Planches HEC

Sujet E 86

Exercice avec préparation 1

1. Question de cours : Fonctions équivalentes au voisinage de $+\infty$.

Pour tout entier naturel n, soit f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par : $\forall x \geqslant 0,\ f_n(x) = \displaystyle\int_0^1 t^n \mathrm{e}^{-tx}\, dt$.

2. ***a)*** Montrer que pour tout entier naturel n, la fonction f_n est décroissante sur $\mathbb{R}_+$.

b) Étudier la suite $(f_n(0))_{n\geqslant 0}$. En déduire pour tout réel $x \geqslant 0$ fixé, la limite de la suite $(f_n(x))_{n\geqslant 0}$.

3. ***a)*** Soit x un réel strictement positif. Établir pour tout entier $n \geqslant 1$, la relation :

$$f_{n+1}(x) = \frac{n+1}{x}\, f_n(x) - \frac{\mathrm{e}^{-x}}{x}$$

b) Expliciter les fonctions f_0 et f_1.

c) Montrer que pour tout entier naturel n, $f_n(x)$ est équivalent à $\dfrac{n!}{x^{n+1}}$ lorsque x tend vers $+\infty$.

4. ***a)*** Montrer que pour tout entier naturel n et tout réel $x > 0$, on a : $f_n(x) = \dfrac{1}{x^{n+1}} \displaystyle\int_0^x u^n \mathrm{e}^{-u} \mathrm{d}u$.

b) En déduire que la fonction f_n est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et déterminer sa dérivée f_n'.

c) Comparer pour tout réel $y \geqslant 0$, les deux réels y et $1 - \mathrm{e}^{-y}$.
En déduire que pour tout entier naturel n, la fonction f_n est continue en 0.

Exercice sans préparation 1

Soient c et r deux réels strictement positifs.

1. Justifier que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} \dfrac{rc^r}{x^{r+1}} & \text{si } x > c \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ est une densité de probabilité.

2. Soit X une variable aléatoire de densité f. Identifier la loi de la variable aléatoire $Y = \ln(X) - \ln(c)$.

3. Compléter les lignes du code **Python** suivant pour que V soit un vecteur ligne contenant 100 réalisations de la loi de la variable aléatoire X.

```
c = float(input('c ='))
r = float(input('r ='))
U = ______________________________
V = _________________
print(V)
```

Réponses de l'exercice avec préparation 1 :

1. Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. On dit que f et g sont équivalentes au voisinage de $+\infty$ si

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

Commentaire

On a également une écriture à l'aide de la relation de négligeabilité :

$$f(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} g(x) \iff f(x) - g(x) = \underset{x \to +\infty}{o}(g(x))$$

2. a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Soient $0 \leqslant x \leqslant y$. Soit $t \in [0,1]$. On a, par croissance de l'exponentielle :

$$t^n \mathrm{e}^{-tx} \geqslant t^n \mathrm{e}^{-ty}$$

Par croissance de l'intégrale, les bornes étant rangées dans l'ordre croissant :

$$f_n(x) = \int_0^1 t^n \mathrm{e}^{-tx} \, dt \geqslant \int_0^1 t^n \mathrm{e}^{-ty} \, dt = f_n(y)$$

donc f_n est décroissante.

b)

$$f_n(0) = \int_0^1 t^n \, dt = \frac{1}{n+1} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$$

Soit $x \geqslant 0$. On remarque que $0 \leqslant f_n(x) \leqslant f_n(0)$ par croissance de l'intégrale.
Par théorème d'encadrement :

$$f_n(x) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$$

3. a) Soit x un réel strictement positif. Soit $n \geqslant 1$. On fait une IPP :

$$\left| \begin{array}{ll} u'(t) = \mathrm{e}^{-tx} & u(t) = -\dfrac{1}{x}\mathrm{e}^{-tx} \\ v(t) = t^{n+1} & v'(t) = (n+1)t^n \end{array} \right.$$

