

1 Étude d'une suite de fonctions

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n : t \mapsto \ln(1 + nt^2)$ définie sur $[0, 1]$.

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f_n est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0, 1]$.
2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $t \in [0, 1]$,

$$f_n''(t) = 2n \frac{1 - nt^2}{(1 + nt^2)^2}$$

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Dresser le tableau de variations de f_n , étudier sa convexité puis tracer son graphe.
4. Écrire un script **Python** qui trace le graphe de f_n sur $[0, 1]$ pour tout $n \in [1, 10]$ (on superposera les graphes).

2 Étude d'une suite d'intégrales

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $I_n = \int_0^1 \ln(1 + nt^2) dt$.

L'objectif de cette partie est de calculer le début du développement asymptotique de la suite (I_n) .

Plus précisément, on souhaite démontrer :

$$I_n = \ln(n+1) - 2 + \frac{\pi}{\sqrt{n}} - \frac{2}{n} + o_{n \rightarrow +\infty}\left(\frac{1}{n}\right)$$

Rappelons qu'une telle égalité est équivalente à avoir toutes les informations suivantes :

- $I_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(n+1)$
- $I_n - \ln(n+1) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -2$ (ou plus simplement $I_n - \ln(n+1) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -2$)
- $I_n - \ln(n+1) + 2 \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\pi}{\sqrt{n}}$
- $I_n - \ln(n+1) + 2 - \frac{\pi}{\sqrt{n}} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{2}{n}$

5. (a) Montrer que la suite (I_n) est bien définie et croissante.
(b) En utilisant la relation de Chasles et la croissance de l'intégrale, montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$I_n \geq \frac{1}{2} \ln\left(1 + \frac{n}{4}\right)$$

- (c) En déduire : $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = +\infty$.

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$J_n(k) = \int_0^1 \frac{1}{(1 + nt^2)^k} dt, \quad W_n(k) = \int_1^{+\infty} \frac{1}{(1 + nt^2)^k} dt, \quad C_k = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1 + u^2)^k} du$$

6. (a) Montrer que, pour tout entier $k \geq 1$, l'intégrale C_k est convergente et $C_k > 0$. On **admet** : $C_1 = \frac{\pi}{2}$.
(b) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, l'intégrale $W_n(k)$ est convergente.
7. À l'aide d'un changement de variable, montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$J_n(k) + W_n(k) = \frac{C_k}{\sqrt{n}} \quad \text{puis} \quad J_n(k) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{C_k}{\sqrt{n}}$$

8. (a) À l'aide d'une intégration par parties, montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$I_n = \ln(n+1) - 2 + 2J_n(1)$$

(b) En déduire :

$$I_n = \ln(n+1) - 2 + \frac{\pi}{\sqrt{n}} + o_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \right)$$

9. (a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$I_n = \ln(n+1) - 2 + \frac{\pi}{\sqrt{n}} - 2W_n(1)$$

(b) À l'aide d'une intégration par parties, montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$W_n(1) = \frac{1}{1+n} + 2W_n(2)$$

(c) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$0 \leq \int_1^{+\infty} \frac{1}{(1+nt^2)^2} dt \leq \frac{1}{n^2} \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^4} dt$$

(d) En déduire :

$$W_n(2) = o_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n} \right)$$

(e) Conclure que :

$$I_n = \ln(n+1) - 2 + \frac{\pi}{\sqrt{n}} - \frac{2}{n} + o_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n} \right)$$

10. (*Raffinement de la formule précédente*) Pour des raisons d'élégance, on préfère utiliser $\ln(n)$ plutôt que $\ln(n+1)$ dans les développements asymptotiques. Que devient le développement asymptotique précédent de I_n si on l'écrit :

$$I_n = \ln(n) + \dots \quad ?$$