big([N_1 = 1] \big) + \mathbb{P}\big([N_1 = 2] \cap [N_2 \geqslant 2] \big) + \mathbb{P}\big([N_1 = 3] \cap [N_2 = 3] \big) \\
= \ &\mathbb{P}\big([N_1 = 1] \big) + \mathbb{P}\big([N_1 = 2] \big) \times \mathbb{P}\big([N_2 \geqslant 2] \big) + \mathbb{P}\big([N_1 = 3] \big) \times \mathbb{P}\big([N_2 = 3] \big) && \textit{(par indépendance des tirages)} \\
= \ &\frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{3+2+1}{9} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3} && \textit{(pour tout } i \in [\![1,3]\!], \ N_i \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1,3]\!])\textit{)}
\end{aligned}$$
$$\boxed{\mathbb{P}\big([X_3 = 2] \big) = \frac{2}{3}}$$

- La famille $\big([X_3 = i] \big)_{i = [\![2,4]\!]}$ est un système complet d'événements. On en déduit :
$$\mathbb{P}\big([X_3 = 2] \big) + \mathbb{P}\big([X_3 = 3] \big) + \mathbb{P}\big([X_3 = 4] \big) = 1$$
  Et ainsi :
$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\big([X_3 = 3] \big) &= 1 - \mathbb{P}\big([X_3 = 2] \big) - \mathbb{P}\big([X_3 = 4] \big) \\
&= 1 - \frac{1}{27} - \frac{2}{3} \\
&= \frac{27}{27} - \frac{1}{27} - \frac{18}{27} = \frac{8}{27}
\end{aligned}$$
$$\boxed{\mathbb{P}\big([X_3 = 3] \big) = \frac{8}{27}}$$

□

2. Calculer l'espérance de X_3.

Démonstration.

- La v.a.r. X_3 admet une espérance car elle est finie.
- Par définition :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X_3) &= 2 \times \mathbb{P}\big([X_3 = 2]\big) + 3 \times \mathbb{P}\big([X_3 = 3]\big) + 4 \times \mathbb{P}\big([X_3 = 4]\big) \\ &= 2 \times \frac{2}{3} + 3 \times \frac{8}{27} + 4 \times \frac{1}{27} \\ &= \frac{36+24+4}{27} = \frac{64}{27}\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{E}(X_3) = \frac{64}{27}}$$

□

Partie II : Cas général

Dans toute cette partie, n est un entier fixé supérieur ou égal à 2.

3. Pour tout k de $[\![1, n+1]\!]$, reconnaître la loi de N_k et rappeler son espérance et sa variance.

Démonstration.
Soit $k \in [\![1, n+1]\!]$.

- À chaque instant k, l'expérience consiste au tirage d'une boule dans une urne contenant n boules numérotées de 1 à n. Cette expérience possède donc n issues équiprobables.
  La v.a.r. N_k désigne le numéro obtenu lors de ce tirage.

  $$\boxed{\text{On en déduit : } N_k \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1, n]\!]).}$$

- La v.a.r. N_k possède une espérance et une variance car suit une loi usuelle.

  $$\boxed{\text{De plus : } \mathbb{E}(N_k) = \frac{n+1}{2} \quad \text{et} \quad \mathbb{V}(N_k) = \frac{n^2-1}{12}}$$

□

4. Calculer $\mathbb{P}([X_n = n+1])$.

Démonstration.

- L'événement $[X_n = n+1]$ est réalisé si et seulement si c'est le $(n+1)^{\text{ème}}$ tirage qui a amené, pour la première fois, un numéro plus grand que le numéro tiré au tirage précédent.
  Cela signifie que :
  × le numéro obtenu au $2^{\text{ème}}$ tirage est strictement plus petit que celui obtenu au 1^{er} tirage.
  × ...
  × le numéro obtenu au $n^{\text{ème}}$ tirage est strictement plus petit que celui obtenu au $(n-1)^{\text{ème}}$ tirage.
  × le numéro obtenu au $(n+1)^{\text{ème}}$ tirage est supérieur ou égal à celui obtenu au $n^{\text{ème}}$ tirage.

  Ainsi, les numéros obtenus lors des n premiers tirages forment une séquence strictement décroissante. On en déduit, comme en question ***1.a)*** :

  $$[X_n = n+1] = [N_1 = n] \cap \ldots \cap [N_n = 1]$$

  $$\boxed{\text{On en déduit, comme en question } \textbf{\textit{1.a)}} : [X_n = n+1] = \bigcap_{i=1}^{n} [N_i = n+1-i].}$$

- On en déduit :

$$\begin{array}{rcll}
\mathbb{P}\big(\,[X_n = n+1]\,\big) & = & \mathbb{P}\big(\bigcap\limits_{i=1}^{n} \,[N_i = n+1-i]\,\big) & \\
& = & \prod\limits_{i=1}^{n} \mathbb{P}\big(\,[N_i = n+1-i]\,\big) & \textit{(par indépendance des tirages)} \\
& = & \prod\limits_{i=1}^{n} \dfrac{1}{n} \;=\; \left(\dfrac{1}{n}\right)^n & \textit{(car pour tout } i \in [\![1,n]\!], \; N_i \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1,n]\!])\textit{)}
\end{array}$$

$$\boxed{\mathbb{P}\big(\,[X_n = n+1]\,\big) = \left(\dfrac{1}{n}\right)^n}$$

□

5. Montrer, pour tout i de $[\![1,n]\!]$: $\mathbb{P}_{[N_1=i]}([X_n = 2]) = \dfrac{n-i+1}{n}$.

Démonstration.
Soit $i \in [\![1,n]\!]$.
Si l'événement $[N_1 = i]$ est réalisé, c'est que l'on a obtenu la boule numérotée i lors du 1er tirage.
L'événement $[X_n = 2]$ est alors réalisé si on a obtenu une boule portant un numéro supérieur ou égal à i lors du 2ème tirage, c'est-à-dire portant un numéro dans l'ensemble $[\![i,n]\!]$.
Il y a $n-i+1$ boules vérifiant cette condition.

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Chaque boule ayant la même probabilité d'être tirée, on en déduit :} \\ \forall i \in [\![1,n]\!], \; \mathbb{P}_{[N_1=i]}([X_n = 2]) = \dfrac{n-i+1}{n}\end{array}}$$

Commentaire

- On pouvait aussi effectuer cette démonstration en revenant à la définition de probabilité conditionnelle :

$$\mathbb{P}_{[N_1=i]}\big(\,[X_n = 2]\,\big) = \frac{\mathbb{P}\big([N_1 = i] \cap [X_n = 2]\,\big)}{\mathbb{P}\big([N_1 = i]\big)}$$

L'événement $[N_1 = i] \cap [X_n = 2]$ est réalisé si et seulement si on a obtenu la boule numérotée i au 1er tirage et une boule portant un numéro supérieur ou égal lors du 2ème tirage. Ainsi :

$$[N_1 = i] \cap [X_n = 2] = [N_1 = i] \cap [i \leqslant N_2 \leqslant n]$$

D'où :

$$\begin{array}{rcll}
\mathbb{P}\big(\,[N_1 = i] \cap [X_n = 2]\,\big) & = & \mathbb{P}\left([N_1 = i] \cap [i \leqslant N_2 \leqslant n]\right) & \\
& = & \mathbb{P}\big(\,[N_1 = i]\,\big) \times \mathbb{P}\big(\,[i \leqslant N_2 \leqslant n]\,\big) & \textit{(par indépendance des tirages)} \\
& = & \mathbb{P}\big(\,[N_1 = i]\,\big) \times \mathbb{P}\big(\bigcup\limits_{k=i}^{n} \,[N_2 = k]\,\big) &
\end{array}$$

Enfin, les événements de la réunion étant 2 à 2 incompatibles, on en déduit :

$$\mathbb{P}\big(\bigcup_{k=i}^{n} \,[N_2 = k]\,\big) \;=\; \sum_{k=i}^{n} \mathbb{P}\big(\,[N_2 = k]\,\big) \;=\; \sum_{k=i}^{n} \frac{1}{n} \;=\; \frac{n-i+1}{n}$$

□

6. En déduire une expression simple de $\mathbb{P}\big([X_n = 2]\big)$.

Démonstration.
La famille $\big([N_1 = i]\big)_{i \in [\![1,n]\!]}$ est un système complet d'événements.
D'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{array}{rcll}
\mathbb{P}\big([X_n = 2]\big) & = & \sum\limits_{i=1}^{n} \mathbb{P}\big([N_1 = i] \cap [X_n = 2]\big) & \\
& = & \sum\limits_{i=1}^{n} \mathbb{P}\big([N_1 = i]\big) \times \mathbb{P}_{[N_1=i]}\big([X_n = 2]\big) & \textit{(car pour tout } i \in [\![1,n]\!], \\
& & & \mathbb{P}\big([N_1 = i]\big) \neq 0\textit{)} \\
& = & \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{1}{n} \, \dfrac{n-i+1}{n} & \textit{(d'après la question précédente)} \\
& = & \sum\limits_{j=1}^{n} \dfrac{j}{n^2} & \textit{(en posant } j = n-i+1\textit{)} \\
& = & \dfrac{1}{n^2} \sum\limits_{j=1}^{n} j \ = \ \dfrac{1}{n^2} \, \dfrac{n(n+1)}{2} \ = \ \dfrac{n+1}{2n} &
\end{array}$$

$$\boxed{\mathbb{P}\big([X_n = 2]\big) = \dfrac{n+1}{2n}}$$

□

7. Soit $k \in [\![2,n]\!]$. Justifier l'égalité d'événements suivante : $[X_n > k] = [N_1 > N_2 > \ldots > N_k]$.
En déduire que $\mathbb{P}([X_n > k]) = \dfrac{1}{n^k} \dbinom{n}{k}$.
Vérifier que cette dernière égalité reste valable pour $k = 0$ et pour $k = 1$.

Démonstration.

- L'événement $[X_n > k]$ est réalisé si et seulement si la boule portant un numéro supérieur ou égal au celle du tirage précédent est tirée au mieux lors du $(k+1)^{\text{ème}}$ tirage.
  Cela signifie que :
  × le numéro obtenu au $2^{\text{ème}}$ tirage est strictement plus petit que celui obtenu au 1^{er} tirage.
  × ...
  × le numéro obtenu au $k^{\text{ème}}$ tirage est strictement plus petit que celui obtenu au $(k-1)^{\text{ème}}$ tirage.
  Ainsi, les numéros obtenus lors des k premiers tirages forment une séquence strictement décroissante.
  $\boxed{\text{On en déduit : } [X_n > k] = [N_1 > N_2] \cap [N_2 > N_3] \cap \ldots \cap [N_{k-1} > N_k].}$

Commentaire

L'énoncé présente l'écriture $[N_1 > N_2 > \ldots > N_k]$.

- Rappelons tout d'abord que le symbole $>$ est utilisé pour représenter la relation binaire liant 2 réels a et b : on note $a > b$ si a est strictement plus petit que b. Du fait du caractère transitif de cette relation, on se permet l'abus de notation : $a > b > c$ où c est un réel.
  Rappelons : $a > b > c \ \Leftrightarrow \ (a > b \ \texttt{ET} \ b > c)$.
- Ces rappels étant faits, revenons à l'événement considéré :

$$\begin{array}{rl}
& [N_1 > N_2 > \ldots > N_k] \\
= & \{\ \omega \in \Omega \mid N_1(\omega) > N_2(\omega) > \ldots > N_k(\omega)\ \} \\
= & \{\ \omega \in \Omega \mid N_1(\omega) > N_2(\omega) \ \texttt{ET} \ N_2(\omega) > N_3(\omega) \ \texttt{ET} \ \ldots \ \texttt{ET} \ N_{k-1}(\omega) > N_k(\omega)\} \\
= & \{\ \omega \in \Omega \mid N_1(\omega) > N_2(\omega)\ \} \ \cap \ \ldots \ \cap \ \{\ \omega \in \Omega \mid N_{k-1}(\omega) > N_k(\omega)\} \\
= & [N_1 > N_2] \cap [N_2 > N_3] \cap \ldots \cap [N_{k-1} > N_k]
\end{array}$$

- L'événement $[X_n > k]$ est réalisé par tous les $(n+1)$-tirages commençant par une séquence strictement décroissante de k entiers.
  Un tel $(n+1)$-tirage est entièrement déterminé par :
  × les k premiers entiers formant une séquence strictement décroissante : $\binom{n}{k}$ possibilités.
  En effet, une k-séquence strictement décroissante d'entiers de $[\![1, n]\!]$ est entièrement déterminée par le choix des k entiers différents de $[\![1, n]\!]$ constituant cette séquence. Une fois ces k entiers choisis, ils sont rangés dans l'ordre décroissant, ce qui ne forme qu'une seule k-séquence.
  Autrement dit, une partie à k éléments de l'ensemble $[\![1, n]\!]$ fournit une et une seule k-séquence strictement décroissante d'entiers de $[\![1, n]\!]$. Il y a donc une bijection entre l'ensemble des k-séquence strictement décroissante et l'ensemble des parties à k éléments de $[\![1, n]\!]$.
  × le $(k+1)^{\text{ème}}$ élément : n possibilités.
  × ...
  × le $(n+1)^{\text{ème}}$ élément : n possibilités.
  Il y a donc en tout $\binom{n}{k} n^{(n+1)-(k+1)+1} = \binom{n}{k} n^{n+1-k}$ tels $(n+1)$-tirages.
  L'univers Ω, formé de tous les $(n+1)$-tirages est de cardinal : $\text{Card}(\Omega) = n^{n+1}$.
  On en déduit :
  $$\mathbb{P}\big([X_n > k]\big) = \frac{\text{Card}\big([X_n > k]\big)}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{\binom{n}{k} n^{n+1-k}}{n^{n+1}} = \frac{1}{n^k}\binom{n}{k}$$
  $$\boxed{\mathbb{P}\big([X_n > k]\big) = \frac{1}{n^k}\binom{n}{k}}$$
- Vérifions maintenant que cette formule est aussi vérifiée en $k = 0$ et $k = 1$.
  × Si $k = 0$:
  - D'une part : $\frac{1}{n^0}\binom{n}{0} = 1$.
  - D'autre part : $[X_n > 0] = \Omega$ car X_n est à valeurs dans $[\![2, n+1]\!]$.
    Ainsi, $\mathbb{P}\big([X_n > 0]\big) = \mathbb{P}(\Omega) = 1$.
  × Si $k = 1$:
  - D'une part : $\frac{1}{n^1}\binom{n}{1} = \frac{1}{n}\ n = 1$.
  - D'autre part : $[X_n > 1] = \Omega$ car X_n est à valeurs dans $[\![2, n+1]\!]$.
    Ainsi, $\mathbb{P}\big([X_n > 0]\big) = \mathbb{P}(\Omega) = 1$.

$$\boxed{\text{La relation est vérifiée pour } k = 0 \text{ et } k = 1.}$$

□

8. Exprimer, pour tout $k \in [\![2, n+1]\!]$, $\mathbb{P}([X_n = k])$ à l'aide de $\mathbb{P}([X_n > k-1])$ et de $\mathbb{P}([X_n > k])$.

