Planches HEC

Sujet E 4

Exercice avec préparation 1

1. Question de cours : Formule des probabilités totales.

2. Pour tout couple (n,p) d'entiers naturels, on pose : $I_{n,p} = \displaystyle\int_0^1 x^n(1-x)^p dx$.

a) Calculer $I_{n,0}$.

b) Exprimer $I_{n,p+1}$ en fonction de $I_{n+1,p}$.

c) En déduire l'expression de $I_{n,p}$ en fonction de n et p.

On dispose de N urnes ($N \geqslant 1$) notées $U_1, U_2, \ldots, U_N$. Pour tout $k \in [\![1, N]\!]$, l'urne U_k contient k boules rouges et $N-k$ boules blanches.
On choisit au hasard une urne avec une probabilité proportionnelle au nombre de boules rouges qu'elle contient ; dans l'urne ainsi choisie, on procède à une suite de tirages d'une seule boule avec remise dans l'urne considérée.
On suppose que l'expérience précédente est modélisée par un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.

3. Pour tout $k \in [\![1, N]\!]$, calculer la probabilité de choisir l'urne U_k.

Soit n un entier fixé de $\mathbb{N}^*$. On note E_n et R_{2n+1} les évènements suivants :
E_n : « au cours des $2n$ premiers tirages, on a obtenu n boules rouges et n boules blanches »
R_{2n+1} : « on a obtenu une boule rouge au $(2n+1)^{\text{e}}$ tirage »

4. *a)* Exprimer $\mathbb{P}(E_n)$ sous forme d'une somme.

b) Donner une expression de la probabilité conditionnelle $\mathbb{P}_{E_n}(R_{2n+1})$.

5. Montrer que $\lim\limits_{N\to+\infty} \mathbb{P}_{E_n}(R_{2n+1}) = \frac{I_{n+2,n}}{I_{n+1,n}} = \frac{n+2}{2n+3}$.

On **admettra** pour cela le résultat suivant : si $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ est continue, alors

$$\lim_{N\to+\infty} \frac{1}{N+1}\sum_{k=1}^{N} f\left(\frac{k}{N}\right) = \int_0^1 f(x)\, dx$$

Exercice sans préparation 1

On note $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées réelles d'ordre 2.

1. Donner une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

2. *a)* Écrire une fonction **Python** `inv(M)` prenant en entrée une matrice $M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ sous forme de tableau numpy et renvoyant `True` si M est inversible et `False` sinon. On n'utilisera aucune fonction préprogrammée en **Python**.

b) Peut-on trouver une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ formée de matrices inversibles ?

3. Peut-on trouver une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ formée de matrices diagonalisables ?

Réponses de l'exercice avec préparation 1 :

1. Soit B un événement et soit $(A_i)_{i\in I}$ un système complet d'événements où I est dénombrable. Alors

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{i\in I} \mathbb{P}(B \cap A_i)$$

Si de plus, pour tout $i \in I$, $\mathbb{P}(A_i) \neq 0$, alors

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{i\in I} \mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}_{A_i}(B)$$

2. ***a)*** $I_{n,0} = \displaystyle\int_0^1 x^n \, dx = \frac{1}{n+1}$.

b) On procède par intégration par parties et on trouve :

$$I_{n,p+1} = \frac{p+1}{n+1} I_{n+1,p}$$

c) D'après les questions ***2.a)*** et ***2.b)*** :

$$\begin{aligned}
I_{n,p} &= \frac{p}{n+1} I_{n+1,p-1} \\
&= \frac{p}{n+1}\frac{p-1}{n+2} I_{n+2,p-2} \\
&= \dots \\
&= \frac{p}{n+1}\frac{p-1}{n+2} \cdots \frac{1}{n+p} I_{n+p,0} \\
&= \frac{p}{n+1}\frac{p-1}{n+2} \cdots \frac{1}{n+p}\frac{1}{n+p+1} \\
&= \frac{p!n!}{(n+p+1)!}
\end{aligned}$$

