Planches HEC

Sujet Maths appliquées 7

Exercice avec préparation 1
Soient $N \in \mathbb{N}^*$ et $n \in [\![0, N]\!]$. Un joueur arrive au casino avec une fortune de n euros et joue à la roulette. A chaque partie, la probabilité de gagner vaut p avec $p \in]0, 1[$. Le déroulement d'une partie est le suivant : le joueur mise un euro, s'il gagne on lui rend son euro avec un euro de plus, s'il perd on ne lui donne rien.
Le joueur a décidé de s'arrêter de jouer lorsqu'il aura tout l'argent disponible dans le casino, soit N euros, ou lorsqu'il n'aura plus d'argent. On note T_n la variable aléatoire représentant le temps de jeu du joueur.
On admet que la variable aléatoire T_n admet une espérance notée $\mathbb{E}(T_n)$.

1. Question de cours : Énoncer la formule des probabilités totales.

2. Écrire une fonction **Python** qui renvoie une simulation de la variable aléatoire T_n.

3. Soit $j \in \mathbb{N}^*$. On suppose dans cette question que $n \in [\![1, N-1]\!]$.
Montrer que $\mathbb{P}(T_n = j) = p\,\mathbb{P}(T_{n+1} = j-1) + (1-p)\,\mathbb{P}(T_{n-1} = j-1)$.

4. En déduire que, pour tout $n \in [\![1, N-1]\!]$,

$$\mathbb{E}(T_n) = p(1 + \mathbb{E}(T_{n+1})) + (1-p)(1 + \mathbb{E}(T_{n-1}))$$

5. On suppose que $p \neq \dfrac{1}{2}$. Déterminer une expression de $\mathbb{E}(T_n)$ en fonction de n, p et N. On pourra faire intervenir une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général $u_n = \mathbb{E}(T_n) + n\alpha$ avec α un réel à déterminer.

Exercice sans préparation 1
On s'intéresse à la suite suivante :

$$u_{n+1} = \frac{u_n^2}{\sqrt{1+u_n}} \qquad u_0 > 0$$

1. Convergence de (u_n) (en fonction de u_0) ?

2. Etudier la convergence de :

$$v_{n+1} = \frac{v_n^\alpha}{\sqrt{1+v_n}} \qquad v_0 > 0$$

Réponses de l'exercice avec préparation 1 :

1. Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Soit $(A_i)_{i\in I}$ un système complet d'événements (où $I \subset \mathbb{N}$). Soit B un événement. Alors :

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{i\in I} \mathbb{P}(A_i \cap B)$$

Si de plus, pour tout $i \in I$, $\mathbb{P}(A_i) \neq 0$, alors :

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{i\in I} \mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}_{A_i}(B)$$

2. On propose la fonction **Python** suivante :

```
def simulT(n, N, p):
    T = 0
    fortune = n
    while fortune > 0 and fortune < N:
        T += 1
        if rd.random() < p:
            fortune += 1
        else:
            fortune -= 1
    return T
```

3. Soit $j \in \mathbb{N}^*$. Notons A : « le joueur gagne la première partie ». D'après l'énoncé : $\mathbb{P}(A) = p \neq 0$. D'après la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $(A, \overline{A})$:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(T_n = j) &= \mathbb{P}([T_n = j] \cap A) + \mathbb{P}([T_n = j] \cap \overline{A})\\ &= p\,\mathbb{P}_A(T_n = j) + (1-p)\,\mathbb{P}_{\overline{A}}(T_n = j)\\ &= p\,\mathbb{P}(T_{n+1} = j-1) + (1-p)\,\mathbb{P}(T_{n-1} = j-1)\end{aligned}$$

En effet :