Démonstration.
Soit $k \in [\![2, n+1]\!]$.
Remarquons tout d'abord que, comme X_n **est à valeurs entières** :
$$[X_n > k-1] = [X_n = k] \cup [X_n > k]$$
Les événements $[X_n = k]$ et $[X_n > k]$ sont incompatibles. On en déduit :
$$\mathbb{P}([X_n > k-1]) = \mathbb{P}([X_n = k]) + \mathbb{P}([X_n > k])$$
$$\boxed{\text{Ainsi : } \mathbb{P}([X_n = k]) = \mathbb{P}([X_n > k-1]) - \mathbb{P}([X_n > k]).}$$

□

9. En déduire : $\mathbb{E}(X_n) = \sum\limits_{k=0}^{n} \mathbb{P}([X_n > k])$. Calculer ensuite $\mathbb{E}(X_n)$.

Démonstration.

- La v.a.r. X_n admet une espérance car elle est finie.
- De plus :

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E}(X_n) \\
= \ & \sum_{k\in X_n(\Omega)} k\ \mathbb{P}([X_n = k]) \\
= \ & \sum_{k=2}^{n+1} k\,\mathbb{P}([X_n = k]) \\
= \ & \sum_{k=2}^{n+1} k\left(\ \mathbb{P}([X_n > k-1]) - \ \mathbb{P}([X_n > k])\right) && \textit{(d'après la question précédente)} \\
= \ & \sum_{k=2}^{n+1} k\,\mathbb{P}([X_n > k-1]) - \sum_{k=2}^{n+1} k\,\mathbb{P}([X_n > k]) && \textit{(par linéarité)} \\
= \ & \sum_{k=1}^{n} (k+1)\ \mathbb{P}([X_n > k]) - \sum_{k=2}^{n+1} k\,\mathbb{P}([X_n > k]) && \textit{(par décalage d'indice)} \\
= \ & \sum_{k=1}^{n} k\ \mathbb{P}([X_n > k]) + \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}([X_n > k]) - \sum_{k=2}^{n+1} k\ \mathbb{P}([X_n > k]) && \textit{(par linéarité)} \\
= \ & 1\times\mathbb{P}([X_n > 1]) + \cancel{\sum_{k=2}^{n} k\ \mathbb{P}([X_n > k])} + \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}([X_n > k]) - \left(\cancel{\sum_{k=2}^{n} k\ \mathbb{P}([X_n > k]} + (n+1)\ \mathbb{P}([X_n > n+1])\right) \\
= \ & \mathbb{P}([X_n > 0]) + \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}([X_n > k]) - (n+1)\ \mathbb{P}([X_n > n+1]) && \textit{(car } [X_n > 1] = \Omega = [X_n > 0]\textit{)} \\
= \ & \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}([X_n > k]) - (n+1)\ \cancel{\mathbb{P}([X_n > n+1])} && \textit{(car } [X_n > n+1] = \varnothing\textit{)}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{E}(X_n) = \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}\big(\,[X_n > k]\,\big)}$$

Commentaire

La démonstration consiste à démontrer un résultat de type somme télescopique.
On pouvait faire apparaître directement une telle somme en remarquant :

$$k\ \mathbb{P}([X = k]) = (k-1)\ \mathbb{P}([X > k-1]) - k\ \mathbb{P}([X > k]) + \mathbb{P}([X > k-1])$$

Ainsi, par sommation et linéarité :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=2}^{n+1} k\ \mathbb{P}([X_n = k]) &= \sum_{k=2}^{n+1} \Big((k-1)\ \mathbb{P}([X_n > k-1]) - k\ \mathbb{P}([X_n > k])\Big) + \sum_{k=2}^{n+1} \mathbb{P}([X_n > k-1]) \\
&= (2-1)\ \mathbb{P}([X_n > 2-1]) - (n+1)\ \mathbb{P}([X_n > n+1]) + \sum_{k=2}^{n+1} \mathbb{P}([X_n > k-1]) \\
&= -(n+1)\ \mathbb{P}([X_n > n+1]) + \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}([X_n > k]) && \textit{(par décalage d'indice)}
\end{aligned}$$

- Il reste à effectuer ce calcul de somme.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X_n) &= \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}([X_n > k]) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n^k}\binom{n}{k} && \textit{(d'après la question 7)} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^{n-k} \times \left(\frac{1}{n}\right)^k \\
&= \left(1+\frac{1}{n}\right)^n && \textit{(d'après la formule du binôme de Newton)}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{E}(X_n) = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n}$$

□

10. Montrer : $\forall k \in [\![2, n+1]\!]$, $\mathbb{P}([X_n = k]) = \dfrac{k-1}{n^k}\dbinom{n+1}{k}$.

Démonstration.
Soit $k \in [\![2, n+1]\!]$. Notons tout d'abord que, d'après la question ***8.*** :

$$\mathbb{P}([X_n = k]) = \mathbb{P}([X_n > k-1]) - \mathbb{P}([X_n > k])$$

Deux cas se présentent.
× Si $k \in [\![2, n]\!]$: on raisonne par équivalence.

$$\begin{aligned}
& \frac{k-1}{n^k}\binom{n+1}{k} = \mathbb{P}([X_n = k]) \\
\Leftrightarrow\ & \frac{k-1}{n^k}\binom{n+1}{k} = \mathbb{P}([X_n > k-1]) - \mathbb{P}([X_n > k]) \\
\Leftrightarrow\ & \frac{k-1}{n^k}\binom{n+1}{k} = \frac{1}{n^{k-1}}\binom{n}{k-1} - \frac{1}{n^k}\binom{n}{k} && \textit{(d'après la question 7. avec } k-1 \in [\![1, n-1]\!] \textit{ et } k \in [\![2, n]\!]\textit{)} \\
\Leftrightarrow\ & (k-1)\binom{n+1}{k} = n\binom{n}{k-1} - \binom{n}{k} && \textit{(en multipliant par } n^k > 0\textit{)} \\
\Leftrightarrow\ & k\binom{n+1}{k} - \binom{n+1}{k} = n\binom{n}{k-1} - \binom{n}{k} \\
\Leftrightarrow\ & (n+1)\binom{n}{k-1} - \binom{n+1}{k} = n\binom{n}{k-1} - \binom{n}{k} && \textit{(en appliquant l'égalité } k\binom{m}{k} = m\binom{m-1}{k-1} \textit{ en } m = n+1\textit{)} \\
\Leftrightarrow\ & \cancel{n\binom{n}{k-1}} + \binom{n}{k-1} - \binom{n+1}{k} = \cancel{n\binom{n}{k-1}} - \binom{n}{k} \\
\Leftrightarrow\ & \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k} && \textit{(en réordonnant)}
\end{aligned}$$

La dernière égalité n'est autre qu'une instance de la formule du triangle de Pascal.
La dernière égalité étant vérifiée, il en est de même de la première.

$$\boxed{\text{Ainsi, pour tout } k \in [\![2, n]\!] : \mathbb{P}([X_n = k]) = \frac{k-1}{n^k}\binom{n+1}{k}.}$$

× Si $k = n+1$:

- D'une part :

$$\begin{array}{rcll} \mathbb{P}([X_n = n+1]) & = & \mathbb{P}([X_n > n]) - \cancel{\mathbb{P}([X_n > n+1])} & \textit{(car } X_n \textit{ est à valeurs dans } [\![2, n+1]\!]\textit{)} \\ & = & \dfrac{1}{n^n} \dbinom{n+1}{n} & \textit{(d'après la question } \textbf{\textit{7.}}\textit{)} \end{array}$$

- D'autre part :

$$\frac{k-1}{n^k} \binom{n+1}{k} = \frac{(n+1)-1}{n^{n+1}} \binom{n+1}{n+1} = \frac{n}{n^{n+1}}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, la propriété est aussi vérifiée en } k = n+1.}$$

□

Partie III : Une convergence en loi

On s'intéresse dans cette partie à la suite de variables aléatoires $(X_n)_{n \geqslant 2}$.

11. Soit k un entier fixé supérieur ou égal à 2. Montrer : $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathbb{P}([X_n = k]) = \dfrac{k-1}{k!}$.

Démonstration.
Soit $k \geqslant 2$ et soit $n \geqslant k$.
(on peut prendre n aussi grand que souhaité car on s'intéresse à la limite lorsque n tend vers $+\infty$ d'une quantité dépendant de n)

D'après la question précédente, comme $k \in [\![2, n+1]\!]$:

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{P}([X_n = k]) & = & \dfrac{k-1}{n^k} \dbinom{n+1}{k} \\ & = & \dfrac{k-1}{n^k} \dfrac{(n+1)!}{k!\,((n+1)-k)!} \\ & = & \dfrac{k-1}{k!} \dfrac{\frac{(n+1)!}{(n+1-k)!}}{n^k} \\ & = & \dfrac{k-1}{k!} \dfrac{(n+1)\,n\,(n-1)\,\ldots\,((n+1)-(k-1))}{n^k} \\ & \underset{n \to +\infty}{\sim} & \dfrac{k-1}{k!} \dfrac{n^k}{n^k} = \dfrac{k-1}{k!} \end{array}$$

En effet, le numérateur apparaît comme produit de k termes tous équivalents, lorsque n est dans un voisinage de $+\infty$, à n.

$$\boxed{\text{Comme } \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{k-1}{k!} = \frac{k-1}{k!}, \text{ on a bien : } \lim\limits_{n \to +\infty} \mathbb{P}\big([X_n = k]\big) = \frac{k-1}{k!}.}$$

□

12. Montrer que la série $\sum_{k\geqslant 2} \dfrac{k-1}{k!}$ converge et calculer sa somme.
On admet qu'il existe une variable aléatoire Z à valeurs dans $[\![2,+\infty[\![$ telle que :

$$\forall k \in [\![2,+\infty[\![,\ \mathbb{P}([Z=k]) = \frac{k-1}{k!}$$

Démonstration.
Soit $N \geqslant 2$.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=2}^{N} \frac{k-1}{k!} &= \sum_{k=2}^{N} \frac{k}{k!} - \sum_{k=2}^{N} \frac{1}{k!} \\
&= \sum_{k=2}^{N} \frac{1}{(k-1)!} - \sum_{k=2}^{N} \frac{1}{k!} \\
&= \sum_{k=1}^{N-1} \frac{1}{k!} - \sum_{k=2}^{N} \frac{1}{k!} && \textit{(par décalage d'indice)} \\
&= \left(\sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{k!} - \cancel{\frac{1}{0!}}\right) - \left(\sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!} - \cancel{\frac{1}{0!}} - \frac{1}{1!}\right) \\
&= \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{k!} - \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!} + 1 \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} e^1 - e^1 + 1 = 1
\end{aligned}$$

Cette limite est obtenue en reconnaissant les sommes partielles d'ordre $N-1$ et N de la série exponentielle de paramètre 1 qui est une série convergente.

$$\boxed{\text{On en déduit que la série } \sum_{k\geqslant 2} \frac{k-1}{k!} \text{ est convergente, de somme } \sum_{k\geqslant 2}^{+\infty} \frac{k-1}{k!} = 1.}$$

Commentaire

- On prêtera toujours attention à la formulation des questions de l'énoncé. Une question du type « cette série est-elle convergente ? » suggère que la série en question ne l'est sans doute pas. On orientera donc ses recherches en ce sens dans un premier temps.
- Pour une question du type « montrer que cette série est convergente » sans que le calcul de somme soit demandé, on pensera en priorité à un théorème de comparaison des séries à termes positifs.
- Ici, on est confonté à la question « montrer que cette série est convergente et calculer sa somme ». Le calcul de la somme (comme limite de le somme partielle) démontre la convergence et fournit le résultat du calcul demandé. C'est cette méthode qu'il faut regarder en priorité pour ce type de questions.
- La deuxième partie de la question aurait pu être formulée sous la forme « démontrer que la suite $\left(\frac{k-1}{k!}\right)_{k\geqslant 2}$ fournit une loi de probabilité ». Il s'agit alors de démontrer :

$$\forall k \geqslant 2,\ \frac{k-1}{k!} \geqslant 0 \qquad \text{et} \qquad \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{k-1}{k!} \ = \ 1$$

C'est bien le cas ici. On considère alors une v.a.r. Z discrète qui suit cette loi.

□

13. Montrer que Z admet une espérance et la calculer. Comparer $\mathbb{E}(Z)$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{E}(X_n)$.

Démonstration.

