Planches HEC

Sujet Maths appliquées 3

Exercice avec préparation 1

On désigne par n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On dispose de n urnes, numérotées de 1 à n, contenant chacune n boules. On répète n épreuves, chacune consistant à choisir une urne au hasard et à en extraire une boule au hasard. On suppose que les choix des urnes sont indépendants les uns des autres. Pour tout i de $1, 2, \dots, n$, on note X_i la variable aléatoire prenant la valeur 1 si l'urne numérotée i contient toujours n boules au bout de ces n épreuves, et qui prend la valeur 0 sinon.
Pour tous i et k de $\{1, 2, \dots, n\}$, on note $U_{i,k}$ l'événement : « l'urne i est choisie à la k^{e} épreuve ».

1. Question de cours : espérance du produit de deux variables aléatoires discrètes indépendantes.

2. ***a)*** Montrer que pour tout $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, $\mathbb{P}(X_i = 1) = \left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^n$.

b) Si $i \neq j$, les variables X_i et X_j sont-elles indépendantes ?

3. On pose $Y_n = \sum\limits_{i=1}^{n} X_i$. Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{\mathbb{E}(Y_n)}{n}$ et en déduire un équivalent simple de $\mathbb{E}(Y_n)$ au voisinage de $+\infty$. Interpréter le résultat obtenu.

4. On considère le programme suivant :

```
import numpy.random as rd
def simulation(n):
    L = n*[n]
    X = n*[0]
    N = n*[0]
    for k in range(n):
        i = rd.randint(0,n)
        L[i] = L[i] - 1
    for j in range(n):
        N[j] = n - L[j]
        ..........
        ..........
    return (X,N)
```

a) Compléter le programme afin que X contienne les valeurs prises par les variables aléatoires $X_1, \dots, X_n$ à la fin de l'expérience.

b) Que représente les variables aléatoires N_i renvoyées par cette fonction ?

c) Les variables N_i et X_i sont-elles indépendantes ?

Exercice sans préparation 1

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue et croissante sur $\mathbb{R}$ et soit y une solution de l'équation différentielle $y'' = f(y)$ sur $[-a, a]$ $(a > 0)$. On suppose que $y(-a) = y(a)$. Montrer que y est paire en étudiant l'intégrale

$$\int_{-a}^{a} \left(y'(t) + y'(-t)\right)^2 \, dt.$$

Réponses de l'exercice avec préparation 1 :

1. Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes indépendantes. Si X et Y admettent une espérance, alors XY aussi et

$$\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$$

2. ***a)*** Soit $i \in \{1, 2, \dots, n\}$.

$$[X_i = 1] = \overline{\bigcup_{k=1}^{n} U_{i,k}} = \bigcap_{k=1}^{n} \overline{U_{i,k}}$$

$$\boxed{\text{D'où, par indépendance des tirages et par équiprobabilité : } \mathbb{P}([X_i = 1]) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n.}$$

b) Fixons $i \neq j$ dans $\{1, 2, \dots, n\}$.

$$[X_i = 1] \cap [X_j = 1] = \overline{\bigcup_{k=1}^{n} U_{i,k} \cup U_{j,k}} = \bigcap_{k=1}^{n} \overline{U_{i,k} \cup U_{j,k}} = \bigcap_{k=1}^{n} \overline{U_{i,k}} \cap \overline{U_{j,k}}$$

D'où, par indépendance des tirages et par équiprobabilité :

$$\mathbb{P}([X_i = 1] \cap [X_j = 1]) = \left(1 - \frac{2}{n}\right)^n$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([X_i = 1] \cap [X_j = 1]) = \mathbb{P}([X_i = 1])\mathbb{P}([X_j = 1]) &\iff \left(1 - \frac{2}{n}\right)^n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{2n} \\
&\iff 1 - \frac{2}{n} = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^2 \\
&\iff \frac{n-2}{n} = \frac{(n-1)^2}{n^2} \\
&\iff n(n-2) = (n-1)^2 \\
&\iff 0 = 1
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Les variables aléatoires } X_i \text{ et } X_j \text{ ne sont pas indépendantes.}}$$

Commentaire

Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes.
Rappelons que, par définition, X et Y sont indépendantes si :

$$\forall (x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega),\ \mathbb{P}([X = x] \cap [Y = y]) = \mathbb{P}([X = x])\mathbb{P}([Y = y])$$

Dans le cas où X et Y suivent toutes les deux une loi de Bernoulli (comme c'est le cas dans cet exercice avec X_i et X_j), l'indépendance doit donc être vérifiée en principe pour tout couple $(x, y) \in \{0, 1\}^2$.
Cependant, on a la propriété de conservation de l'indépendance par passage à l'événement contraire. Plus précisément, si A et B sont deux événements, alors A et B sont indépendants si et seulement si A et $\overline{B}$ sont indépendants.
Pour une variable de Bernoulli, on a :

$$\overline{[X = 1]} = [X = 0]$$

et donc, dans ce cas particulier, X et Y sont indépendantes si et seulement si :

$$\mathbb{P}([X = 1] \cap [Y = 1]) = \mathbb{P}([X = 1])\mathbb{P}([Y = 1])$$

3. Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, X_i suit une loi de Bernoulli de paramètre $\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$. La variable aléatoire Y_n admet une espérance comme somme de variables aléatoires admettant une espérance. Par linéarité de l'espérance :

$$\mathbb{E}(Y_n) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}(X_i) = n\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$$

D'où :

$$\frac{\mathbb{E}(Y_n)}{n} = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e}^{n \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)}$$

Or, $\ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) \underset{n \to +\infty}{\sim} -\frac{1}{n}$ donc $n \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) \underset{n \to +\infty}{\sim} -1$ d'où $\lim\limits_{n \to +\infty} n \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) = -1$.

$$\boxed{\text{Par continuité de l'exponentielle : } \lim_{n \to +\infty} \frac{\mathbb{E}(Y_n)}{n} = \frac{1}{\mathrm{e}} \text{ et } \mathbb{E}(Y_n) \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{n}{\mathrm{e}}.}$$

Interprétation : Y_n compte le nombre d'urnes dans lesquelles aucun tirage n'est effectué. Ainsi, lorsque n est très grand, environ $1/3$ des urnes restent pleines.