- Si l'événement A est réalisé, alors pour que l'expérience se termine en j parties en partant d'une somme de n euros, il faut et il suffit que l'expérience se termine en $j-1$ parties avec une somme de $n+1$ euros (on vient de gagner 1 euro), mais cette fois-ci en commençant à compter à partir de la deuxième partie. De plus, on suppose que les résultats des parties sont indépendants entre eux. Pour terminer, la loi de T_n ne change pas selon la partie de départ que l'on choisit.
- De manière analogue, si l'événement $\overline{A}$ est réalisé, alors pour que l'expérience se termine en j parties en partant d'une somme de n euros, il faut et il suffit que l'expérience se termine en $j-1$ parties avec une somme de $n-1$ euros (on vient de perdre 1 euro), mais cette fois-ci en commençant à compter à partir de la deuxième partie.
- Comme on a supposé dans cette question que $n \in [\![1, N-1]\!]$, on a bien $n+1 \in [\![0, N]\!]$ et $n-1 \in [\![0, N]\!]$.

Commentaire

On peut sans doute se contenter d'une explication telle que présentée ci-dessus pour justifier la formule demandée.
De manière plus formelle, on peut introduire la variable $\tilde{T}_n$ définie exactement comme la variable aléatoire T_n mais en commençant le décompte à partir de la deuxième partie. Il est clair que T_n et $\tilde{T}_n$ suivent la même loi (temps d'attente avant la fin du jeu, en partant de la même somme d'argent initiale). On a alors :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([T_n = j] \cap A) &= \mathbb{P}\left(\left[\tilde{T}_{n+1} = j-1\right] \cap A\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\left[\tilde{T}_{n+1} = j-1\right]\right) \mathbb{P}(A) && \textit{(par indépendance des parties)} \\
&= p\,\mathbb{P}\left(\left[\tilde{T}_{n+1} = j-1\right]\right) \\
&= p\,\mathbb{P}\left([T_{n+1} = j-1]\right) && \textit{(car } T_{n+1} \textit{ et } \tilde{T}_{n+1} \textit{ suivent la même loi)}
\end{aligned}$$

et le calcul est analogue avec $\overline{A}$.

4. Soit $n \in [\![1, N-1]\!]$. On a supposé que T_k admettait une espérance pour tout entier naturel $k \in [\![0, N]\!]$ donc les sommes infinies qui suivent sont bien définies.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(T_n) &= \sum_{j=0}^{+\infty} j\,\mathbb{P}(T_n = j) \\
&= \sum_{j=1}^{+\infty} j\,\mathbb{P}(T_n = j) \\
&= \sum_{j=1}^{+\infty} j\left(p\,\mathbb{P}(T_{n+1} = j-1) + (1-p)\,\mathbb{P}(T_{n-1} = j-1)\right) \\
&= p\sum_{j=1}^{+\infty} j\,\mathbb{P}(T_{n+1} = j-1) + (1-p)\sum_{j=1}^{+\infty} j\,\mathbb{P}(T_{n-1} = j-1) \\
&= p\sum_{j=0}^{+\infty} (j+1)\,\mathbb{P}(T_{n+1} = j) + (1-p)\sum_{j=0}^{+\infty} (j+1)\,\mathbb{P}(T_{n-1} = j) \\
&= p\left(\sum_{j=0}^{+\infty} j\,\mathbb{P}(T_{n+1} = j) + \sum_{j=0}^{+\infty} \mathbb{P}(T_{n+1} = j)\right) + (1-p)\left(\sum_{j=0}^{+\infty} j\,\mathbb{P}(T_{n-1} = j) + \sum_{j=0}^{+\infty} \mathbb{P}(T_{n-1} = j)\right) \\
&= p(\mathbb{E}(T_{n+1}) + 1) + (1-p)(\mathbb{E}(T_{n-1}) + 1)
\end{aligned}$$

en utilisant le fait que les familles $([T_{n+1} = j])_{j\in\mathbb{N}}$ et $([T_{n-1} = j])_{j\in\mathbb{N}}$ sont des systèmes complets d'événements.