- La v.a.r. Z admet une espérance si et seulement si la série $\sum\limits_{k\geqslant 2} k\mathbb{P}\big([Z=k]\big)$ est absolument convergente. Cette série étant à termes positifs, cela revient à démontrer qu'elle est convergente.
- Soit $N \geqslant 2$.

$$\begin{aligned}\sum_{k=2}^{N} k\, \mathbb{P}\big([Z=k]\big) &= \sum_{k=2}^{N} k\, \frac{k-1}{k!} \\ &= \sum_{k=2}^{N} \frac{k-1}{(k-1)!} \\ &= \sum_{k=2}^{N} \frac{1}{(k-2)!} \\ &= \sum_{k=0}^{N-2} \frac{1}{k!} \qquad \textit{(par décalage d'indice)}\end{aligned}$$

Or : $\sum\limits_{k=0}^{N-2} \frac{1}{k!} \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} \mathrm{e}^1$ en reconnaissant la somme partielle d'ordre $N-2$ de la série exponentielle de paramètre 1.

$$\boxed{\text{Ainsi, la v.a.r. admet une espérance et } \mathbb{E}(Z) = \mathrm{e}^1.}$$

- Par ailleurs, on a vu en question ***9.*** :

$$\mathbb{E}(X_n) = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \exp\left(n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)$$

Or : $n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} n\,\frac{1}{n} = 1$.

On en déduit, par composition de limite :

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}(X_n) = \lim_{n\to+\infty} \exp\left(n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right) = \mathrm{e}^1$$

$$\boxed{\text{Ainsi, } \mathbb{E}(Z) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}(X_n).}$$

Commentaire

On a démontré :

1) X_n converge en loi vers Z (question ***11.***),

2) $\mathbb{E}(X_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathbb{E}(Z)$ (dans cette question).

Cela pourrait laisser penser que **1)** implique **2)**... Il n'en est rien :

$$X_n \text{ converge en loi vers } Z \;\not\Rightarrow\; \mathbb{E}(X_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathbb{E}(Z)$$

De manière générale, on retiendra que la convergence en loi **n'implique pas** la convergence des moments (et vice versa évidemment).

□

EML 2017 - tirages avec rajout dans une urne, loi de Bernoulli, couple de v.a.r. discrètes, convergence en loi

On considère une urne contenant initialement une boule bleue et deux boules rouges.
On effectue, dans cette urne, des tirages successifs de la façon suivante : on pioche une boule au hasard et on note sa couleur, puis on la replace dans l'urne en ajoutant une boule de la même couleur que celle qui vient d'être obtenue.

Pour tout k de $\mathbb{N}^*$, on note : B_k l'événement : « on obtient une boule bleue au $k^{\text{ème}}$ tirage »,
R_k l'événement : « on obtient une boule rouge au $k^{\text{ème}}$ tirage ».

Partie I : Simulation informatique

1. Recopier et compléter la fonction suivante afin qu'elle simule l'expérience étudiée et renvoie le nombre de boules rouges obtenues lors des n premiers tirages, l'entier n étant entré en argument.

```
def EML(n):
    b = 1 # b désigne le nombre de boules bleues présentes dans l'urne
    r = 2 # r désigne le nombre de boules rouges présentes dans l'urne
    s = 0 # s désigne le nombre de boules rouges obtenues lors des n tirages
    for k in range(n):
        x = rd.random()
        if _______________:
            ___________
            ___________
        else:
            ___________
    return s
```

Démonstration.

- Le programme consiste, au fur et à mesure des tirages :
  - × à mettre à jour les variables `b` et `r`, désignant respectivement le nombre de boules bleues et le nombre de boules rouges présentes dans l'urne.
  - × à comptabiliser le nombre `s` de boules rouges tirées.
- L'instruction `rd.random()` permet de simuler une v.a.r. de loi uniforme sur $]0,1[$.
  Le résultat obtenu (stocké dans la variable `x`) va permettre de simuler le tirage :
  - × si $\texttt{x} \in \,]0, \frac{\texttt{b}}{\texttt{b+r}}[$, on considère qu'on a tiré une boule bleue dans l'urne. Dans ce cas :

    on ajoute une boule bleue dans l'urne : `b = b+1`.

    on ne modifie pas le nombre de boules rouges de l'urne.

    on ne modifie pas le nombre de boules rouges tirées.

    ($\frac{\texttt{b}}{\texttt{b+r}}$ est la proportion de boules bleues dans l'urne)
  - × si $\texttt{x} \in [\frac{\texttt{b}}{\texttt{b+r}}, 1[$, on considère qu'on a tiré une boule rouge dans l'urne. Dans ce cas :

    on ajoute une boule rouge dans l'urne : `r = r+1`.

    on ne modifie pas le nombre de boules bleues de l'urne.

    on met à jour le nombre de boules rouges tirées : `s = s+1`.

    ($1 - \frac{\texttt{b}}{\texttt{b+r}} = \frac{\texttt{r}}{\texttt{b+r}}$ est la proportion de boules rouges dans l'urne)

En résumé, on obtient :

```
        if x < r/(r+b):
            r = r+1
            s = s+1
        else:
            b = b+1
```

□

2. On exécute le programme suivant :

```
1 n = 10
2 m = 0
3 for i in range(1000):
4     m = m + EML(n)
5 print(m/1000)
```

On obtient 6.657. Comment interpréter ce résultat ?

Démonstration.

- La fonction `EML` permet de simuler la v.a.r. S_n (introduite plus tard dans l'énoncé) égale au nombre de boules rouges obtenues au cours des n premiers tirages.
- Le programme consiste à simuler (à l'aide de l'appel `EML(10)`) un grand nombre de fois ($N = 1000$ est ce grand nombre) la v.a.r. S_{10}.
  Formellement, on souhaite obtenir un N-uplet $(v_1, \dots, v_N)$ qui correspond à l'observation d'un N-échantillon $(V_1, \dots, V_N)$ de la v.a.r. S_{10}.
  (cela signifie que les v.a.r. V_1, ..., V_N sont indépendantes et sont de même loi que S_{10})
- La variable `m`, initialisée à 0, est mise à jour à chaque tour de boucle i par l'ajout de la dernière valeur v_i créée. De sorte que, à l'issue de la boucle, la variable `m` contient : $\sum\limits_{i=1}^{N} v_i$.
- Enfin, en ligne 5, l'instruction `disp(m/1000)` permet de réaliser l'affichage de la division par 1000 de la valeur contenue dans `m`. C'est donc la valeur : $\dfrac{1}{N} \sum\limits_{i=1}^{N} v_i$ qui est affichée.
  Il s'agit de la moyenne empirique des N simulations de la v.a.r. S_{10}.
- Or, en vertu de la loi faible des grands nombres (LfGN) :

$$\text{moyenne de l'observation} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} v_i \ \simeq \ \mathbb{E}(S_{10})$$

Le programme fournit une approximation de $\mathbb{E}(S_{10})$. Le résultat obtenu : $\mathbb{E}(S_{10}) \simeq 6.657$ signifie qu'on obtient en moyenne un peu moins de 7 boules rouges lorsque l'on procède à 10 tirages successifs (en respectant le protocole de l'énoncé) dans l'urne.

Commentaire

Comme $6.657 \simeq \dfrac{2}{3} \times 10$, on peut faire l'hypothèse que : $\mathbb{E}(S_n) = \dfrac{2}{3} \times n$.
Ceci semble être le cas puisque la question ***9.*** demande justement de démontrer cette égalité. □

Partie II : Rang d'apparition de la première boule bleue et rang d'apparition de la première boule rouge

On définit la variable aléatoire Y égale au rang d'apparition de la première boule bleue et la variable aléatoire Z égale au rang d'apparition de la première boule rouge.

3. a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \ \mathbb{P}([Y = n]) = \dfrac{2}{(n+1)(n+2)}$.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- Si $n \geqslant 2$, $[Y = n] = R_1 \cap \ldots \cap R_{n-1} \cap B_n$.
  D'après la formule des probabilités composées :

$$\begin{aligned}
& \mathbb{P}([Y = n]) \\
= \ & \mathbb{P}(R_1 \cap \ldots \cap R_{n-1} \cap B_n) \\
= \ & \mathbb{P}(R_1) \times \mathbb{P}_{R_1}(R_2) \times \mathbb{P}_{R_1 \cap R_2}(R_3) \times \ldots \times \mathbb{P}_{R_1 \cap \ldots \cap R_{n-2}}(R_{n-1}) \times \mathbb{P}_{R_1 \cap \ldots \cap R_{n-1}}(B_n) \\
= \ & \frac{2}{\cancel{3}} \times \frac{\cancel{3}}{\cancel{4}} \times \frac{\cancel{4}}{\cancel{5}} \times \ldots \times \frac{\cancel{n}}{n+1} \times \frac{1}{n+2} \\
= \ & \frac{2}{(n+1)(n+2)}
\end{aligned}$$

- On a utilisé dans l'écriture précédente, pour tout $k \in [\![2, n-1]\!]$, l'égalité :

$$\mathbb{P}_{R_1 \cap \ldots \cap R_{k-1}}(R_k) = \frac{k+1}{k+2}$$

  En effet, si l'événement $R_1 \cap \ldots \cap R_{k-1}$ est réalisé c'est qu'on a tiré une boule rouge lors de chacun des $k-1$ premiers tirages. Juste avant le $k^{\text{ème}}$ tirage, l'urne est alors constituée de :
  × $2 + (k-1) = k+1$ boules rouges,
  × une seule boule bleue,
  × $(k+1) + 1 = k+2$ boules en tout.

- On note enfin que l'utilisation de la formule des probabilités composées est valide puisque : $\mathbb{P}(R_1 \cap \ldots \cap R_{n-1}) = \dfrac{2}{n+1} \neq 0$.

- Si $n = 1$, $[Y = 1] = B_1$. Ainsi : $\mathbb{P}([Y = 1]) = \mathbb{P}(B_1) = \dfrac{1}{3}$.
  Or : $\dfrac{2}{(1+1)(1+2)} = \dfrac{2}{2 \times 3} = \dfrac{1}{3}$.
  On en déduit que l'égalité de l'énoncé est vérifiée pour $n = 1$.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \ \mathbb{P}([Y = n]) = \frac{2}{(n+1)(n+2)}}$$

□

b) La variable aléatoire Y admet-elle une espérance ? une variance ?

Démonstration.

- Tout d'abord : $Y(\Omega) = \mathbb{N}^*$.
  En effet, la première boule bleue peut apparaître lors de n'importe quel tirage.
- La v.a.r. Y admet une espérance si et seulement si la série $\sum\limits_{n \geqslant 1} n \, \dfrac{2}{(n+1)(n+2)}$ est absolument convergente. Ceci revient à démontrer la convergence de la série $\sum\limits_{n \geqslant 1} \dfrac{n}{(n+1)(n+2)}$ puisque :
  × c'est une série à termes positifs,
  × on ne change pas la nature d'une série en multipliant son terme général par un réel non nul.
- Enfin :
$$\frac{n}{(n+1)(n+2)} \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n} \ (\geqslant 0)$$
  Or la série $\sum\limits_{n \geqslant 1} \dfrac{1}{n}$ est divergente.
  Ainsi, par critère d'équivalence des séries à termes positifs, la série $\sum\limits_{n \geqslant 1} n \, \dfrac{2}{(n+1)(n+2)}$ est elle aussi divergente.

  $\boxed{\text{La v.a.r. } Y \text{ n'admet donc pas d'espérance.}}$
- La v.a.r. Y n'admet pas de moment d'ordre 1, donc elle n'admet pas de moments aux ordres supérieurs.

  $\boxed{\text{On en déduit que } Y \text{ n'admet pas de variance.}}$

□

4. Déterminer la loi de Z. La v.a.r. admet-elle une espérance ? une variance ?

Démonstration.

- Tout d'abord : $Z(\Omega) = \mathbb{N}^*$.
  En effet, la première boule rouge peut apparaître lors de n'importe quel tirage.
  Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
- Si $n \geqslant 2$, $[Z = n] = B_1 \cap \ldots \cap B_{n-1} \cap R_n$.
  En raisonnant comme dans la question précédente, on trouve, à l'aide de la formule des probabilités composées :
$$\begin{aligned}
& \mathbb{P}([Z=n]) \\
= \ & \mathbb{P}(B_1 \cap \ldots \cap B_{n-1} \cap R_n) \\
= \ & \mathbb{P}(B_1) \times \mathbb{P}_{B_1}(B_2) \times \mathbb{P}_{B_1 \cap B_2}(B_3) \times \ldots \times \mathbb{P}_{B_1 \cap \ldots \cap B_{n-2}}(B_{n-1}) \times \mathbb{P}_{B_1 \cap \ldots \cap B_{n-1}}(R_n) \\
= \ & \frac{1}{3} \times \frac{2}{4} \times \frac{3}{5} \times \ldots \times \frac{n-1}{n+1} \times \frac{2}{n+2} \\
= \ & \frac{1 \times 2 \times \ldots \times (n-1)}{3 \times 4 \times \ldots \times (n+1)} \, \frac{2}{n+2} = 2 \, (n-1)! \, \frac{2}{2 \times 3 \times 4 \times \ldots \times (n+1) \times (n+2)} \\
= \ & 4 \, \frac{(n-1)!}{(n+2)!} = \frac{4}{n(n+1)(n+2)}
\end{aligned}$$
- Si $n = 1$, $[Z = 1] = R_1$. Donc : $\mathbb{P}([Z = 1]) = \mathbb{P}(R_1) = \dfrac{2}{3}$.
  On en déduit que la formule précédente est vérifiée pour $n = 1$.

$$\boxed{\text{Ainsi, } Z(\Omega) = \mathbb{N}^* \text{ et} : \forall n \in \mathbb{N}^*, \ \mathbb{P}([Z=n]) = \frac{4}{n(n+1)(n+2)}.}$$

- Soit $k \in \mathbb{N}$. La v.a.r. Z admet un moment d'ordre k si et seulement si la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} n^k \dfrac{4}{n(n+1)(n+2)}$ est absolument convergente. Ceci revient à démontrer la convergence de la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{n^k}{n(n+1)(n+2)}$, car elle est à termes positifs.
- Enfin :

$$\frac{n^k}{(n+1)(n+2)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^k}{n^3} = \frac{1}{n^{3-k}} \quad (\geqslant 0)$$

Or la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n^{3-k}}$ est une série de Riemann d'exposant $3-k$.
Elle est donc convergente si et seulement si $3-k > 1$ soit $k < 2$.
Ainsi, par critère d'équivalence des séries à termes positifs, la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} n^k \dfrac{4}{n(n+1)(n+2)}$ est convergente si et seulement si $k < 2$.