3. Notons A_k : « On choisit l'urne U_k ».
D'après l'énoncé, $\mathbb{P}(A_k)$ est proportionnelle à k donc il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $k \in [\![1, N]\!]$,

$$\mathbb{P}(A_k) = \alpha k$$

Or,

$$\sum_{k=1}^{N} \mathbb{P}(A_k) = 1$$

donc on en déduit que

$$\alpha = \frac{2}{N(N+1)}$$

et finalement,

$$\boxed{\mathbb{P}(A_k) = \frac{2k}{N(N+1)}}$$

4. ***a)*** La famille $(A_k)_{k\in[\![1,N]\!]}$ est un système complet d'événements. D'après la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(E_n) &= \sum_{k=1}^{N} \mathbb{P}(A_k \cap E_n) \\
&= \sum_{k=1}^{N} \mathbb{P}(A_k)\mathbb{P}_{A_k}(E_n) \\
&= \sum_{k=1}^{N} \frac{2k}{N(N+1)}\binom{2n}{n}\left(\frac{k}{N}\right)^n\left(1-\frac{k}{N}\right)^n && \textit{(loi binomiale)} \\
&= \binom{2n}{n}\frac{2}{N+1}\sum_{k=1}^{N}\left(\frac{k}{N}\right)^{n+1}\left(1-\frac{k}{N}\right)^n
\end{aligned}$$

b) Tout d'abord,

$$\mathbb{P}_{E_n}(R_{2n+1}) = \frac{\mathbb{P}(E_n \cap R_{2n+1})}{\mathbb{P}(E_n)}$$

De manière analogue à la question précédente, on obtient :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(E_n \cap R_{2n+1}) &= \sum_{k=1}^{N} \mathbb{P}(A_k)\mathbb{P}_{A_k}(E_n \cap R_{2n+1}) \\
&= \sum_{k=1}^{N} \mathbb{P}(A_k)\mathbb{P}_{A_k}(E_n)\mathbb{P}_{A_k}(R_{2n+1}) && \textit{(par indépendance des tirages lorsque l'urne est connue)} \\
&= \sum_{k=1}^{N} \frac{2k}{N(N+1)}\binom{2n}{n}\left(\frac{k}{N}\right)^n\left(1-\frac{k}{N}\right)^n \frac{k}{N} \\
&= \binom{2n}{n}\frac{2}{N+1}\sum_{k=1}^{N}\left(\frac{k}{N}\right)^{n+2}\left(1-\frac{k}{N}\right)^n
\end{aligned}$$

Finalement,

$$\boxed{\mathbb{P}_{E_n}(R_{2n+1}) = \frac{\dfrac{1}{N+1}\displaystyle\sum_{k=1}^{N}\left(\tfrac{k}{N}\right)^{n+2}\left(1-\tfrac{k}{N}\right)^n}{\dfrac{1}{N+1}\displaystyle\sum_{k=1}^{N}\left(\tfrac{k}{N}\right)^{n+1}\left(1-\tfrac{k}{N}\right)^n}.}$$

Commentaire

La notion d'indépendance est subtile et peut être contre-intuitive. Rappelons que l'indépendance de deux événements est une notion qui dépend d'une probabilité fixée.
Ici, les événements E_n et R_{2n+1} :
- × sont indépendants pour la probabilité $\mathbb{P}_{A_k}$,
- × mais ne sont pas indépendants pour la probabilité $\mathbb{P}$.

En effet, les tirages avec remise sont indépendants lorsqu'ils se produisent dans une urne dont le contenu est donné à l'avance. Dans cet exercice, le contenu de l'urne est choisi aléatoirement lors de la première étape de l'expérience.

5. D'après le résultat admis, en posant $f : x \mapsto x^{n+2}(1-x)^n$ et $g : x \mapsto x^{n+1}(1-x)^n$ qui sont bien toutes les deux continues sur $[0,1]$, on a

$$\lim_{N\to+\infty} \mathbb{P}_{E_n}(R_{2n+1}) = \frac{I_{n+2,n}}{I_{n+1,n}} = \frac{\frac{n!(n+2)!}{(2n+3)!}}{\frac{n!(n+1)!}{(2n+2)!}} = \frac{n+2}{2n+3}$$

Réponses de l'exercice sans préparation 1 :

1. On propose la base

$$\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

2. ***a)*** On propose la fonction **Python** suivante (utilisant le déterminant des matrices 2×2) :

```
def inv(M):
    det = M[0,0]*M[1,1] - M[0,1]*M[1,0]
    if det == 0:
        return False
    else:
        return True
```

b) On propose la base

$$\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

3. On propose la base

$$\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$$