Commentaire

On peut aussi utiliser le thm de transfert. Par exemple :

$$\sum_{j=0}^{+\infty} (j+1)\,\mathbb{P}(T_{n+1} = j) = \mathbb{E}(T_{n+1} + 1) = \mathbb{E}(T_{n+1}) + 1$$

5. Soit $n \in [\![1, N-1]\!]$. On cherche une valeur de α telle que la suite $(u_n)_{n\in[\![0,N]\!]}$ soit récurrente linéaire double.
Tout d'abord, en traduisant la formule obtenue à la question précédente, on obtient :

$$\begin{aligned} u_n - n\alpha &= p(1 + u_{n+1} - (n+1)\alpha) + (1-p)(1 + u_{n-1} - (n-1)\alpha) \\ &= 1 + \alpha(1-2p) - n\alpha + pu_{n+1} + (1-p)u_{n-1} \end{aligned}$$

(après avoir développer et simplifier)

D'où :

$$pu_{n+1} - u_n + (1-p)u_{n-1} = (2p-1)\alpha - 1$$

On pose donc :

$$\alpha = \frac{1}{2p-1} \qquad \textit{(possible car } p \neq \frac{1}{2}\textit{)}$$

Dans la suite de l'exercice, on suppose que $p < \frac{1}{2}$ (ce qui est toujours vrai en pratique lorsque l'on joue à la roulette au casino : « le casino est toujours gagnant »).
L'équation caractéristique associée à la suite (u_n) est :

$$px^2 - x + (1-p) = 0$$

de discriminant :

$$\Delta = 1 - 4p(1-p) = 4p^2 - 4p + 1 = (1-2p)^2$$

et dont les racines sont :

$$x_1 = \frac{1-\sqrt{\Delta}}{2p} = \frac{1-(1-2p)}{2p} = 1, \qquad x_2 = \frac{1+\sqrt{\Delta}}{2p} = \frac{1+(1-2p)}{2p} = \frac{1-p}{p}$$

Ainsi, il existe deux réels λ et μ tels que, pour tout $n \in [\![0, N]\!]$:

$$u_n = \lambda + \mu \left(\frac{1-p}{p}\right)^n$$

De plus, on a les conditions aux bords :

$$u_0 = \mathbb{E}(T_0) + 0 \times \alpha = 0, \qquad u_N = \mathbb{E}(T_N) + N\alpha = N\alpha$$

Commentaire

On remarquera que, dans cet exercice, on ne connait pas u_1 et donc on ne peut pas raisonner avec les « conditions initiales » comme on le fait habituellement.

Trouvons maintenant les valeurs de λ et μ :

$$\left\{\begin{array}{lll} \lambda & + \quad \mu & = 0 \\ \lambda & + \left(\frac{1-p}{p}\right)^N \mu & = N\alpha \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{ll} \lambda & = -\dfrac{N\alpha}{\left(\frac{1-p}{p}\right)^N - 1} \\ \mu & = \dfrac{N\alpha}{\left(\frac{1-p}{p}\right)^N - 1} \end{array}\right.$$

Ainsi, pour tout $n \in [\![0, N]\!]$:

$$u_n = \mu\left(\left(\frac{1-p}{p}\right)^n - 1\right) = N\alpha \frac{\left(\frac{1-p}{p}\right)^n - 1}{\left(\frac{1-p}{p}\right)^N - 1}$$

et

$$\mathbb{E}(T_n) = u_n - n\alpha = \alpha\left(N\frac{\left(\frac{1-p}{p}\right)^n - 1}{\left(\frac{1-p}{p}\right)^N - 1} - n\right) = \frac{1}{2p-1}\left(N\frac{\left(\frac{1-p}{p}\right)^n - 1}{\left(\frac{1-p}{p}\right)^N - 1} - n\right)$$

Réponses de l'exercice sans préparation 1 :

1. • On commence par démontrer par récurrence (immédiate) que :

$$\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_n > 0.}$$

• Étudions la monotonie de la suite (u_n). Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{u_n}{\sqrt{1+u_n}}$$