Cette IPP est valide car u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$. On obtient sans difficulté

$$f_{n+1}(x) = \frac{n+1}{x} f_n(x) - \frac{\mathrm{e}^{-x}}{x}$$

b) Pour tout $x > 0$: $f_0(x) = \dfrac{1 - \mathrm{e}^{-x}}{x}$ et $f_1(x) = \dfrac{1 - \mathrm{e}^{-x} - x\mathrm{e}^{-x}}{x^2}$.

c) Montrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}(n)$
où $\mathcal{P}(n)$: « $f_n(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} \dfrac{n!}{x^{n+1}}$ »
Initialisation :
$f_0(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} \dfrac{1}{x}$ et $\dfrac{0!}{x^{0+1}} = \dfrac{1}{x}$. D'où $\mathcal{P}(0)$.
Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose $\mathcal{P}(n)$. Montrons $\mathcal{P}(n+1)$.

Pour tout $x > 0$:

$$\begin{aligned}\frac{x^{n+2}}{(n+1)!}f_{n+1}(x) &= \frac{x^{n+2}}{(n+1)!}\frac{n+1}{x}\, f_n(x) - \frac{x^{n+2}}{(n+1)!}\frac{\mathrm{e}^{-x}}{x} \\ &= \frac{x^{n+1}}{n!}\, f_n(x) - \frac{x^{n+1}\mathrm{e}^{-x}}{(n+1)!}\end{aligned}$$

Or, par hypothèse de récurrence :

$$\frac{x^{n+1}}{n!}\, f_n(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$$

et par croissance comparées :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^{n+1}\mathrm{e}^{-x}}{(n+1)!} = 0$$

D'où $\mathcal{P}(n+1)$.

4. ***a)*** Le changement de variable affine $u = tx$ donne, pour tout entier naturel n et tout réel $x > 0$:

$$f_n(x) = \frac{1}{x^{n+1}} \int_0^x \; u^n \mathrm{e}^{-u} \mathrm{d}u$$

b) D'après le théorème fondamental de l'analyse, $u \mapsto u^n\mathrm{e}^{-u}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ donc la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_0^x \; u^n\mathrm{e}^{-u}\mathrm{d}u$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. Par produit, f_n est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.
Soit $x > 0$.

$$f_n'(x) = -\frac{n+1}{x^{n+2}}\int_0^x \; u^n\mathrm{e}^{-u}\mathrm{d}u + \frac{1}{x^{n+1}}x^n\mathrm{e}^{-x} = -\frac{n+1}{x}f_n(x) + \frac{\mathrm{e}^{-x}}{x} = -f_{n+1}(x)$$

c) Par convexité de la fonction exp, pour tout réel $y \geqslant 0$: $0 \leqslant 1 - \mathrm{e}^{-y} \leqslant y$.
Ainsi :

$$\begin{aligned}|f_n(0) - f_n(x)| &= \left|\int_0^1 \; t^n \; dt - \int_0^1 \; t^n\mathrm{e}^{-tx} \; dt\right| \\ &= \int_0^1 \; t^n(1-\mathrm{e}^{-tx}) \; dt \\ &\leqslant x\int_0^1 \; t^{n+1} \; dt \\ &= \frac{x}{n+2}\end{aligned}$$

Or,

$$\lim_{x\to0} \frac{x}{n+2} = 0$$

Donc, par théorème d'encadrement :

$$\lim_{x\to0} f_n(x) = f_n(0)$$

Réponses de l'exercice sans préparation 1 :

1. La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en c, est positive sur $\mathbb{R}$ et $\displaystyle\int_c^{+\infty} \; \frac{rc^r}{x^{r+1}} \; dx = 1$.

2. On a $X(\Omega) = [c, +\infty[$ et

$$F_X : x \mapsto \begin{cases} 1 - \left(\frac{c}{x}\right)^r & \text{si } x > c \\ 0 & \text{si } x \leqslant c \end{cases}$$

donc $Y(\Omega) = \mathbb{R}^+$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{E}(r)$.
(X suit une loi de Pareto)

3. On propose le code suivant :

```
c = float(input('c ='))
r = float(input('r ='))
U = rd.exponential(1/r, 100)
V = c * np.exp(U)
print(V)
```

Sujet E 120

Exercice avec préparation 2
Dans tout l'exercice, E désigne un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 2$.