Ainsi, la v.a.r. Z admet un moment d'ordre 1 (et donc une espérance) mais n'admet pas de moment d'ordre 2 (et donc de variance).

□

Partie III : Nombre de boules rouges obtenues au cours de n tirages

On définit, pour tout k de $\mathbb{N}^*$, la variable aléatoire X_k égale à 1 si l'on obtient une boule rouge au $k^{\text{ème}}$ tirage et égale à 0 sinon.
On définit, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, la variable aléatoire S_n égale au nombre de boules rouges obtenues au cours des n premiers tirages.

5. Donner, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, une relation entre S_n et certaines variables aléatoires X_k pour $k \in \mathbb{N}^*$.

Démonstration.

$$\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}^*,\ S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k.}$$

□

6. Déterminer la loi de X_1, son espérance et sa variance.

Démonstration.

- D'après l'énoncé, $X_1(\Omega) = \{0, 1\}$.
- De plus : $[X_1 = 1] = R_1$ et $[X_1 = 0] = B_1$.
Initialement, l'urne contient 2 boules rouges et une boule bleue. On en déduit :

$$\mathbb{P}([X_1 = 1]) = \mathbb{P}(R_1) = \frac{2}{3} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}([X_1 = 0]) = \mathbb{P}(B_1) = \frac{1}{3}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, } X_1 \hookrightarrow \mathcal{B}\left(\frac{2}{3}\right). \text{ On en déduit : } \mathbb{E}(X_1) = \frac{2}{3} \text{ et } \mathbb{V}(X_1) = \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{2}{9}.}$$

□

7. a) Déterminer la loi du couple (X_1, X_2).

Démonstration.

- D'après l'énoncé, $X_1(\Omega) = X_2(\Omega) = \{0, 1\}$.
- Soit $i \in [\![0, 1]\!]$ et soit $j \in [\![0, 1]\!]$. Comme $\mathbb{P}([X_1 = i]) \neq 0$:

$$\mathbb{P}([X_1 = i] \cap [X_2 = j]) = \mathbb{P}([X_1 = i]) \times \mathbb{P}_{[X_1=i]}([X_2 = j])$$

- Si $i = 0$:
  $\times$ $\mathbb{P}([X_1 = 0] \cap [X_2 = 0]) = \mathbb{P}([X_1 = 0]) \times \mathbb{P}_{[X_1=0]}([X_2 = 0]) = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{6}$.
  $\times$ $\mathbb{P}([X_1 = 0] \cap [X_2 = 1]) = \mathbb{P}([X_1 = 0]) \times \mathbb{P}_{[X_1=0]}([X_2 = 1]) = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{6}$.
  En effet, si l'événement $[X_1 = 0]$ est réalisé, c'est qu'on a tiré une boule bleue au premier tirage. Lors du deuxième tirage, l'urne contient alors 2 boules rouges et 2 boules bleues.
- Si $i = 1$, on obtient de même :
  $\times$ $\mathbb{P}([X_1 = 1] \cap [X_2 = 0]) = \mathbb{P}([X_1 = 0]) \times \mathbb{P}_{[X_1=1]}([X_2 = 0]) = \dfrac{2}{3} \times \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{6}$.
  $\times$ $\mathbb{P}([X_1 = 1] \cap [X_2 = 1]) = \mathbb{P}([X_1 = 0]) \times \mathbb{P}_{[X_1=1]}([X_2 = 1]) = \dfrac{2}{3} \times \dfrac{3}{4} = \dfrac{1}{2}$.
  En effet, si l'événement $[X_1 = 1]$ est réalisé, c'est qu'on a tiré une boule rouge au premier tirage. Lors du deuxième tirage, l'urne contient alors 3 boules rouges et 1 boule bleue.
- En résumé, la loi du couple (X_1, X_2) est donnée par le tableau suivant.

$x \in X_1(\Omega)$ \ $y \in X_2(\Omega)$	0	1
0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$
1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$

□

b) En déduire la loi de X_2.

Démonstration.

- La famille $([X_1 = 0], [X_1 = 1])$ forme un système complet d'événements.
  D'après la formule des probabilités totales :

$$\mathbb{P}([X_2 = 0]) = \mathbb{P}([X_1 = 0] \cap [X_2 = 0]) + \mathbb{P}([X_1 = 1] \cap [X_2 = 0]) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$$

- Enfin :

$$\mathbb{P}([X_2 = 1]) = 1 - \mathbb{P}([X_2 = 0]) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, } X_2 \hookrightarrow \mathcal{B}\left(\frac{2}{3}\right).}$$

Commentaire

On note au passage que les v.a.r. X_1 et X_2 ont même loi.

Commentaire

Cela correspond à sommer les colonnes du tableau précédent. Plus précisément :

$y \in X_2(\Omega)$ / $x \in X_1(\Omega)$	0	1
0	$\dfrac{1}{6}$	$\dfrac{1}{6}$
1	$\dfrac{1}{6}$	$\dfrac{1}{2}$
$\mathbb{P}([X_2 = y])$	$\dfrac{1}{3}$	$\dfrac{2}{3}$

$\square$

c) Les variables X_1 et X_2 sont-elles indépendantes ?

Démonstration.
On remarque :

$$\mathbb{P}([X_1 = 0] \cap [X_2 = 0]) = \frac{1}{6} \neq \frac{1}{9} = \mathbb{P}([X_1 = 0]) \times \mathbb{P}([X_2 = 0])$$

$$\boxed{\text{On en déduit que les v.a.r. } X_1 \text{ et } X_2 \text{ ne sont pas indépendantes.}}$$

Commentaire

Ce résultat semble logique : le résultat du premier tirage influe sur le contenu de l'urne (ajout d'une boule bleue ou rouge) avant le deuxième tirage.

$\square$

8. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in [\![0, n]\!]$.

a) Calculer $\mathbb{P}(R_1 \cap \ldots \cap R_k \cap B_{k+1} \cap \ldots \cap B_n)$.

Démonstration.
On considère ici que $n \geqslant 2$ et $k \in [\![1, n-1]\!]$.
(on reviendra sur ce point dans la remarque)

- Notons $A_k = R_1 \cap \ldots \cap R_k$. D'après la formule des probabilités composées :

$$\begin{aligned}
& \mathbb{P}(R_1 \cap \ldots \cap R_k \cap B_{k+1} \cap \ldots \cap B_n) \\
= \ & \mathbb{P}(A_k \cap B_{k+1} \cap \ldots \cap B_n) \\
= \ & \mathbb{P}(A_k) \times \mathbb{P}_{A_k}(B_{k+1}) \times \mathbb{P}_{A_k \cap B_{k+1}}(B_{k+2}) \times \ldots \times \mathbb{P}_{A_k \cap B_{k+1} \cap \ldots \cap B_{n-1}}(B_n) \\
= \ & \frac{2}{k+2} \times \frac{1}{k+3} \times \frac{2}{k+4} \times \ldots \times \frac{n-k}{n+2} \\
= \ & 2 \, \frac{(k+1)!}{(k+1)!} \, \frac{1 \times 2 \times \ldots \times (n-k)}{(k+2) \times (k+3) \times \ldots \times (n+2)} \\
= \ & 2 \, \frac{(k+1)! \, (n-k)!}{(n+2)!}
\end{aligned}$$

- En effet, d'après la question ***3.a)***, on sait :

$$\mathbb{P}(A_k) = \mathbb{P}(R_1 \cap \ldots \cap R_k) = \frac{2}{k+2}$$

- D'autre part, on a utilisé le fait, que pour tout $j \in [\![1, n-k]\!]$:

$$\mathbb{P}_{A_k \cap B_{k+1} \cap \ldots \cap B_{k+(j-1)}}(B_{k+j}) = \frac{j}{k+j+2}$$

En effet, si l'événement $A_k \cap B_{k+1} \cap \ldots \cap B_{k+(j-1)}$ est réalisé c'est qu'on a tiré k boules rouges suivies de $j-1$ boules bleues. Juste avant le $(k+j)^{\text{ème}}$ tirage, l'urne est alors constituée de :

× $2 + k = k + 2$ boules rouges,

× $1 + (j-1) = j$ boules bleues,

× et donc de $(k+2) + j = k + j + 2$ boules en tout.

- On note enfin que l'utilisation de la formule des probabilités composées est valide puisque : $\mathbb{P}(A_k \cap B_{k+1} \cap \ldots \cap B_n) \neq 0$.

Pour tout $n \geqslant 2$ et pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$:

$$\boxed{\mathbb{P}(R_1 \cap \ldots \cap R_k \cap B_{k+1} \cap \ldots \cap B_n) = 2\ \frac{(k+1)!\ (n-k)!}{(n+2)!}}$$

Commentaire

- Il y avait plusieurs problèmes de définition concernant cette question. Faire varier k dans $[\![0, n]\!]$ n'a pas vraiment de sens puisque l'on peut alors former dans l'intersection d'événements :

  × R_0 qui n'est pas défini dans l'énoncé,

  × B_{n+1} alors que l'on s'arrête à B_n.

- Pour autant, ce n'est pas à proprement parler une erreur de l'énoncé.
  On doit en fait deviner ce que le concepteur a voulu modéliser :

  × si $k = 0$, l'événement considéré est $B_1 \cap \ldots \cap B_n$, et il est réalisé si on a tiré successivement n boules bleues lors des n premiers tirages.

  × si $k = n$, l'événement considéré est $R_1 \cap \ldots \cap R_n$, et il est réalisé si on a tiré successivement n boules rouges lors des n premiers tirages.

- On comprend alors mieux le cas $n = 1$: pour $k = 0$, on cherche la probabilité $\mathbb{P}(B_1)$ et pour $k = 1$, on cherche la probabilité $\mathbb{P}(R_1)$.
- Il faut enfin noter que la formule donnée dans ce corrigé reste valide pour ces deux cas limites. Par exemple, si $k = 0$, d'après la question ***4.*** :

$$\mathbb{P}(B_1 \cap \ldots \cap B_n) = 2\ \frac{n!}{(n+2)!}$$

et la formule précédente donne : $2\ \dfrac{(0+1)!(n-0)!}{(n+2)!} = 2\ \dfrac{n!}{(n+2)!}$.

- On laisse le soin au lecteur de vérifier les autres cas.

□

b) Justifier : $\mathbb{P}([S_n = k]) = \dbinom{n}{k}\ \mathbb{P}(R_1 \cap \ldots \cap R_k \cap B_{k+1} \cap \ldots \cap B_n)$,

puis en déduire : $\mathbb{P}([S_n = k]) = \dfrac{2(k+1)}{(n+1)(n+2)}$.

Démonstration.

- L'événement $[S_n = k]$ est réalisé par tous les n-tirages (successions de n tirages) qui contiennent k boules rouges. Un tel n-tirage est entièrement déterminé par :
  - × la position des k boules rouges.
    Autrement dit, le choix de k places parmi les n disponibles : $\dbinom{n}{k}$ possibilités.

  Il y a donc $\dbinom{n}{k}$ tels n-tirages en tout.
- Chacun de ces n-tirages a la même probabilité d'apparaître puisque l'ordre dans lequel les k boules rouges sont tirées n'a pas d'influence sur le résultat. Plus précisément :
  - × que l'on tire une boule rouge ou bleue, on ajoute toujours une boule dans l'urne.
  - × si l'on tire une boule bleue, seul le nombre de boules bleues est modifié pour les tirages suivants.
  - × si l'on tire une boule rouge, seul le nombre de boules rouges est modifié pour les tirages suivants.