Soit $x > 0$.

$$\begin{aligned}\frac{x}{\sqrt{1+x}} > 1 &\iff x > \sqrt{1+x} \\ &\iff x^2 > 1+x \\ &\iff x^2 - x - 1 > 0\end{aligned}$$

Le discriminant du polynôme $P(x) = x^2 - x - 1$ est :

$$\Delta = 1 + 4 = 5$$

Ses racines sont :

$$x_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} < 0 \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} > 0$$

On démontre alors par récurrence la disjonction de cas suivante :

× Si $u_0 > x_2$, alors la suite (u_n) est strictement croissante et à valeurs dans $[u_0, +\infty[$.

× Si $u_0 = x_2$, alors la suite (u_n) est constante.

× Si $u_0 < x_2$, alors la suite (u_n) est strictement décroissante et à valeurs dans $]0, u_0]$.

• Traitons le cas où $u_0 < x_2$.
Dans ce cas la suite (u_n) est décroissante et minorée par 0 donc, par théorème de convergence monotone, elle converge vers une limite $\ell \geqslant 0$.
Par théorème de point fixe (la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x^2}{\sqrt{1+x}}$ étant continue sur $\mathbb{R}^+$), on a $\ell = f(\ell)$.
Or :

$$\begin{aligned}\ell = f(\ell) &\iff \ell(\sqrt{1+\ell} - \ell) = 0 \\ &\iff \ell = 0 \quad \text{ou} \quad \sqrt{1+\ell} = \ell \\ &\iff \ell = 0 \quad \text{ou} \quad 1 + \ell = \ell^2 \qquad \textit{(car } \ell \geqslant 0\textit{)} \\ &\iff \ell = 0 \quad \text{ou} \quad P(\ell) = 0 \\ &\iff \ell = 0 \quad \text{ou} \quad \ell = x_2\end{aligned}$$

De plus, par décroissance de (u_n), on a $\ell \leqslant u_0 < x_2$. Donc on a forcément $\ell = 0$.

$$\boxed{\text{La suite } (u_n) \text{ converge vers } 0.}$$

- Traitons le cas où $u_0 > x_2$.
  Dans ce cas la suite (u_n) est croissante. Supposons qu'elle soit majorée. Alors elle converge vers un point fixe de f. Or sa limite ℓ vérifie (par croissance de (u_n)) : $\ell \geqslant u_0 > x_2 > 0$. Donc ℓ ne peut pas être égal à un point fixe de f. C'est absurde.

$$\boxed{\text{On en déduit que la suite } (u_n) \text{ est croissante et non majorée et donc } u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.}$$

Question supplémentaire : dans le cas où $u_0 > \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$, déterminer un équivalent simple de u_n lorsque $n \to +\infty$.

- Commençons par une heuristique pour trouver une conjecture.
  On sait dans ce cas que $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$. Ainsi :

$$u_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{u_n^2}{\sqrt{u_n}} = u_n^{3/2}$$

  et donc

$$\ln(u_{n+1}) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{3}{2}\ln(u_n)$$

  Posons $z_n = \ln(u_n)$. La suite (z_n) doit se comporter comme une suite géométrique de raison $\dfrac{3}{2}$ lorsque n est grand. Ainsi, on peut conjecturer que :

$$z_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \lambda \left(\frac{3}{2}\right)^n$$

  où λ est un terme compensant le comportement de la suite (z_n) pour les premiers termes (penser que $z_n \underset{n\to+\infty}{\sim} z_{n_0} \left(\dfrac{3}{2}\right)^{n-n_0}$ où n_0 est le « rang à partir duquel » la suite (z_n) se comporte comme une suite géométrique et poser $\lambda = z_{n_0} \left(\dfrac{3}{2}\right)^{-n_0}$).

  On conjecture alors que la suite $\left(z_n \left(\dfrac{3}{2}\right)^{-n}\right)$ est convergente.