4. ***a)*** On complète de la manière suivante :

```
import numpy.random as rd
def simulation(n):
    L = n*[n]
    X = n*[0]
    N = n*[0]
    for k in range(n):
        i = rd.randint(0,n)
        L[i] = L[i] - 1
    for j in range(n):
        N[j] = n - L[j]
        if L[j] == n:
            X[j] = 1
    return (X,N)
```

b) Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, la variable aléatoire N_i compte le nombre de boules manquantes dans l'urne i à la fin des n tirages, c'est-à-dire le nombre de fois où le tirage a été effectué dans l'urne i.
L'expérience consiste en une répétition finie de n épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes, de paramètre $p = \frac{1}{n}$ (le succès étant « le tirage est effectué dans l'urne i »). La variable aléatoire N_i est égale au nombre de succès.

$$\boxed{\text{Ainsi : } N_i \hookrightarrow \mathcal{B}\left(n, \frac{1}{n}\right) \text{ et } \mathbb{E}(N_i) = 1.}$$

c) Soit $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. On remarque que $[X_i = 1] = [N_i = 0]$. Ainsi : $X_i N_i = 0$.
On en déduit que $\mathbb{E}(X_i N_i) = 0$. Or, $\mathbb{E}(X_i)\mathbb{E}(N_i) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \neq 0$.

$$\boxed{\text{Les variables aléatoires } X_i \text{ et } N_i \text{ ne sont pas indépendantes.}}$$

Réponses de l'exercice sans préparation 1 :

- La fonction y est deux fois dérivable sur $[-a, a]$ en tant que solution de l'équation différentielle $y'' = f(y)$. La fonction f étant continue sur $\mathbb{R}$, il suit que y'' est continue sur $[-a, a]$ par composition et donc y' est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[-a, a]$.

- Procédons par IPP en remarquant que :

$$\int_{-a}^{a} \big(y'(t)+y'(-t)\big)^2 \ dt = \int_{-a}^{a} \big(y'(t)+y'(-t)\big)\big(y'(t)+y'(-t)\big) \ dt$$

On pose :

$$\left| \begin{array}{ll} u'(t) = y'(t)+y'(-t) & u(t) = y(t)-y(-t) \\ v(t) = y'(t)+y'(-t) & v'(t) = y''(t)-y''(-t) \end{array} \right.$$

Cette IPP est valide car u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[-a,a]$.

$$\int_{-a}^{a} \big(y'(t)+y'(-t)\big)^2 \ dt = \Big[\ (y(t)-y(-t))(y'(t)+y'(-t)) \ \Big]_{-a}^{a} - \int_{-a}^{a} (y(t)-y(-t))(y''(t)-y''(-t)) \ dt$$

(le crochet s'annule car $y(a)=y(-a)$)

$$= -\int_{-a}^{a} \big(y(t)-y(-t)\big)\big(f(y(t))-f(y(-t))\big) \ dt$$

La fonction f étant croissante sur $\mathbb{R}$, le nombre $f(y(t))-f(y(-t))$ a le même signe que le nombre $y(t)-y(-t)$. On en déduit que :

$$\forall t \in [-a,a], \ \big(y(t)-y(-t)\big)\big(f(y(t))-f(y(-t))\big) \geqslant 0$$

Par positivité de l'intégrale, les bornes étant rangées dans l'ordre croissant, on a :

$$\int_{-a}^{a} \big(y'(t)+y'(-t)\big)^2 \ dt \leqslant 0$$

Or, pour tout $t \in [-a,a]$, $(y'(t)+y'(-t))^2 \geqslant 0$ et donc, à nouveau par positivité de l'intégrale, les bornes étant rangées dans l'ordre croissant, on a :

$$\int_{-a}^{a} \big(y'(t)+y'(-t)\big)^2 \ dt \geqslant 0$$

D'où :

$$\int_{-a}^{a} \big(y'(t)+y'(-t)\big)^2 \ dt = 0$$

Par continuité et positivité de l'intégrande, il vient :

$$\forall t \in [-a,a], \ \big(y'(t)+y'(-t)\big)^2 = 0$$

et donc

$$\forall t \in [-a,a], \ y'(t)+y'(-t) = 0$$

On pose $\varphi : t \mapsto y(t)-y(-t)$. D'après ce qui précède, la fonction φ est dérivable sur $[-a,a]$ et, pour tout $t \in [-a,a]$, $\varphi'(t)=0$. Ainsi, la fonction φ est constante sur $[-a,a]$. De plus, $\varphi(a)=0$.

$$\boxed{\text{Pour tout } t \in [-a,a],\ y(t)=y(-t). \text{ La fonction } y \text{ est paire.}}$$