Planches HEC

Sujet Maths appliquées 1

Exercice avec préparation 1
On note I_4 la matrice identité de $\mathscr{M}_4(\mathbb{R})$.
On définit l'ensemble $\mathcal{E}$ par :

$$\mathcal{E} = \left\{ M_{a,b} = \begin{pmatrix} a & b & b & b \\ b & a & b & b \\ b & b & a & b \\ b & b & b & a \end{pmatrix},\ (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

1. Question de cours : Énoncer la formule du binôme de Newton pour deux matrices A et B de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

2. Justifier que $\mathcal{E}$ est un espace vectoriel et en donner une base.

3. Écrire une fonction **Python** qui prend en entrée une matrice M de taille 4 et renvoie un message permettant de savoir si M appartient ou non à $\mathcal{E}$.

4. Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ et $M_{a,b} \in \mathcal{E}$.
Pour tout $k \in \mathbb{N}$, donner une expression matricielle de $M_{a,b}^k$ en fonction de k, a et b.

5. Justifier que les matrices de $\mathcal{E}$ sont simultanément diagonalisables, c'est-à-dire qu'il existe une matrice $P \in \mathscr{M}_4(\mathbb{R})$ inversible telle que :

$$\forall M \in \mathcal{E},\ M = PDP^{-1},$$

où D est une matrice de taille 4 diagonale à déterminer. On donnera une expression matricielle de P.

Exercice sans préparation 1
On se donne $(\epsilon_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant toutes une loi normale centrée réduite, $x \in \mathbb{R}$ un réel, et $\alpha \in]0;1[$.
On étudie le processus aléatoire $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ défini par

$$X_0 = x$$

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ X_{n+1} = \alpha X_n + \epsilon_n.$$

Étudier la convergence en loi de X_n.

Réponses de l'exercice avec préparation 1 :

1. Soient A et B deux matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ qui commutent. Alors, pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$(A+B)^k = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} A^i B^{k-i}$$

2. On a :

$$\mathcal{E} = \left\{ M_{a,b} = \begin{pmatrix} a & b & b & b \\ b & a & b & b \\ b & b & a & b \\ b & b & b & a \end{pmatrix},\ (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\} = \text{Vect}\,(I, J-I) = \text{Vect}\,(I, J)$$

où $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

On en déduit que $\mathcal{E}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_4(\mathbb{R})$ et donc est un espace vectoriel.
De plus, la famille (I, J) est libre car constituée de deux matrices non colinéaires.

$\boxed{\text{On en déduit que la famille } (I, J) \text{ est une base de } \mathcal{E}.}$

3. On propose la fonction **Python** suivante :

```
def appartenance(M):
    a = M[0,0]
    b = M[0,1]
    N = (a-b) * np.eye(4) + b * np.ones([4,4])
    compteur = 0
    for i in range(4):
        for j in range(4):
            if M[i,j] == N[i,j]:
                compteur += 1
    if compteur == 16:
        print('La matrice est dans E')
    else:
        print('La matrice n\'est pas dans E')
```

4. Commençons par remarquer que $M_{a,b} = (a-b)I + bJ$. Les matrices I et J commutent donc on peut appliquer le binôme de Newton.

Soit $k \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}
M_{a,b}^k &= ((a-b)I + bJ)^k \\
&= \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} (a-b)^{k-i} I^{k-i} b^i J^i \\
&= \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} (a-b)^{k-i} b^i J^i \\
&= (a-b)^k I + \sum_{i=1}^{k} \binom{k}{i} (a-b)^{k-i} b^i 4^{i-1} J \qquad (*) \\
&= (a-b)^k I + \frac{1}{4} \left(\sum_{i=1}^{k} \binom{k}{i} (a-b)^{k-i} (4b)^i \right) J \\
&= (a-b)^k I + \frac{1}{4} \left((a-b+4b)^k - (a-b)^k \right) J \qquad \textit{(par binôme de Newton)} \\
&= (a-b)^k I + \frac{1}{4} \left((a+3b)^k - (a-b)^k \right) J
\end{aligned}$$

Détaillons la formule $(*)$. On remarque que :

$$J^2 = 4J, \qquad J^3 = J^2 J = 4J^2 = 4^2 J, \qquad \ldots$$

et on démontre par récurrence que :

$$\forall i \in \mathbb{N}^*, \ J^i = 4^{i-1} J$$

5. Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ et posons $M = M_{a,b} = (a-b)I + bJ$.
Si $b = 0$, alors $M = aI$ est un multiple de l'identité et tout vecteur non nul est un vecteur propre de M associé à la valeur propre a. Dans la suite on suppose $b \neq 0$.
Remarquons que M est symétrique donc diagonalisable. Déterminons une base de $\mathscr{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ formée de vecteurs propres de M indépendants de a et b.