  Ainsi, en reprenant la question ***8.a)*** avec des R_i (k tels événements présents) et B_j ($n-k$ tels événements présents) placés dans un ordre différent, on obtient la même probabilité.
  Par exemple :

$$\mathbb{P}(B_1 \cap \ldots \cap B_{n-k} \cap R_{n-k+1} \cap \ldots \cap R_n) = 2\ \frac{(k+1)!(n-k)!}{(n+2)!} = \mathbb{P}(R_1 \cap \ldots \cap R_k \cap B_{k+1} \cap \ldots \cap B_n)$$

$$\boxed{\text{On en conclut : } \mathbb{P}([S_n = k]) = \binom{n}{k}\ \mathbb{P}(R_1 \cap \ldots \cap R_k \cap B_{k+1} \cap \ldots \cap B_n).}$$

- Enfin, d'après la question ***8.a)*** :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([S_n = k]) &= \binom{n}{k}\ \mathbb{P}(R_1 \cap \ldots \cap R_k \cap B_{k+1} \cap \ldots \cap B_n) \\
&= \frac{n!}{k!\ \cancel{(n-k)!}}\ 2\ \frac{(k+1)!\ \cancel{(n-k)!}}{(n+2)!} \\
&= 2\ \frac{n!}{(n+2)!}\ \frac{(k+1)!}{k!} \\
&= 2\ \frac{k+1}{(n+1)(n+2)}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{P}([S_n = k]) = 2\ \frac{k+1}{(n+1)(n+2)}}$$

□

9. Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, S_n admet une espérance et : $\mathbb{E}(S_n) = \dfrac{2n}{3}$.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- $S_n(\Omega) = [\![0, n]\!]$. Ainsi, S_n admet une espérance en tant que v.a.r. discrète finie.
- Par définition :

$$\begin{array}{rcll}
\mathbb{E}(S_n) & = & \sum\limits_{k=0}^{n} k \, \mathbb{P}([S_n = k]) & \\
& = & \sum\limits_{k=0}^{n} 2k \dfrac{k+1}{(n+1)(n+2)} & \textit{(d'après la question } \textbf{\textit{8.b)}}\textit{)} \\
& = & \dfrac{2}{(n+1)(n+2)} \sum\limits_{k=1}^{n} k(k+1) \;=\; \dfrac{2}{(n+1)(n+2)} \sum\limits_{k=1}^{n} (k^2+k) & \\
& = & \dfrac{2}{\cancel{(n+1)}(n+2)} \left(\dfrac{n\cancel{(n+1)}(2n+1)}{6} + \dfrac{n\cancel{(n+1)}}{2} \right) & \\
& = & \dfrac{\cancel{2}}{(n+2)} \left(\dfrac{n(2n+1)}{3.\cancel{2}} + \dfrac{n}{\cancel{2}} \right) \;=\; \dfrac{1}{(n+2)} \left(\dfrac{n(2n+1)+3n}{3} \right) & \\
& = & \dfrac{1}{\cancel{(n+2)}} \dfrac{2n\cancel{(n+2)}}{3} \;=\; \dfrac{2n}{3} &
\end{array}$$

$$\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}^*, \ \mathbb{E}(S_n) = \dfrac{2n}{3}.}$$

□

10. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Montrer : $\forall k \in [\![0, n]\!], \ \mathbb{P}_{[S_n = k]}([X_{n+1} = 1]) = \dfrac{k+2}{n+3}$.

Démonstration.
Soit $k \in [\![0, n]\!]$.

- Si l'événement $[S_n = k]$ est réalisé, cela signifie qu'on a obtenu k boules rouges au cours des n premiers tirages (et donc $n-k$ boules bleues). Ainsi, à l'issue du $n^{\text{ème}}$ tirage, l'urne contient :
  - × $2+k$ boules rouges (les 2 boules rouges initialement présentes dans l'urne et les k boules rouges ajoutées lors des tirages),
  - × $1+(n-k)$ boules bleues (la boule bleue présente initialement dans l'urne et les $n-k$ boules bleues ajoutées lors des tirages).

  L'urne contient donc en tout $(2+\cancel{k}) + (1+n-\cancel{k}) = n+3$ boules.
- Le tirage de chaque boule est équiprobable, donc la probabilité d'obtenir une boule rouge au $(n+1)^{\text{ème}}$ tirage, sachant que l'événement $[S_n = k]$ est réalisé, est $\dfrac{k+2}{n+3}$.

$$\boxed{\forall k \in [\![0, n]\!], \ \mathbb{P}_{[S_n = k]}([X_{n+1} = 1]) = \dfrac{k+2}{n+3}}$$

□

b) En déduire : $\mathbb{P}([X_{n+1} = 1]) = \dfrac{\mathbb{E}(S_n) + 2}{n+3}$.

Démonstration.
La famille $([S_n = k])_{k \in [\![0,n]\!]}$ forme un système complet d'événements.
D'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([X_{n+1} = 1]) &= \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}([X_{n+1} = 1] \cap [S_n = k]) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}_{[S_n = k]}([X_{n+1} = 1])\, \mathbb{P}([S_n = k]) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{k+2}{n+3} \mathbb{P}([S_n = k]) \\
&= \frac{1}{n+3} \left(\sum_{k=0}^{n} k\, \mathbb{P}([S_n = k]) + 2 \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}([S_n = k]) \right) \\
&= \frac{1}{n+3} (\mathbb{E}(S_n) + 2 \times 1) \qquad \textit{(car } ([S_n = k])_{k \in [\![0,n]\!]} \textit{ est un système complet d'événements)}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{P}([X_{n+1} = 1]) = \frac{\mathbb{E}(S_n) + 2}{n+3}}$$

□

c) Déterminer alors la loi de la variable aléatoire X_{n+1}. Que remarque-t-on ?

Démonstration.

- $X_{n+1}(\Omega) = \{0, 1\}$
- Donc la v.a.r. X_{n+1} suit une loi de Bernoulli de paramètre :

$$p = \mathbb{P}([X_{n+1} = 1]) = \frac{\mathbb{E}(S_n) + 2}{n+3} = \frac{\frac{2n}{3} + 2}{n+3} = \frac{1}{3} \frac{2n+6}{n+3} = \frac{1}{3} \frac{2\cancel{(n+3)}}{\cancel{n+3}} = \frac{2}{3}.$$

$$\boxed{\text{La v.a.r. } X_{n+1} \text{ suit une loi de Bernoulli de paramètre } \frac{2}{3}.}$$

$$\boxed{\text{On remarque que la loi de } X_{n+1} \text{ ne dépend pas du nombre } n \text{ de tirages.}}$$

□

Partie IV : Étude d'une convergence en loi

On s'intéresse dans cette partie à la proportion de boules rouges obtenues lors des n premiers tirages.

On pose, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $T_n = \dfrac{S_n}{n}$.

11. Justifier, pour tout n de $\mathbb{N}^*$: $\forall x < 0$, $\mathbb{P}([T_n \leqslant x]) = 0$, et : $\forall x > 1$, $\mathbb{P}([T_n \leqslant x]) = 1$.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
On sait déjà : $S_n(\Omega) = [\![0, n]\!] = \{0, 1, 2, \dots, n-1, n\}$.

$$\boxed{\text{Donc : } T_n(\Omega) = \left\{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}, 1\right\} \subset [0, 1].}$$

- Soit $x < 0$. Alors $[T_n \leqslant x] = \varnothing$, car $T_n(\Omega) \subset [0, 1]$. On a alors :

$$\mathbb{P}([T_n \leqslant x]) = \mathbb{P}(\varnothing) = 0$$

- Soit $x > 1$. Alors $[T_n \leqslant x] = \Omega$, car $T_n(\Omega) \subset [0,1]$. On a alors :

$$\mathbb{P}([T_n \leqslant x]) = \mathbb{P}(\Omega) = 0$$

$$\boxed{\text{Donc } \forall x < 0,\ \mathbb{P}([T_n \leqslant x]) = 0 \text{ et } \forall x > 1,\ \mathbb{P}([T_n \leqslant x]) = 1.}$$

□

12. Soit $x \in [0,1]$. Montrer, pour tout n de $\mathbb{N}^*$:

$$\mathbb{P}([T_n \leqslant x]) = \frac{(\lfloor nx \rfloor + 1)(\lfloor nx \rfloor + 2)}{(n+1)(n+2)},$$

où $\lfloor . \rfloor$ désigne la fonction partie entière.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([T_n \leqslant x]) &= \mathbb{P}\left(\left[\frac{S_n}{n} \leqslant x\right]\right) = \mathbb{P}([S_n \leqslant nx]) \\
&= \mathbb{P}([S_n \leqslant \lfloor nx \rfloor]) && \textit{(car } S_n \textit{ est une v.a.r. à valeurs entières)} \\
&= \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=0}^{\lfloor nx \rfloor} [S_n = k]\right) \\
&= \sum_{k=0}^{\lfloor nx \rfloor} \mathbb{P}([S_n = k]) && \textit{(par réunion d'événements incompatibles)} \\
&= \sum_{k=0}^{\lfloor nx \rfloor} 2\frac{k+1}{(n+1)(n+2)} \\
&= \frac{2}{(n+1)(n+2)} \sum_{k=0}^{\lfloor nx \rfloor} (k+1) \\
&= \frac{2}{(n+1)(n+2)} \sum_{k=1}^{\lfloor nx \rfloor + 1} k \\
&= \frac{\cancel{2}}{(n+1)(n+2)} \frac{(\lfloor nx \rfloor + 1)(\lfloor nx \rfloor + 2)}{\cancel{2}}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}([T_n \leqslant x]) = \frac{(\lfloor nx \rfloor + 1)(\lfloor nx \rfloor + 2)}{(n+1)(n+2)}.}$$

□

13. En déduire que la suite de variables aléatoires $(T_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire à densité, dont on précisera la fonction de répartition et une densité.

Démonstration.

- × Soit $x < 0$. $\mathbb{P}([T_n \leqslant x]) = 0$ d'après la question ***11***. Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathbb{P}([T_n \leqslant x]) = 0$.
  × Soit $x > 1$. $\mathbb{P}([T_n \leqslant x]) = 1$, toujours d'après la question ***11***. Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathbb{P}([T_n \leqslant x]) = 1$.
  × Soit $x \in [0,1]$.
  Par définition de la partie entière : $nx - 1 < \lfloor nx \rfloor \leqslant nx$. Donc :

$$nx < \lfloor nx \rfloor + 1 \leqslant nx + 1, \quad \text{d'où} \quad \frac{nx}{n+1} < \frac{\lfloor nx \rfloor + 1}{n+1} \leqslant \frac{nx+1}{n+1}$$

Or : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{nx}{n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\cancel{n}x}{\cancel{n}} = x$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{nx+1}{n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\cancel{n}x}{\cancel{n}} = x$.

Donc, par théorème d'encadrement : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\lfloor nx \rfloor + 1}{n+1} = x$.

De même : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\lfloor nx \rfloor + 2}{n+2} = x$.

Ainsi : $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}([T_n \leqslant x]) = x^2$.

Finalement, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}([T_n \leqslant x])) = F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x^2 & \text{si } x \in [0,1] \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

- Montrons que F est la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité.
  - × F est une fonction croissante.
  - × $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = 1$.
  - × F est continue sur $]-\infty, 0[$, sur $]0,1[$ et sur $]1, +\infty[$.
    De plus $\lim\limits_{x\to 0^-} F(x) = 0 = 0^2 = F(0)$ et $\lim\limits_{x\to 1^+} F(x) = 1 = 1^2 = F(1)$.
    Donc F est continue sur $\mathbb{R}$.
  - × F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, sauf éventuellement en 0 et en 1.

  Finalement F est la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité.
- Déterminons une densité f associée à F.
  Pour déterminer une densité de F, on dérive F sur des intervalles **ouverts**. Soit $x \in \mathbb{R}$.
  - × Si $x \in \,]-\infty, 0[$: $f(x) = F'(x) = 0$.
  - × Si $x \in \,]1, +\infty[$: $f(x) = F'(x) = 0$.
  - × Si $x \in \,]0,1[$: $f(x) = F'(x) = 2x$.
  - × On choisit des valeurs arbitraires pour f en 0 et 1 : $f(0) = 0$ et $f(1) = 2$.

$(T_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire à densité de fonction de répartition :

$$F : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x^2 & \text{si } x \in [0,1] \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases} \text{ et de densité } f : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 2x & \text{si } x \in [0,1] \\ 0 & \text{si } x > 1 \end{cases}.$$

Commentaire

- Le programme officiel liste certaines propriétés d'une fonction de répartition F :
  1. F est croissante.
  2. F est continue à droite en tout point.
  3. $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = 1$.
  4. $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = 0$.

  Cependant, il n'est pas précisé qu'il s'agit là d'une caractérisation d'une fonction de répartition : toute fonction $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui vérifie les propriétés *1.*, *2.*, *3.* et *4.* peut être considérée comme la fonction de répartition d'une variable aléatoire.
- L'utilisation de la caractérisation ci-dessus ne semble apparaître que dans ce type de question traitant de la convergence en loi. Ce type de question apparaît aussi dans le sujet d'`EML 2016`.
  Il est donc conseillé de connaître la caractérisation ci-dessus.

□

ESCP 2001 - tirages sans remise dans une urne, couple de v.a.r. discrètes, loi uniforme discrète

Préliminaire

1. Montrer, pour tout entier naturel non nul n, l'égalité : $\sum\limits_{k=1}^{n} k^3 = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$.

Démonstration.
Démontrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{P}(n)$ où $\mathcal{P}(n)$: $\sum\limits_{k=1}^{n} k^3 = \dfrac{n^2\,(n+1)^2}{4}$.

▸ **Initialisation**

- D'une part : $\sum\limits_{k=1}^{1} k^3 \;=\; 1^3 \;=\; 1$.
- D'autre part : $\dfrac{1^2\ (1+1)^2}{4} \;=\; \dfrac{4}{4} \;=\; 1$.

D'où $\mathcal{P}(1)$.

▸ **Hérédité** : soit $n \in \mathbb{N}^*$.
Supposons $\mathcal{P}(n)$ et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$ $\left(\ i.e.\ \sum\limits_{k=1}^{n+1} k^3 = \dfrac{(n+1)^2\ (n+2)^2}{4}\ \right)$.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} k^3 &= \left(\sum_{k=1}^{n} k^3\right) + (n+1)^3 \\
&= \frac{n^2\ (n+1)^2}{4} + (n+1)^2 && \textit{(par hypothèse de récurrence)} \\
&= \frac{(n+1)^2}{4}\big(n^2 + 4\,(n+1)\big) \\
&= \frac{(n+1)^2}{4}\ (n+2)^2
\end{aligned}$$

D'où $\mathcal{P}(n+1)$.

$$\boxed{\text{Par principe de récurrence : } \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2\ (n+1)^2}{4}.}$$

□

Partie I

Soit N un entier supérieur ou égal à 2.
Une urne contient N boules dont $N-2$ sont blanches et 2 sont noires.
On tire au hasard, successivement et *sans remise*, les N boules de cette urne.
Les tirages étant numérotés de 1 à N, on note X_1 la variable aléatoire égale au numéro du tirage qui a fourni, pour la première fois, une boule noire et X_2 la variable aléatoire égale au numéro du tirage qui a fourni, pour la deuxième fois, une boule noire.