- Démontrons la conjecture précédente. Posons $w_n = z_n \left(\frac{3}{2}\right)^{-n}$.

$$\begin{aligned}
w_{n+1} &= z_{n+1} \left(\frac{3}{2}\right)^{-n-1} \\
&= \ln(u_{n+1}) \left(\frac{3}{2}\right)^{-n-1} \\
&= \ln\left(\frac{u_n^2}{\sqrt{1+u_n}}\right) \left(\frac{3}{2}\right)^{-n-1} \\
&= \left(2\ln(u_n) - \frac{1}{2}\ln(1+u_n)\right) \left(\frac{3}{2}\right)^{-n-1} \\
&= \left(2\ln(u_n) - \frac{1}{2}\ln(u_n) - \frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{1}{u_n}\right)\right) \left(\frac{3}{2}\right)^{-n-1} \\
&= \left(\frac{3}{2}z_n - \frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{1}{u_n}\right)\right) \left(\frac{3}{2}\right)^{-n-1} \\
&= w_n - \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^{-n-1} \ln\left(1+\frac{1}{u_n}\right)
\end{aligned}$$

Or, $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ donc :

$$w_{n+1} - w_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{2u_n}\left(\frac{3}{2}\right)^{-n-1} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(q^n\right) \qquad (*)$$

où $q = \frac{2}{3} \in]-1,1[$.
Il suit que la série $\sum (w_{n+1} - w_n)$ est convergente et donc la suite (w_n) converge. Notons w sa limite.

- Posons $R_n = \sum\limits_{k=n}^{+\infty} (w_k - w_{k+1})$ de sorte que $w_n = w + R_n$.
Ainsi :
$$z_n = w\left(\frac{3}{2}\right)^n + R_n\left(\frac{3}{2}\right)^n$$
et
$$u_n = \exp\left(w\left(\frac{3}{2}\right)^n + R_n\left(\frac{3}{2}\right)^n\right)$$
On pourra conclure que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \exp\left(w\left(\frac{3}{2}\right)^n\right)$ si on démontre que $R_n\left(\frac{3}{2}\right)^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, *i.e.* si $R_n \underset{n\to+\infty}{=} o\left(q^n\right)$.

- La démonstration de la relation de négligeabilité $R_n \underset{n\to+\infty}{=} o\left(q^n\right)$ déborde largement du cadre du programme d'ECG maths appliquées. Il s'agit d'un résultat de sommation des relations de comparaisons que l'on applique à $(*)$ conjugué au fait que :
$$\sum_{k=n}^{+\infty} q^k = \frac{q^n}{1-q}$$

2. • On commence par démontrer par récurrence (immédiate) que :

$$\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ v_n > 0.}$$

- Traitons le cas où $\alpha \leqslant \dfrac{3}{2}$. On a alors $\alpha - 1 \leqslant \dfrac{1}{2}$. Soit $n \in \mathbb{N}$. De deux choses l'une :
  $\times$ si $v_n \geqslant 1$ alors : $v_n^{\alpha-1} \leqslant \sqrt{v_n} \leqslant \sqrt{1+v_n}$.
  $\times$ si $0 < v_n < 1$ alors : $v_n^{\alpha-1} \leqslant 1 \leqslant \sqrt{1+v_n}$.
  Dans tous les cas, on a :
  $$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{v_n^{\alpha-1}}{\sqrt{1+v_n}} \leqslant 1$$
  et donc la suite (v_n) est décroissante. Puisque elle est minorée par 0, on peut conclure qu'elle converge.