1. Question de cours :
Donner la définition d'une famille génératrice de E. Que peut-on dire de son cardinal ?

Pour tout endomorphisme f de E, on note $C(f)$ l'ensemble des endomorphismes de E qui commutent avec f :

$$C(f) \ = \ \{g \in \mathscr{L}(E) \mid f \circ g = g \circ f\}$$

2. ***a)*** Démontrer que $C(f)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{L}(E)$.

b) Quelle est la plus grande dimension possible de $C(f)$?

3. On suppose dans cette seule question que $E = \mathbb{R}^2$.
On note j l'endomorphisme dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ est $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Trouver les matrices $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ telles que $MJ = JM$.

b) En déduire la dimension de $C(j)$.

4. On suppose dans cette question que f est un endomorphisme de E pour lequel il existe $a \in E$ et $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que la famille $(a, f(a), \dots, f^{n_0}(a))$ est génératrice de E.

a) On note p le plus grand entier strictement positif pour lequel la famille $(a, f(a), \dots, f^{p-1}(a))$ est libre.
Montrer que la famille $(a, f(a), \dots, f^{p-1}(a))$ est une base de E. Que vaut p ?

b) Démontrer que, pour tout endomorphisme $g \in C(f)$, il existe $(\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$ tel que :

$$g \ = \ \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k \, f^k$$

c) En déduire la dimension de $C(f)$.

Exercice sans préparation 2
Une urne contient au départ une boule verte et une boule rouge. On effectue des tirages successifs selon la procédure suivante : on tire une boule, si elle est rouge, on arrête les tirage, si elle est verte, on la remet dans l'urne en ajoutant une boule rouge.
On note X le nombre de tirages effectués.

1. Écrire une fonction **Python** `simulX()` permettant de simuler la variable aléatoire X.

2. Montrer que X admet une espérance et la calculer.

3. Montrer que $\dfrac{1}{X}$ admet une espérance et la calculer.

Réponses de l'exercice avec préparation 2 :

1. Soit $p \geqslant 1$ et $(u_1, \ldots, u_p) \in E^p$. On dit que $(u_1, \ldots, u_p)$ est génératrice de E si

$$\mathrm{Vect}\,(u_1, \ldots, u_p) = E$$

Si $(u_1, \ldots, u_p)$ est génératrice de E, alors $p \geqslant n$.

2. ***a)*** On vérifie que

- $C(f) \subset \mathscr{L}(E)$.
- $C(f) \neq \varnothing$ car $0_{\mathscr{L}(E)} \in C(f)$. En effet, $0_{\mathscr{L}(E)} \circ f = 0_{\mathscr{L}(E)} = f \circ 0_{\mathscr{L}(E)}$.
- $C(f)$ est stable par combinaison linéaire. En effet, soit $(g, h) \in C(f)^2$ et soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned}(\lambda g + \mu h) \circ f &= \lambda g \circ f + \mu h \circ f \\ &= \lambda f \circ g + \mu f \circ h \\ &= f \circ (\lambda g + \mu h)\end{aligned}$$

b) Pour $f = \mathrm{id}_E$, on a $C(f) = \mathscr{L}(E)$ et donc $\dim(C(f)) = n^2$.

3. ***a)***

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} &\iff \begin{pmatrix} c & d \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & c \end{pmatrix} \\ &\iff c = 0 \quad \text{et} \quad a = d\end{aligned}$$

On en déduit que

$$MJ = JM \iff M \in \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \mathrm{Vect}\,(I, J)$$

b) La famille $\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right)$ est libre car constituée de deux vecteurs non colinéaires. On en déduit que $\dim(C(j)) = 2$.