2. Préciser l'espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ que l'on peut utiliser pour modéliser cette expérience aléatoire.

Démonstration.

- On note b_1, ..., b_{N-2} les $(N-2)$ boules blanches, et b_{N-1}, b_N les deux boules noires de l'urne.
  L'univers Ω est l'ensemble des N-uplets d'éléments distincts de l'ensemble $\{b_1, \dots, b_N\}$.
  (on peut aussi choisir de confondre boule et numéro associé - dans ce cas, Ω est l'ensemble des N-uplets d'éléments distincts de l'ensemble $[\![1, N]\!]$)

- Comme Ω est un ensemble fini, on choisit $\mathscr{A} = \mathcal{P}(\Omega)$.
- Enfin, on munit $(\Omega, \mathscr{A})$ de la probabilité uniforme notée $\mathbb{P}$.

$\square$

3. Soit i et j deux entiers de l'intervalle $[\![1, N]\!]$. Montrer :

$$\mathbb{P}([X_1 = i] \cap [X_2 = j]) = \begin{cases} 0 & \text{si } 1 \leqslant j \leqslant i \leqslant N \\ \dfrac{2}{N(N-1)} & \text{si } 1 \leqslant i < j \leqslant N \end{cases}$$

Démonstration.

- Pour tout $k \in [\![1, N]\!]$, on considère les événements suivants :

$$N_k : \text{« la } k^{\text{ème}} \text{ boule tirée est noire »} \quad \text{et} \quad B_k : \text{« la } k^{\text{ème}} \text{ boule tirée est blanche »}$$

- Soit $(i, j) \in [\![1, N]\!]^2$. Deux cas se présentent :
  - × si $i \geqslant j$, alors :
  $$[X_1 = i] \cap [X_2 = j] \ = \ \varnothing$$
  En effet, si l'événement $[X_1 = i] \cap [X_2 = j])$ est réalisé, alors la première boule noire apparait avant la seconde boule noire. Ceci est impossible.
  - × si $i > j$, alors l'événement $[X_1 = i] \cap [X_2 = j]$ est réalisé si et seulement si la première boule noire est obtenue au $i^{\text{ème}}$ tirage et la seconde boule noire au $j^{\text{ème}}$ tirage.
  Un N-tirage réalisant l'événement $[X_1 = i] \cap [X_2 = j]$ est donc entièrement déterminé par :
    - le numéro de la boule noire en $i^{\text{ème}}$ position : $\binom{2}{1} = 2$ possibilités.
    - le numéro de la boule noire en $j^{\text{ème}}$ position parmi les boules noires restantes : $\binom{1}{1} = 1$ possibilité.
    - les positions des $N-2$ boules blanches dans les $N-2$ positions restantes : $(N-2)!$ possibilités.

  Ainsi le nombre de N-tirages réalisant l'événement $[X_1 = i] \cap [X_2 = j]$ est $2\,(N-2)!$.
  On en déduit :
  $$\mathbb{P}([X_1 = i] \cap [X_2 = j]) = \frac{\text{Card}([X_1 = i] \cap [X_2 = j])}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{2\ (N-2)!}{N!} = \frac{2}{N\,(N-1)}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } \forall (i,j) \in [\![1, N]\!]^2,\ \mathbb{P}([X_1 = i] \cap [X_2 = j]) = \begin{cases} 0 & \text{si } 1 \leqslant j \leqslant i \leqslant N \\ \dfrac{2}{N(N-1)} & \text{si } 1 \leqslant i < j \leqslant N \end{cases}}$$

Commentaire

Pour le cas $i < j$, on peut également utiliser la formule des probabilités composées.
On détaille ci-dessous la manière de procéder.

- Tout d'abord :
$$[X_1 = i] \cap [X_2 = j] = B_1 \cap \ldots \cap B_{i-1} \cap N_i \cap B_{i+1} \cap \ldots \cap B_{j-1} \cap N_j \cap B_{j+1} \cap \ldots \cap B_N$$
- De plus : $\mathbb{P}(B_1 \cap \ldots \cap B_{i-1} \cap N_i \cap B_{i+1} \cap \ldots \cap B_{j-1} \cap N_j \cap B_{j+1} \cap \ldots \cap B_{N-1}) \neq 0$.
Ainsi, par formule des probabilités composées :
$$\begin{aligned}
& \mathbb{P}([X_1 = i] \cap [X_2 = j]) \\
= \ & \mathbb{P}(B_1) \times \mathbb{P}_{B_1}(B_2) \times \ldots \times \mathbb{P}_{B_1 \cap \ldots \cap B_{i-1}}(N_i) \times \ldots \times \mathbb{P}_{B_1 \cap \ldots \cap B_{j-1}}(N_j) \times \ldots \times \mathbb{P}_{B_1 \cap \ldots \cap B_{N-1}}(B_N) \\
= \ & \frac{N-2}{N} \times \frac{N-3}{N-1} \times \ldots \times \frac{2}{N-(i-1)} \times \ldots \times \frac{1}{N-(j-1)} \times \ldots \times \frac{1}{N-(N-1)} \\
= \ & \frac{(N-2)! \times 2 \times 1}{N!} \ = \ \frac{2}{N(N-1)}
\end{aligned}$$

□

4. Déterminer les lois de probabilité des variables X_1 et X_2. Ces variables sont-elles indépendantes ?

Démonstration.

- Déterminons tout d'abord $X_1(\Omega)$ et $X_2(\Omega)$.
  - × On remarque : $X_1(\Omega) = [\![1, N-1]\!]$.
  En effet, comme il y a deux boules noires dans l'urne, la première apparaît au pire lors du $(N-1)^{\text{ème}}$ tirage et peut apparaître lors de tout autre tirage.
  - × De plus : $X_2(\Omega) = [\![2, N]\!]$.
  En effet, comme il y a deux boules noires dans l'urne, la seconde apparaît au mieux lors du $2^{\text{ème}}$ tirage et peut apparaître lors de tout autre tirage.
- Soit $i \in [\![1, N-1]\!]$.
La famille $\big([X_2 = j] \big)_{j \in [\![2,N]\!]}$ forme un système complet d'événements.
Ainsi, par formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([X_1 = i]) &= \sum_{j=2}^{N} \mathbb{P}([X_1 = i] \cap [X_2 = j]) \\
&= \cancel{\sum_{\substack{j=2 \\ j \leqslant i}}^{N} \mathbb{P}([X_1 = i] \cap [X_2 = j])} + \sum_{\substack{j=2 \\ j > i}}^{N} \mathbb{P}([X_1 = i] \cap [X_2 = j]) \\
&= \sum_{j=i+1}^{N} \frac{2}{N(N-1)} && \textit{(d'après la question précédente)} \\
&= \frac{2\,(N-(i+1)+1)}{N(N-1)} \ = \ 2\,\frac{N-i}{N(N-1)}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\begin{gathered} X_1(\Omega) = [\![1, N-1]\!] \\ \forall i \in [\![1, N-1]\!],\ \mathbb{P}([X_1 = i]) = 2\,\frac{N-i}{N(N-1)}. \end{gathered}}$$

Commentaire

On note que le découpage de la somme dans la deuxième égalité est aussi valable pour $i = 1$. En effet, dans ce cas, la première somme est nulle car on somme sur un ensemble vide d'indices.

- Soit $j \in [\![2, N]\!]$.
  La famille $\left([X_1 = i] \right)_{i \in [\![1, N-1]\!]}$ forme un système complet d'événements.
  Ainsi, par formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([X_2 = j]) &= \sum_{i=1}^{N-1} \mathbb{P}([X_1 = i] \cap [X_2 = j]) \\
&= \cancel{\sum_{\substack{i = 1 \\ i \geqslant j}}^{N-1} \mathbb{P}([X_1 = i] \cap [X_2 = j])} + \sum_{\substack{i = 1 \\ i < j}}^{N-1} \mathbb{P}([X_1 = i] \cap [X_2 = j]) \\
&= \sum_{i=1}^{j-1} \frac{2}{N(N-1)} && \textit{(d'après la question précédente)} \\
&= 2\, \frac{j-1}{N(N-1)}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\begin{array}{c} X_2(\Omega) = [\![2, N]\!] \\ \forall j \in [\![2, N]\!],\ \mathbb{P}([X_2 = j]) = 2\, \dfrac{j-1}{N(N-1)}. \end{array}}$$

Commentaire

On note que le découpage de la somme dans la deuxième égalité est aussi valable pour $j = N$. En effet, dans ce cas, la deuxième somme est nulle car on somme sur un ensemble vide d'indices.

- Démontrons que les v.a.r. X_1 et X_2 ne sont pas indépendantes.
  - × Tout d'abord :
  $$[X_1 = 2] \cap [X_2 = 2] \ = \ \varnothing$$
  En effet, l'événement $[X_1 = 2] \cap [X_2 = 2]$ est réalisé si et seulement la première et la seconde boule noire sont tirées simultanément au $2^{\text{ème}}$ tirage. Ceci est impossible car on tire les boules dans l'urne une par une.
  On en déduit :
  $$\mathbb{P}([X_1 = 2] \cap [X_2 = 2]) \ = \ \mathbb{P}(\varnothing) \ = \ 0$$
  - × De plus :
    - d'une part : $\mathbb{P}([X_1 = 2]) = 2\, \dfrac{N-2}{N(N-1)} \neq 0$,
    - d'autre part : $\mathbb{P}([X_2 = 2]) = 2\, \dfrac{2-1}{N(N-1)} \neq 0$

  On en déduit :
  $$\mathbb{P}([X_1 = 2] \cap [X_2 = 2]) \ \neq \ \mathbb{P}([X_1 = 2]) \times \mathbb{P}([X_2 = 2])$$

$$\boxed{\text{Ainsi, les v.a.r. } X_1 \text{ et } X_2 \text{ ne sont pas indépendantes.}}$$

Commentaire

En toute rigueur, cette démonstration est fausse. Elle repose sur le fait que $2 \in X_1(\Omega)$ et $2 \in X_2(\Omega)$. Or si $N = 2$ (ce qui n'est pas exclu par l'énoncé), $2 \notin X_1(\Omega)$. Dans ce cas, X_1 est la v.a.r. certaine égale à 1 et X_2 est la v.a.r. certaine égale à 2.
Et X_1 et X_2 sont alors indépendantes.

$\square$

5. a) Démontrer que la variable $N + 1 - X_2$ a même loi que X_1.

Démonstration.
Notons $Z = N + 1 - X_2$.

- Commençons par déterminer $Z(\Omega)$.
  Notons $h : x \mapsto N + 1 - x$, de telle sorte que : $Z = h(X)$.
  On rappelle : $X_2(\Omega) = [\![2, N]\!]$. On en déduit :

$$Z(\Omega) \; = \; \big(h(X_2)\big)(\Omega) \; = \; h\big(X_2(\Omega)\big) \; = \; h([\![2, N]\!]) \; \subset \; [\![1, N-1]\!]$$

  En effet, soit $k \in [\![2, N]\!]$:
  × $h(k) = N + 1 - k \in \mathbb{Z}$,
  × de plus :

$$\begin{array}{ll} \text{comme} & 2 \leqslant k \leqslant N \\ \text{alors} & -2 \geqslant -k \geqslant -N \\ \text{donc} & N-1 \geqslant N+1-k \geqslant 1 \\ \text{d'où} & N-1 \geqslant h(k) \geqslant 1 \end{array}$$

$$\boxed{\text{Et ainsi : } Z(\Omega) \subset [\![1, N-1]\!].}$$

- Soit $i \in [\![1, N-1]\!]$.

$$\begin{array}{rcll} \mathbb{P}([Z = i]) & = & \mathbb{P}([N + 1 - X_2 = i]) & \\ & = & \mathbb{P}([X_2 = N + 1 - i]) & \\ & = & 2 \, \dfrac{(N + \cancel{1} - i) - \cancel{1}}{N \; (N-1)} & \textit{(d'après 3., car } N+1-i \in [\![2, N]\!] \quad (*)\textit{)} \\ & = & 2 \, \dfrac{N - i}{N \; (N-1)} & \end{array}$$

  Détaillons l'assertion $(*)$.

$$\begin{array}{ll} \text{Comme} & 1 \leqslant i \leqslant N-1 \\ \text{alors} & -1 \geqslant -i \geqslant -(N-1) \\ \text{donc} & N \geqslant N+1-i \geqslant 2 \end{array}$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } \forall i \in [\![1, N-1]\!], \, \mathbb{P}([Z = i]) = 2 \, \dfrac{N-i}{N \; (N-1)}}$$

- Finalement, on obtient :
  × $Z(\Omega) \subset X_1(\Omega)$,
  × $\forall i \in [\![1, N-1]\!]$, $\mathbb{P}([Z = i]) = \mathbb{P}([X_1 = i])$

$$\boxed{\text{On en déduit que les v.a.r. } Z = N + 1 - X_2 \text{ et } X_1 \text{ ont même loi.}}$$

$\square$

b) Déterminer la loi de la variable $X_2 - X_1$ et la comparer à celle de X_1.

Démonstration.