<u>Traitons dans la suite le cas où $\alpha > \dfrac{3}{2}$.</u>

- Si la suite (v_n) converge vers une limite notée ℓ, alors ℓ vérifie nécessairement l'équation de point fixe :
  $$\ell^2 \left(\ell^{2\alpha-2} - \ell - 1\right) = 0$$
  Posons, pour tout $x > 0$: $g_\alpha(x) = x^{2\alpha-2} - x - 1$. L'équation de point fixe se réécrit alors :
  $$\ell = 0 \qquad \text{ou} \qquad g_\alpha(\ell) = 0 \qquad (*)$$

- Étudions la monotonie de la suite (v_n). Soit $n \in \mathbb{N}$.
  $$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{v_n^{\alpha-1}}{\sqrt{1+v_n}}$$
  Soit $x > 0$.
  $$\begin{aligned} \frac{x^{\alpha-1}}{\sqrt{1+x}} > 1 &\iff x^{\alpha-1} > \sqrt{1+x} \\ &\iff x^{2\alpha-2} > 1+x \\ &\iff x^{2\alpha-2} - x - 1 > 0 \\ &\iff g_\alpha(x) > 0 \end{aligned}$$
  On a :
  $$g_\alpha'(x) = 2(\alpha-1)x^{2\alpha-3} - 1$$
  et
  $$\begin{aligned} g_\alpha'(x) > 0 &\iff x^{2\alpha-3} > \frac{1}{2(\alpha-1)} && \textit{(car } \alpha - 1 > 0\textit{)} \\ &\iff x > \left(\frac{1}{2(\alpha-1)}\right)^{\frac{1}{2\alpha-3}} = y_\alpha && \textit{(car } 2\alpha - 3 > 0\textit{)} \end{aligned}$$
  Le tableau de variations de g_α est donné par :

x	0		y_α		$+\infty$
Signe de $g_\alpha'(x)$		$-$	0	$+$	
Variations de g_α	-1	$\searrow$	$g_\alpha(y_\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$

Puisque g_α est strictement décroissante sur $]0, y_\alpha]$, il suit que $g_\alpha(y_\alpha) < -1 < 0$ et g_α ne s'annule pas sur $]0, y_\alpha]$.
En appliquant le théorème de la bijection sur $[y_\alpha, +\infty[$, on démontre qu'il existe un unique réel $z_\alpha > y_\alpha$ tel que $g_\alpha(z_\alpha) = 0$.
On démontre alors par récurrence la disjonction de cas suivante :

- × Si $v_0 > z_\alpha$, alors la suite (v_n) est strictement croissante et à valeurs dans $[z_\alpha, +\infty[$. Puisque aucun point fixe (solution de $(*)$) ne se trouve dans cet intervalle, la suite (v_n) diverge vers $+\infty$.
- × Si $v_0 = z_\alpha$, alors la suite (v_n) est constante.
- × Si $v_0 < z_\alpha$, alors la suite (v_n) est strictement décroissante et à valeurs dans $]0, v_0]$. Puisque (v_n) est minorée par 0, elle converge (vers 0 qui est l'unique point fixe dans l'adhérence de cet intervalle).

Sujet E8

Exercice avec préparation 2

Toutes les variables aléatoires de cet exercice sont définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$. Soient a, b, c des réels tels que $0 < a < b < 1$ et $c \geqslant 0$. Soit $f_{a,b,c}$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f_{a,b,c}(x) = \begin{cases} c\left(1 - \frac{x}{a}\right) & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant a \\ \frac{c}{2}\left(1 + \frac{x-1}{1-b}\right) & \text{si } b \leqslant x \leqslant 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Question de cours. Définition de la convergence en loi d'une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers une variable aléatoire Y.

2. Décrire la courbe de $f_{a,b,c}$ dans le cas général et tracer la courbe de $f_{\frac{1}{3},\frac{2}{3},4}$.

3. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

Déterminer c pour que $f_{\frac{1}{n},1-\frac{1}{n},c}$ soit une densité de probabilité.

On note désormais pour $n \geqslant 2$, f_n la densité trouvée et X_n une variable aléatoire admettant f_n comme densité.