4. ***a)*** Par définition de p, la famille $(a, f(a), \ldots, f^{p-1}(a))$ est libre. Il reste à montrer qu'elle est génératrice de E.
Remarquons tout d'abord que $p \leqslant n \leqslant n_0 + 1$.
Si $p = n_0+1$, alors la famille $(a, f(a), \ldots, f^{p-1}(a)) = (a, f(a), \ldots, f^{n_0}(a))$ est libre et génératrice de E par hypothèse et donc est une base de E.
Traitons maintenant le cas $p \leqslant n_0$.
Montrons par récurrence : $\forall k \in [\![p, n_0]\!], \mathcal{P}(k)$
où $\mathcal{P}(k)$: « $f^k(a) \in \mathrm{Vect}\left(a, f(a), \ldots, f^{p-1}(a)\right)$ »
<u>Initialisation :</u>
La famille $(a, f(a), \ldots, f^{p-1}(a))$ est libre et par maximalité de p, la famille $(a, f(a), \ldots, f^p(a))$ n'est pas libre. Donc $f^p(a) \in \mathrm{Vect}\left(a, f(a), \ldots, f^{p-1}(a)\right)$. D'où $\mathcal{P}(p)$.
<u>Hérédité :</u> Soit $k \in [\![p, n_0 - 1]\!]$. Supposons $\mathcal{P}(k)$. Montrons $\mathcal{P}(k+1)$.
Par hypothèse de récurrence, il existe $(\alpha_0, \ldots, \alpha_{p-1}) \in \mathbb{R}^p$ tel que

$$f^k(a) = \sum_{i=0}^{p-1} \alpha_i f^i(a)$$

On compose par f :

$$f^{k+1}(a) = \sum_{i=0}^{p-1} \alpha_i f^{i+1}(a) = \sum_{i=1}^{p-1} \alpha_{i-1} f^i(a) + \alpha_{p-1} f^p(a)$$

Or, $\sum_{i=1}^{p-1} \alpha_{i-1} f^i(a) \in \text{Vect}\left(a, f(a), \ldots, f^{p-1}(a)\right)$ et $\alpha_{p-1} f^p(a) \in \text{Vect}\left(a, f(a), \ldots, f^{p-1}(a)\right)$ donc $f^{k+1}(a) \in \text{Vect}\left(a, f(a), \ldots, f^{p-1}(a)\right)$. D'où $\mathcal{P}(k+1)$.
On a bien montré par récurrence que pour tout $k \in [\![p, n_0]\!]$, $f^k(a) \in \text{Vect}\left(a, f(a), \ldots, f^{p-1}(a)\right)$.
Ainsi,

$$E = \text{Vect}\left(a, f(a), \ldots, f^{n_0}(a)\right) \subset \text{Vect}\left(a, f(a), \ldots, f^{p-1}(a)\right)$$

et donc la famille $(a, f(a), \ldots, f^{p-1}(a))$ est génératrice de E.
Finalement, $(a, f(a), \ldots, f^{p-1}(a))$ est bien une base de E et on en déduit que $p = n$.

b) Soit $g \in C(f)$. D'après la question précédente, la famille $(a, f(a), \ldots, f^{n-1}(a))$ est une base de E. Ainsi, il existe $(\alpha_0, \ldots, \alpha_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$ tel que :

$$g(a) \;=\; \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k\, f^k(a)$$

Montrons que $g = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k\, f^k$.
Soit $i \in [\![1, n-1]\!]$.

$$\begin{aligned} g\left(f^i(a)\right) &= f^i(g(a)) \\ &= f^i\left(\sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k\, f^k(a)\right) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k\, f^i(f^k(a)) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k\, f^k(f^i(a)) \end{aligned}$$

Ainsi, les endomorphismes g et $\sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k\, f^k$ coïncident sur la base $(a, f(a), \ldots, f^{n-1}(a))$. A ce titre, ils sont égaux.