- Commençons par remarquer que :

$$\begin{pmatrix} a & b & b & b \\ b & a & b & b \\ b & b & a & b \\ b & b & b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = (a+3b) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

  donc le vecteur $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \neq 0_{\mathscr{M}_{4,1}(\mathbb{R})}$ est un vecteur propre de M associé à la valeur propre $(a+3b)$.

- Ensuite, remarquons que

$$M - (a-b)I = bJ = \begin{pmatrix} b & b & b & b \\ b & b & b & b \\ b & b & b & b \\ b & b & b & b \end{pmatrix}$$

  donc $M - (a-b)I$ est une matrice de rang 1. Ainsi, $(a-b)$ est valeur propre de M.
  Posons $X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $X_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $X_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$. On a :

$$(M-(a-b)I)X_2 = 0_{\mathscr{M}_{4,1}(\mathbb{R})}, \qquad (M-(a-b)I)X_3 = 0_{\mathscr{M}_{4,1}(\mathbb{R})}, \qquad (M-(a-b)I)X_4 = 0_{\mathscr{M}_{4,1}(\mathbb{R})}$$

et donc :

$$MX_2 = (a-b)X_2, \qquad MX_3 = (a-b)X_3, \qquad MX_4 = (a-b)X_4$$

La résolution d'un système linéaire montre facilement que la famille (X_1, X_2, X_3, X_4) est libre. Comme cette famille est de cardinal $4 = \dim(\mathscr{M}_{4,1}(\mathbb{R}))$, il s'agit d'une base de $\mathscr{M}_{4,1}(\mathbb{R})$. On a donc trouvé une base de $\mathscr{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ formée de vecteurs propres de M. On pose alors :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad D = \begin{pmatrix} a+3b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a-b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a-b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a-b \end{pmatrix}$$

de sorte que l'égalité

$$M = PDP^{-1}$$

soit valable pour toute matrice M de $\mathcal{E}$ (on vérifie que l'égalité est toujours valable lorsque $b = 0$).

Réponses de l'exercice sans préparation 1 :

- Exprimons les premières variables aléatoires X_n en fonction des ϵ_i :

$$\begin{aligned} X_0 &= x \\ X_1 &= \alpha x + \epsilon_0 \\ X_2 &= \alpha^2 x + \alpha\epsilon_0 + \epsilon_1 \\ X_3 &= \alpha^3 x + \alpha^2\epsilon_0 + \alpha\epsilon_1 + \epsilon_2 \end{aligned}$$

  On démontre alors par récurrence :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ X_n = \alpha^n x + \sum_{i=0}^{n-1} \alpha^{n-1-i}\epsilon_i.}$$

- D'après la formule précédente et par stabilité des lois normales par combinaisons linéaires (les ϵ_i sont bien indépendantes) puis par transformée affine, il suit que :

$$\boxed{\begin{array}{c} \forall n \in \mathbb{N},\ X_n \hookrightarrow \mathcal{N}\left(m_n, \sigma_n^2\right) \\ \text{où } m_n = \alpha^n x \text{ et } \sigma_n = \left(\sum_{i=0}^{n-1} \left(\alpha^2\right)^i\right)^{1/2}. \end{array}}$$

- La série $\sum \left(\alpha^2\right)^n$ est une série géométrique de raison $q = \alpha^2 \in]0,1[$, ainsi elle converge. On pose :

$$\sigma = \lim_{n\to+\infty} \sigma_n = \lim_{n\to+\infty} \left(\sum_{i=0}^{n-1} \left(\alpha^2\right)^i\right)^{1/2} = \frac{1}{\sqrt{1-\alpha^2}}$$

  et on note $W \hookrightarrow \mathcal{N}\left(0, \sigma^2\right)$.
  On remarque également que :

$$\lim_{n\to+\infty} m_n = 0$$

- Soit $y \in \mathbb{R}$ et soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}
F_{X_n}(y) &= \mathbb{P}([X_n \leqslant y]) \\
&= \mathbb{P}\left(\left[\frac{X_n - m_n}{\sigma_n} \leqslant \frac{y - m_n}{\sigma_n}\right]\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\left[X_n^* \leqslant \frac{y - m_n}{\sigma_n}\right]\right) \\
&= \Phi\left(\frac{y - m_n}{\sigma_n}\right) \\
&\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \Phi\left(\frac{y}{\sigma}\right) && \textit{(par continuité de } \Phi \textit{ sur } \mathbb{R}\textit{)} \\
&= F_W(y)
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On peut donc conclure que : } X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathscr{L}} W.}$$