- Comme la v.a.r. X_1 correspond au rang de la première boule noire et la v.a.r. X_2 correspond à celui de la seconde, l'écart entre les deux est au minimum de 1 et au maximum de $(N-1)$.

$$\boxed{\text{Ainsi : } (X_2 - X_1)(\Omega) \subset [\![1, N-1]\!].}$$

- Soit $k \in [\![1, N-1]\!]$.
La famille $([X_1 = i])_{i \in [\![1,N-1]\!]}$ forme un système complet d'événements.
Ainsi, par formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([X_2 - X_1 = k]) &= \sum_{i=1}^{N-1} \mathbb{P}([X_1 = i] \cap [X_2 - X_1 = k]) \\
&= \sum_{i=1}^{N-1} \mathbb{P}([X_1 = i] \cap [X_2 = k+i]) \\
&= \sum_{\substack{i=1 \\ k+i \in X_2(\Omega)}}^{N-1} \mathbb{P}([X_1 = i] \cap [X_2 = k+i]) \\
&\quad + \cancel{\sum_{\substack{i=1 \\ k+i \notin X_2(\Omega)}}^{N-1} \mathbb{P}([X_1 = i] \cap [X_2 = k+i])} \qquad \textit{(car } [X_2 = k+i] = \varnothing \textit{ si } k+i \notin X_2(\Omega)\textit{)} \\
&= \sum_{i=1}^{N-k} \mathbb{P}([X_1 = i] \cap [X_2 = k+i])
\end{aligned}$$

La dernière ligne est obtenue en constatant :

$$\left\{ \begin{array}{l} k+i \in X_2(\Omega) = [\![2, N]\!] \\ i \in [\![1, N-1]\!] \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2 \leqslant k+i \leqslant N \\ 1 \leqslant i \leqslant N-1 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2-k \leqslant i \leqslant N-k \\ 1 \leqslant i \leqslant N-1 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 1 \leqslant i \leqslant N-k \end{array} \right.$$

Ainsi, en reprenant les égalités précédentes :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([X_2 - X_1 = k]) &= \sum_{i=1}^{N-k} \mathbb{P}([X_1 = i] \cap [X_2 = k+i]) \\
&= \sum_{i=1}^{N-k} \frac{2}{N\ (N-1)} \qquad \textit{(d'après } \textbf{\textit{2.}}\textit{, car } k+i > i\textit{)} \\
&= \frac{2\ (N-k)}{N\ (N-1)}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall k \in [\![1, N-1]\!],\ \mathbb{P}([X_2 - X_1 = k]) = \frac{2\ (N-k)}{N\ (N-1)}}$$

- Finalement, on obtient :
  × $(X_2 - X_1)(\Omega) \subset X_1(\Omega)$,
  × $\forall k \in [\![1, N-1]\!]$, $\mathbb{P}([X_2 - X_1 = k]) = \mathbb{P}([X_1 = k])$

$$\boxed{\text{On en déduit que les v.a.r. } X_2 - X_1 \text{ et } X_1 \text{ ont même loi.}}$$

$\square$

6. À l'aide des résultats de la question ***5*** :

a) Calculer les espérances $\mathbb{E}(X_1)$ et $\mathbb{E}(X_2)$.

Démonstration.

- Tout d'abord, les v.a.r. X_1 et X_2 admettent une espérance en tant que v.a.r. finies.
- De plus, d'après les questions ***4.a)*** et ***4.b)*** :

$$\left\{\begin{array}{l} N+1-X_2 \text{ et } X_1 \text{ ont même loi} \\[1em] X_2-X_1 \text{ et } X_1 \text{ ont même loi} \end{array}\right.$$

On en déduit que les v.a.r. $N+1-X_2$ et X_2-X_1 admettent aussi une espérance et :

$$\left\{\begin{array}{l} \mathbb{E}(X_1) = \mathbb{E}(N+1-X_2) \\ \mathbb{E}(X_1) = \mathbb{E}(X_2-X_1) \end{array}\right.$$

De plus, par linéarité de l'espérance :

$$\mathbb{E}(N+1-X_2) = \mathbb{E}(N+1) - \mathbb{E}(X_2) = N+1-\mathbb{E}(X_2) \quad \text{et} \quad \mathbb{E}(X_2-X_1) = \mathbb{E}(X_2)-\mathbb{E}(X_1)$$

Ainsi :

$$\left\{\begin{array}{l} \mathbb{E}(X_1) = N+1-\mathbb{E}(X_2) \\ \mathbb{E}(X_1) = \mathbb{E}(X_2)-\mathbb{E}(X_1) \end{array}\right.$$

- On obtient alors un système linéaire de deux équations à deux inconnues ($\mathbb{E}(X_1)$ et $\mathbb{E}(X_2)$) :

$$\left\{\begin{array}{rcrcl} \mathbb{E}(X_1) & + & \mathbb{E}(X_2) & = & N+1 \\ 2\,\mathbb{E}(X_1) & - & \mathbb{E}(X_2) & = & 0 \end{array}\right. \overset{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1}{\iff} \left\{\begin{array}{rcrcl} \mathbb{E}(X_1) & + & \mathbb{E}(X_2) & = & N+1 \\ & - & 3\,\mathbb{E}(X_2) & = & -2\,(N+1) \end{array}\right.$$

$$\overset{L_1 \leftarrow 3L_1 + L_2}{\iff} \left\{\begin{array}{rcrcl} 3\,\mathbb{E}(X_1) & & & = & N+1 \\ & - & 3\,\mathbb{E}(X_2) & = & -2\,(N+1) \end{array}\right.$$

$$\boxed{\text{Finalement : } \mathbb{E}(X_1) = \frac{N+1}{3} \text{ et } \mathbb{E}(X_2) = 2\,\frac{N+1}{3}.}$$

□

b) Montrer l'égalité des variances $\mathbb{V}(X_1)$ et $\mathbb{V}(X_2)$.

Démonstration.

- Les v.a.r. X_1 et X_2 admettent une variance en tant que v.a.r. finies.
- D'après la question ***4.a)***, les v.a.r. $N+1-X_2$ et X_1 ont même loi. On en déduit que $N+1-X_2$ admet une variance et :

$$\mathbb{V}(X_1) \; = \; \mathbb{V}(N+1-X_2) \; = \; (-1)^2\,\mathbb{V}(X_2) \; = \; \mathbb{V}(X_2)$$

$$\boxed{\mathbb{V}(X_1) \; = \; \mathbb{V}(X_2)}$$

□

c) <u>**Seulement pour les cubes**</u> : Établir la relation : $2\,\mathrm{Cov}(X_1, X_2) = \mathbb{V}(X_1)$
(où $\mathrm{Cov}(X_1, X_2)$ désigne la covariance des variables X_1 et X_2).

Démonstration.

- Tout d'abord, comme les v.a.r. X_1 et X_2 admettent une variance, alors $\mathrm{Cov}(X_1, X_2)$ est bien définie.

- D'après la question *4.b)*, les v.a.r. $X_2 - X_1$ et X_1 ont même loi. On en déduit que $X_2 - X_1$ admet une variance et :

$$\begin{array}{rcll}
\mathbb{V}(X_1) & = & \mathbb{V}(X_2 - X_1) & \\
& = & \mathbb{V}(X_2) + 2\ \mathrm{Cov}(X_2, -X_1) + \mathbb{V}(-X_1) & \\
& = & \mathbb{V}(X_2) - 2\ \mathrm{Cov}(X_2, X_1) + \mathbb{V}(X_1) & \textit{(par linéarité à droite de la covariance)} \\
& = & 2\ \mathbb{V}(X_1) - 2\ \mathrm{Cov}(X_1, X_2) & \textit{(d'après la question précédente)}
\end{array}$$

On obtient : $\mathbb{V}(X_1) \ = \ 2\ \mathbb{V}(X_1) - 2\ \mathrm{Cov}(X_1, X_2)$.

$$\boxed{\text{Ainsi : } \mathbb{V}(X_1) \ = \ 2\,\mathrm{Cov}(X_1, X_2).}$$

□

7. **Seulement pour les cubes** : Calculer $\mathbb{V}(X_1)$. En déduire $\mathbb{V}(X_2)$ et $\mathrm{Cov}(X_1, X_2)$.

Démonstration.

- Déterminons d'abord $\mathbb{E}(X_1^2)$. Par théorème de transfert :

$$\begin{array}{rcl}
\mathbb{E}(X_1^2) & = & \displaystyle\sum_{x \in X(\Omega)} x^2\ \mathbb{P}([X = x]) \ = \ \sum_{i=1}^{N-1} i^2\ \mathbb{P}([X = i]) \\
& = & \displaystyle\sum_{i=1}^{N-1} i^2\ \frac{2\ (N-i)}{N(N-1)} \ = \ \frac{2}{N(N-1)} \ \sum_{i=1}^{N-1} i^2\ (N-i) \\
& = & \displaystyle\frac{2}{N(N-1)} \ \left(N \ \sum_{i=1}^{N-1} i^2 - \sum_{i=1}^{N-1} i^3 \right) \\
& = & \displaystyle\frac{2}{N(N-1)} \ \left(N\ \frac{(N-1)\ N\ \big(2(N-1)+1\big)}{6} - \frac{(N-1)^2\ N^2}{4} \right) \\
& = & \displaystyle\frac{2}{N(N-1)} \ \left(\frac{N^2\,(N-1)\,(2N-1)}{6} - \frac{(N-1)^2\ N^2}{4} \right) \\
& = & \displaystyle\frac{2}{\cancel{N}\cancel{(N-1)}} \ \frac{N^{\cancel{2}}\ \cancel{(N-1)}}{12}\ (2\,(2N-1) - 3\,(N-1)) \\
& = & \displaystyle\frac{N}{6}\ (4N - 2 - 3N + 3) \ = \ \frac{N(N+1)}{6}
\end{array}$$

- Par formule de Koenig-Huygens :

$$\begin{array}{rcl}
\mathbb{V}(X_1) & = & \mathbb{E}(X_1^2) - (\mathbb{E}(X_1))^2 \ = \ \displaystyle\frac{N(N+1)}{6} - \left(\frac{N+1}{3}\right)^2 \\
& = & \displaystyle\frac{N(N+1)}{6} - \frac{(N+1)^2}{9} \\
& = & \displaystyle\frac{N+1}{18}\ (3N - 2\,(N+1)) \\
& = & \displaystyle\frac{(N+1)(N-2)}{18}
\end{array}$$

$$\boxed{\mathbb{V}(X_1) = \frac{(N+1)(N-2)}{18}}$$

- Or, d'après la question ***6.b)*** : $\mathbb{V}(X_2) = \mathbb{V}(X_1)$.
  D'après la question précédente : $\text{Cov}(X_1, X_2) = \frac{1}{2}\ \mathbb{V}(X_1)$.

$$\boxed{\text{On en déduit : } \mathbb{V}(X_2) = \frac{(N+1)(N-2)}{18} \text{ et } \text{Cov}(X_1, X_2) = \frac{(N+1)(N-2)}{36}}$$ □

Partie II

On suppose que A et B sont deux variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$, indépendantes, suivant la même loi uniforme sur l'ensemble $\{1, 2, \dots, N\}$ et on désigne par D l'événement : « A ne prend pas la même valeur que B ».

8. Montrer que la probabilité de l'événement D est $\frac{N-1}{N}$.

Démonstration.

- Remarquons d'abord : $D \ = \ [A \neq B]$. On en déduit :

$$\mathbb{P}(D) \ = \ \mathbb{P}([A \neq B]) \ = \ 1 - \mathbb{P}(\overline{[A \neq B]}) \ = \ 1 - \mathbb{P}([A = B])$$

Commentaire

Il est pertinent ici de penser à utiliser l'événement contraire, puisque l'événement D est défini par une propriété exprimée négativement.

- La famille $([B = j])_{j \in [\![1,N]\!]}$ forme un système complet d'événements, car $B \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1, N]\!])$.
  Ainsi, par formule des probabilités totales :

$$\begin{array}{rcll} \mathbb{P}([A = B]) & = & \sum\limits_{j=1}^{N} \mathbb{P}([A = B] \cap [B = j]) & \\ & = & \sum\limits_{j=1}^{N} \mathbb{P}([A = j] \cap [B = j]) & \\ & = & \sum\limits_{j=1}^{N} \mathbb{P}([A = j]) \times \mathbb{P}([B = j]) & \textit{(car A et B sont indépendantes)} \\ & = & \sum\limits_{j=1}^{N} \frac{1}{N}\ \frac{1}{N} & \textit{(car } A \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1, N]\!]) \textit{ et } B \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1, N]\!])\textit{)} \\ & = & \frac{N}{N^2} \ = \ \frac{1}{N} & \end{array}$$

$$\boxed{\text{Ainsi } \mathbb{P}(D) = 1 - \mathbb{P}([A = B]) = 1 - \frac{1}{N} = \frac{N-1}{N}}$$

□

9. Soit Y_1 et Y_2 les variables aléatoires définies par : $\left\{ \begin{array}{l} Y_1 = \min(A, B) \\ Y_2 = \max(A, B) \end{array} \right.$

Calculer, pour tout couple (i, j) d'éléments de $\{1, 2, \dots, N\}$, la probabilité conditionnelle :

$$\mathbb{P}_D([Y_1 = i] \cap [Y_2 = j])$$

Démonstration.

- Tout d'abord, d'après la question précédente : $\mathbb{P}(D) = \frac{N-1}{N} \neq 0$. Ainsi la probabilité $\mathbb{P}_D$ est bien définie.