c) D'après la question précédente :

$$C(f) \subset \text{Vect}\left(\text{id}_E, f, \ldots, f^{n-1}\right)$$

Réciproquement, il est clair que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, f^k commute avec f donc

$$\text{Vect}\left(\text{id}_E, f, \ldots, f^{n-1}\right) \subset C(f)$$

Par double inclusion, on a

$$C(f) = \text{Vect}\left(\text{id}_E, f, \ldots, f^{n-1}\right)$$

Il reste à montrer que la famille $(\text{id}_E, f, \ldots, f^{n-1})$ est libre. Soit $(\alpha_0, \ldots, \alpha_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$ tel que

$$\sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k f^k = 0_{\mathscr{L}(E)}$$

On évalue en a :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k f^k(a) = 0_E$$

ce qui prouve que $\alpha_0 = \cdots = \alpha_{n-1} = 0$ par liberté de la famille $(a, f(a), \ldots, f^{n-1}(a))$.
Donc

$$\dim(C(f)) = \text{Card}((a, f(a), \ldots, f^{n-1}(a))) = n$$

Réponses de l'exercice sans préparation 2 :

1. On propose deux solutions :

```
def simulX():
    X = 1 # Nombre de tirages effectués
    r = 1 # Nombre de boules rouges
    while rd.random() < 1/(r+1): # Tant qu'on tire la boule verte
        X = X+1
        r = r+1
    return X
```

ou bien

```
def simulX():
    X = 0 # Nombre de tirages effectués
    r = 1 # Nombre de boules rouges
    v = 1 # Nombre de boules vertes
    while True:
        X = X+1
        if rd.random() < r/(r+v): # Si on tire une boule rouge
            return X # On arrête l'expérience
        else: # Si on tire une boule verte
            r = r+1
```

Commentaire

Dans le premier programme, on doit initialiser `X` à 1 parce que `X` n'est pas incrémenté par la boucle `while` au moment où l'on tire la première boule rouge qui marque l'arrêt de l'expérience.

2. Tout d'abord, $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$.
Notons, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$R_k : \text{« On tire une boule rouge au } k^{\text{e}} \text{ tirage »}$$
$$V_k : \text{« On tire une boule verte au } k^{\text{e}} \text{ tirage »}$$

Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On a

$$[X = k] = V_1 \cap V_2 \cap \cdots \cap V_{k-1} \cap R_k$$

et donc, d'après la formule des probabilités composées :

$$\mathbb{P}([X = k]) = \frac{1}{2} \times \cdots \times \frac{1}{k} \times \frac{k}{k+1} = \frac{k}{(k+1)!}$$

d'où

$$k\mathbb{P}([X = k]) = \frac{k^2}{(k+1)!} = \frac{(k+1)k - k}{(k+1)!} = \frac{(k+1)k - (k+1) + 1}{(k+1)!} = \frac{1}{(k-1)!} - \frac{1}{k!} + \frac{1}{(k+1)!}$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} k\mathbb{P}([X=k]) &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k-1)!} - \frac{1}{k!} + \frac{1}{(k+1)!} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k-1)!} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+1)!} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} + \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k!} \\
&= 1 - \frac{1}{n!} + \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{k!} - 1 - 1 \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{k!} - 1 - \frac{1}{n!}
\end{aligned}$$

On reconnait la somme partielle d'une série exponentielle, d'où

$$\sum_{k=1}^{n} k\mathbb{P}([X=k]) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathrm{e} - 1$$

Ainsi, la série $\sum k\mathbb{P}([X=k])$ converge absolument (elle est à termes positifs) donc X admet une espérance et

$$\mathbb{E}(X) = \mathrm{e} - 1$$

3. D'après le théorème de transfert, la variable aléatoire $\dfrac{1}{X}$ admet une espérance si et seulement si la série $\sum \dfrac{1}{k}\mathbb{P}([X=k])$ converge absolument. Cela revient à montrer la convergence ici car il s'agit d'une série à termes positifs.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\mathbb{P}([X=k]) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+1)!} = \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k!} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathrm{e} - 2$$

Donc $\dfrac{1}{X}$ admet une espérance et $\mathbb{E}\left(\dfrac{1}{X}\right) = \mathrm{e} - 2$.