4. Montrer que $(X_n)_{n\geqslant 2}$ converge en loi vers une variable aléatoire Y quand n tend vers $+\infty$.

5. Soient a, b, c tels que $f_{a,b,c}$ définisse une densité de probabilité. On suppose que $b = 0.8$ et que la fonction **Python** `simul` permet de simuler une variable X dont une densité serait $f_{a,b,c}$. Que pensez-vous du script suivant ?

```python
W = 0
for i in range(1000):
    S = simul()
    if S < 0.8 and S > W:
        W = S
    print(W)
```

6. ***a)*** Déterminer la limite quand n tend vers $+\infty$ de $f_n(x)$ pour x réel différent de 0 et 1.

b) Quelle est l'espérance $\mathbb{E}(X_n)$ de X_n ? Que vaut $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{E}(X_n)$?

On pourra utiliser le résultat suivant : $\displaystyle\int_b^1 x f_{a,b,c}(x)\, dx = \frac{c}{12}(1-b)(b+2)$.

c) Comparer $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{E}(X_n)$, $\mathbb{E}(Y)$ et $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x \lim_{n\to+\infty} f_n(x)\, dx$.

Commentez.

Exercice sans préparation 2
La base de données `GAMESTAT` d'un jeu vidéo comporte deux tables : la table `joueurs` représente les joueurs et la table `parties` représente les parties. Le schéma est le suivant :

- `joueurs(id,pseudo,credit,niveau)`
  avec
  `id` : identifiant d'un joueur, type entier
  `pseudo` : type chaîne de caractères (pseudonyme du joueur)
  `credit` : type entier (nombre de crédits)
  `niveau` : type entier (niveau atteint par le joueur)
- `parties(id,date,score)`
  avec
  `id` : identifiant d'un joueur, type entier
  `date` : type chaîne de caractères (date de la partie)
  `score` : type entier (score de la partie)

Voici un exemple d'enregistrement de ces deux tables :

table `joueurs`

`id`	`pseudo`	`credit`	`niveau`
49250	princesse	3800	4
49251	oiseau	4200	2
49252	lutin	3100	5
49253	canard	2900	1

table `parties`

`id`	`date`	`score`
49250	2023-05-11	30500
51210	2023-07-12	61200

1. Quel attribut de la table `joueurs` peut être la clé primaire ? Justifier.

2. Écrire la requête `SQL` donnant le niveau du joueur dont l'identifiant est 52725.

3. Écrire la requête `SQL` donnant le pseudo et le niveau des joueurs dont le nombre de crédits est supérieur ou égal à 3000.

4. Écrire la requête `SQL` donnant le pseudo des joueurs ayant joué une partie le 1er juin 2024.

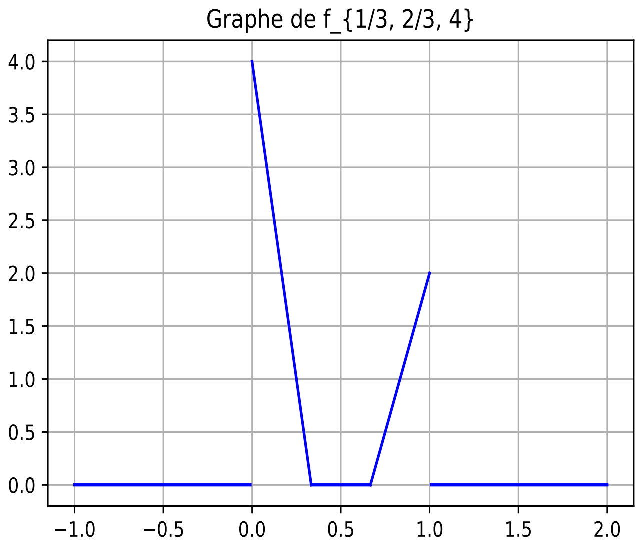
5. Écrire la requête `SQL` donnant le pseudo et l'identifiant des joueurs ayant obtenu au moins une fois le score 50000.