- Soit $(i,j) \in [\![1,N]\!]^2$.
Si l'événement D est réalisé, alors les v.a.r. A et B prennent des valeurs distinctes.
Dans ce cas, l'événement $[Y_1 = i] \cap [Y_2 = j]$ est réalisé si et seulement si le minimum de la valeur prise par la v.a.r. A et la valeur prise par la v.a.r. B est i, et le maximum de la valeur prise par A et la valeur prise par B est j.
Trois cas se présentent alors.
  - × Si $i > j$, alors :
$$[Y_1 = i] \cap [Y_2 = j] \;=\; \varnothing$$
En effet, le minimum des valeurs prises par A et B ne peut être strictement plus grand que le maximum des valeurs prises par A et B.
$$\boxed{\text{Ainsi, si } i > j, \text{ alors : } \mathbb{P}_D([Y_1 = i] \cap [Y_2 = j]) = 0.}$$
  - × Si $i = j$, alors :
$$[Y_1 = i] \cap [Y_2 = j] \;=\; [\min(A,B) = i] \cap [\max(A,B) = i] \;=\; [A = i] \cap [B = i]$$
Ainsi :
$$D \cap \big(\,[Y_1 = i] \cap [Y_2 = j]\,\big) \;=\; [A \neq B] \cap \big(\,[A = i] \cap [B = i]\,\big) \;=\; \varnothing$$
On en déduit :
$$\mathbb{P}_D([Y_1 = i] \cap [Y_2 = j]) \;=\; \frac{\mathbb{P}\Big(D \cap \big(\,[Y_1 = i] \cap [Y_2 = j]\,\big)\Big)}{\mathbb{P}(D)} \;=\; \frac{\mathbb{P}(\varnothing)}{\mathbb{P}(D)} \;=\; 0$$
$$\boxed{\text{Finalement, si } i = j : \mathbb{P}_D([Y_1 = i] \cap [Y_2 = i]) = 0}$$
  - × Si $i < j$, alors, comme $i \neq j$:
$$D \cap \big(\,[Y_1 = i] \cap [Y_2 = j]\,\big) \;=\; [Y_1 = i] \cap [Y_2 = j]$$
De plus :
$$[Y_1 = i] \cap [Y_2 = j] \;=\; \big(\,[A = i] \cap [B = j]\,\big) \cup \big(\,[A = j] \cap [B = i]\,\big)$$
Les deux événements de cette union sont incompatibles. On en déduit :
$$\begin{aligned}
& \mathbb{P}_D([Y_1 = i] \cap [Y_2 = j]) \\
= \;& \mathbb{P}_D([A = i] \cap [B = j]) + \mathbb{P}_D([A = j] \cap [B = i]) \\
= \;& \frac{\mathbb{P}(D \cap [A = i] \cap [B = j])}{\mathbb{P}(D)} + \frac{\mathbb{P}(D \cap [A = j] \cap [B = i])}{\mathbb{P}(D)} \\
= \;& \frac{\mathbb{P}([A = i] \cap [B = j])}{\mathbb{P}(D)} + \frac{\mathbb{P}([A = j] \cap [B = i])}{\mathbb{P}(D)} \\
= \;& \frac{1}{\mathbb{P}(D)} \left(\mathbb{P}([A = i]) \times \mathbb{P}([B = j]) + \mathbb{P}([A = j]) \times \mathbb{P}([B = i])\right) && \textit{(car A et B sont indépendantes)} \\
= \;& \frac{N}{N-1} \left(\frac{1}{N} \times \frac{1}{N} + \frac{1}{N} \times \frac{1}{N}\right) && \textit{(car $A \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1,N]\!])$ et $B \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1,N]\!])$)} \\
= \;& \frac{\cancel{N}}{N-1} \, \frac{2}{N^{\cancel{2}}} \;=\; \frac{2}{N\,(N-1)}
\end{aligned}$$
$$\boxed{\text{Ainsi, si } i < j : \mathbb{P}_D([Y_1 = i] \cap [Y_2 = j]) = \frac{2}{N\,(N-1)}}$$

□

ESG 1995 - loi de Poisson, loi binomiale, couple de v.a.r. discrètes, covariance, coefficient de corrélation linéaire

Le nombre de voitures vendues par un concessionnaire chaque jour est une variable aléatoire X qui suit une loi de Poisson de paramètre λ.
Lorsqu'un client se présente pour acheter une voiture, on admet que la probabilité qu'il demande un crédit est égale à p, avec $0 < p < 1$.
Soit Y la variable aléatoire égale au nombre de clients qui dans la journée demandent un crédit pour acheter une voiture.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, déterminer la loi conditionnelle de Y sachant $[X = n]$.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons l'événement $[X = n]$ réalisé. Alors l'expérience consiste en une répétition de n épreuves de Bernoulli indépendantes et identiques de paramètre p (le succès étant « le client demande un crédit »). La variable aléatoire Y compte le nombre de succès.

$$\boxed{\text{On en déduit que la loi conditionnelle de } Y \text{ sachant } [X = n] \text{ est la loi binomiale } \mathcal{B}(n, p).}$$

□

2. Déterminer la loi de Y, puis calculer l'espérance et la variance de Y.

Démonstration.
Tout d'abord : $Y(\Omega) = \mathbb{N}$.
Soit $k \in \mathbb{N}$. On applique la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements associé à X (c'est-à-dire la famille $([X = n])_{n\in\mathbb{N}}$) :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([Y = k]) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}([X = n] \cap [Y = k]) \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}([X = n])\mathbb{P}_{[X=n]}([Y = k]) \\
&= \sum_{n=k}^{+\infty} \mathbb{P}([X = n])\mathbb{P}_{[X=n]}([Y = k]) \qquad \textit{(car } \mathbb{P}_{[X=n]}([Y = k]) = 0 \textit{ si } k > n\textit{)} \\
&= \sum_{n=k}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \\
&= \sum_{n=k}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{\cancel{n!}} \frac{\cancel{n!}}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k} \\
&= \mathrm{e}^{-\lambda} \frac{p^k}{k!} \sum_{n=k}^{+\infty} \lambda^n \frac{1}{(n-k)!} (1-p)^{n-k} \\
&= \mathrm{e}^{-\lambda} \frac{p^k}{k!} \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^{n+k} \frac{1}{n!} (1-p)^n \\
&= \mathrm{e}^{-\lambda} \frac{(\lambda p)^k}{k!} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\big(\lambda(1-p)\big)^n}{n!} \\
&= \mathrm{e}^{-\lambda} \frac{(\lambda p)^k}{k!} \mathrm{e}^{\lambda(1-p)} \\
&= \mathrm{e}^{-\lambda p} \frac{(\lambda p)^k}{k!}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On en déduit que } Y \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda p).}$$

□

3. Soit Z la variable aléatoire égale au nombre de clients qui achètent une voiture au comptant.

a) Déterminer la loi de Z.

Démonstration.
La variable aléatoire Z est définie de manière analogue à la variable aléatoire Y (on remplace « demander un crédit » par « acheter au comptant » et donc on remplace p par $1-p$ car il n'y a pas d'autre possibilité).

$$\boxed{\text{On en déduit que } Z \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda(1-p)).}$$

□

b) Les variables Y et Z sont-elles indépendantes ?

Démonstration.
Soit $(i,j) \in \mathbb{N}^2$.

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([Y=i]\cap[Z=j]) &= \mathbb{P}([Y=i]\cap[X-Y=j]) && \textit{(car } X = Y+Z\textit{)}\\
&= \mathbb{P}([Y=i]\cap[X=i+j])\\
&= \mathbb{P}([X=i+j])\mathbb{P}_{[X=i+j]}([Y=i])\\
&= e^{-\lambda}\frac{\lambda^{i+j}}{(i+j)!}\binom{i+j}{i}p^i(1-p)^j\\
&= e^{-\lambda}\frac{\lambda^{i+j}}{\cancel{(i+j)!}}\frac{\cancel{(i+j)!}}{i!j!}p^i(1-p)^j\\
&= e^{-\lambda(p+1-p)}\lambda^{i+j}\frac{1}{i!j!}p^i(1-p)^j\\
&= e^{-\lambda p}\frac{(\lambda p)^i}{i!}e^{-\lambda(1-p)}\frac{(\lambda(1-p))^j}{j!}\\
&= \mathbb{P}([Y=i])\mathbb{P}([Z=j])
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On en déduit que les variables aléatoires } Y \text{ et } Z \text{ sont indépendantes.}}$$

□

4. En remarquant que $Y+Z=X$, déterminer la covariance de X et Y.

Démonstration.
Remarquons que X et Y admettent chacune un moment d'ordre 2 donc $\text{Cov}(X,Y)$ existe. De plus :

$$\begin{aligned}
\text{Cov}(X,Y) &= \text{Cov}(Y+Z,Y)\\
&= \text{Cov}(Y,Y)+\text{Cov}(Z,Y) && \textit{(par linéarité à gauche)}\\
&= \mathbb{V}(Y) && \textit{(car } Y \textit{ et } Z \textit{ sont indépendantes)}\\
&= \lambda p && \textit{(car } Y \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda p)\textit{)}
\end{aligned}$$

□

5. ***a)*** Calculer $\rho_{X,Y}$, le cœfficient de corrélation linéaire de X et Y.

Démonstration.
On a :

$$\begin{aligned}\rho_{X,Y} &= \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{\mathbb{V}(X)}\sqrt{\mathbb{V}(Y)}} \\ &= \frac{\lambda p}{\sqrt{\lambda}\sqrt{\lambda p}} \\ &= \sqrt{p}\end{aligned}$$

□

b) Commenter le signe de $\rho_{X,Y}$. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?

Démonstration.
On remarque que $\rho_{X,Y} > 0$.

$\boxed{\text{Les variables } X \text{ et } Y \text{ sont donc positivement corrélées et ne sont pas indépendantes.}}$

□

c) X peut-elle être une fonction affine de Y ?

Démonstration.
On a $0 < p < 1$ donc, par stricte croissance de $x \mapsto \sqrt{x}$ sur $\mathbb{R}^+$: $0 < \sqrt{p} < 1$.

$\boxed{\text{On peut conclure que } |\rho_{X,Y}| \neq 1 \text{ donc } X \text{ ne peut pas être une fonction affine de } Y.}$

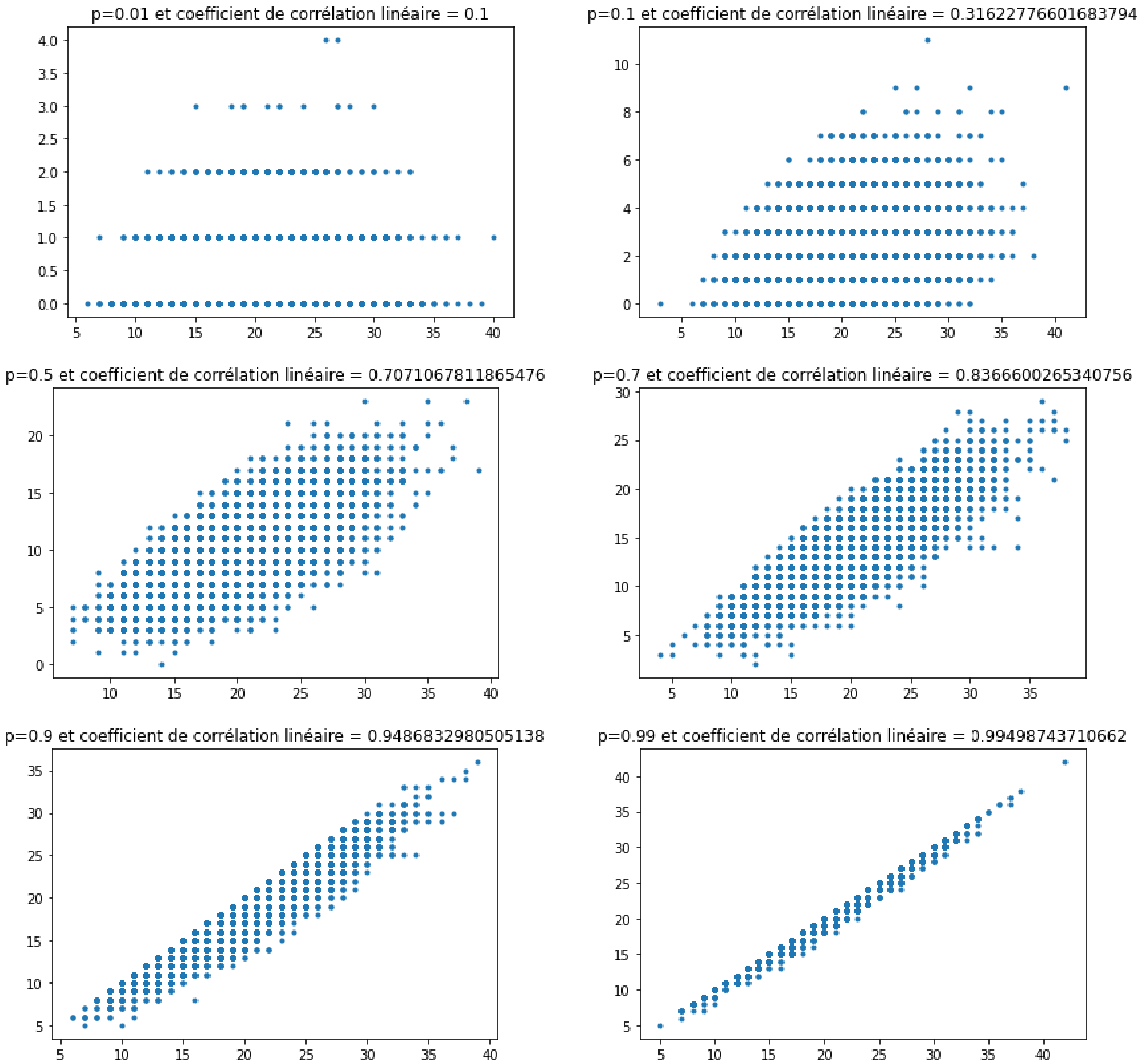
□

(Suite page suivante)

6. On considère les lignes de commande en Python ci-dessous :

```
pliste = [0.01,0.1,0.5,0.7,0.9,0.99]
lam = 20
for p in pliste:
    X=rd.poisson(lam,10000)
    Y=np.zeros(10000)
    for i in range(10000) :
        Y[i] = rd.binomial(X[i],p)
    plt.plot(X,Y,'.')
    plt.title(f'p={p} et coefficient de corrélation linéaire = {np.sqrt(p)}')
    plt.show()
```

Après exécution du script précédent, on obtient la fenêtre graphique suivante que l'on commentera :



Démonstration.
On remarque que plus p est proche de 1 et plus le nuage de points est concentré autour d'une droite de pente positive, ce qui est cohérent avec les propriétés du coefficient de corrélation linéaire. $\square$