6. Modifier la table `parties` afin de doubler les scores de toutes les parties jouées le 28 mai 2023.

Réponses de l'exercice avec préparation 2 :

1. Pour tout x point de continuité de F_Y : $\lim\limits_{n\to+\infty} F_{X_n}(x) = F_Y(x)$.

2. La fonction $f_{a,b,c}$ est affine par morceaux, nulle sur $]-\infty, 0[$, $]a, b[$ et $]1, +\infty[$. Pour tracer le reste du graphe, on relie les points $(0, c)$ et $(a, 0)$ par un segment, ainsi que les points $(b, 0)$ et $(1, \frac{c}{2})$.



3. $f_{\frac{1}{n},1-\frac{1}{n},c}$ est une densité de probabilité ssi $c = \dfrac{4n}{3}$. On calcule les intégrales non nulles comme aires de triangles.

4. Soit $x \in \mathbb{R}$.

- Premier cas : $x < 0$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $F_{X_n}(x) = 0$ donc $F_{X_n}(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
- Deuxième cas : $x > 1$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $F_{X_n}(x) = 1$ donc $F_{X_n}(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.
- Troisième cas : $0 < x < 1$. Alors, pour tout n assez grand, $\frac{1}{n} < x < 1 - \frac{1}{n}$ et donc

$$F_{X_n}(x) = \int_{-\infty}^{x} f_n(t)\,dt = \int_0^{\frac{1}{n}} \frac{4n}{3}(1-nt)\,dt = \frac{2}{3}$$

  d'où $F_{X_n}(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{2}{3}$.

Notons $Y \hookrightarrow \mathcal{B}\left(\frac{1}{3}\right)$. D'après ce qui précède, pour tout $x \in \mathbb{R}$ point de continuité de F_Y, on a $F_{X_n}(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} F_Y(x)$ donc $X_n \underset{n\to+\infty}{\overset{\mathscr{L}}{\longrightarrow}} Y$.

5. Ce programme simule un échantillon de 1000 réalisations de X et renvoie la plus grande valeur prise par cet échantillon qui soit inférieure à b. Cette valeur est probablement proche de a puisque X prend ses valeurs dans $X(\Omega) = [0, a] \cup [b, 1]$.

6. ***a)*** $f_n(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

b) $\mathbb{E}(X_n) = \dfrac{3n+1}{9n}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{E}(X_n) = \dfrac{1}{3}$.

c) On a $\mathbb{E}(Y) = \dfrac{1}{3} = \lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{E}(X_n)$ et $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x \lim_{n\to+\infty} f_n(x)\,dx = 0$.

On ne peut pas intervertir les symboles limites et intégrales.

Il semble bien plus pertinent (au moins sur cet exemple) de définir la convergence en loi en cherchant la limite de la fonction de répartition plutôt qu'en cherchant la limite de la densité.

Réponses de l'exercice sans préparation 2 :

1. L'attribut `id` et l'attribut `pseudo` peuvent être des clés primaires car chacun identifie un joueur de manière unique.

2.

```
SELECT niveau
FROM joueurs
WHERE id = 52725
```

3.

```
SELECT pseudo, niveau
FROM joueurs
WHERE credit >= 3000
```

4.

```
SELECT pseudo
FROM joueurs INNER JOIN parties
ON joueurs.id = parties.id
WHERE parties.date = '2024-06-01'
```

5.

```
SELECT pseudo, id
FROM joueurs
WHERE id IN (SELECT id FROM parties WHERE score >= 50000)
```

6.

```
UPDATE parties
SET score = score*2
WHERE date = '2023-05-28'
```

<u>Question supplémentaire :</u>
La fonction d'agrégation `MAX` renvoie la valeur maximum des enregistrements d'une sélection.
Écrire la requête `SQL` donnant les identifiants et pseudo des joueurs (éventuellement ex-aequo) ayant obtenu le meilleur score.

```
SELECT id, pseudo
FROM joueurs INNER JOIN parties
ON joueurs.id = parties.id
WHERE score = SELECT( MAX(score) FROM parties)
```