Planches HEC

Sujet E5

Exercice avec préparation 1

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et f un endomorphisme de $\mathbb{R}^{2n+1}$ dont la matrice dans la base canonique $(e_1, e_2, \dots, e_{2n+1})$ est

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & \ddots & & & & \iddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & 0 & \iddots & & \vdots \\ \vdots & & 0 & 1 & 0 & & \vdots \\ \vdots & & \iddots & 0 & \ddots & & \vdots \\ 0 & \iddots & & & & \ddots & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$M = (m_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ où pour tout $(i,j) \in [\![1, 2n+1]\!]^2$: $m_{i,j} = 1$ si $i = j$ ou $i + j = 2n + 2$ et $m_{i,j} = 0$ sinon.

On note $(E_1, \dots, E_{2n+1})$ la base canonique de $\mathscr{M}_{2n+1,1}(\mathbb{R})$.

1. **Question de cours :** Donner la définition d'une matrice diagonalisable et une caractérisation.

2. *a)* Justifier que M est diagonalisable.

b) Justifier que E_{n+1} est un vecteur propre de M et déterminer la valeur propre associée.

3. Notons pour tout entier k de $[\![1, n]\!]$, $F_k = \mathrm{Vect}\,(e_k, e_{2n+2-k})$.

a) Soit g_k l'application définie sur F_k qui à tout élément x de F_k associe $f(x)$.
Montrer que g_k est un endomorphisme de F_k et donner sa matrice, A_k, dans la base (e_k, e_{2n+2-k}).

b) Diagonaliser A_k.

c) En déduire une base de F_k dans laquelle la matrice de g_k est diagonale.

4. Déterminer les valeurs propres de M et ses sous-espaces propres associés à partir des questions précédentes.

5. Pour tout entier k de $[\![1, n]\!]$,

a) Soit B une matrice de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $B^2 = A_k$.
On admettra que B admet les même vecteurs propres que A_k. Déterminer toutes les matrices B qui conviennent.

b) En déduire qu'il existe un endomorphisme h_k de F_k tel que $h_k^2 = g_k$.

6. Proposer à partir des questions précédentes une matrice J de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $H^2 = M$. Combien de telles matrices pourraient être proposées ici ?

Exercice sans préparation 1

Soit le script **Python** :

```python
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
plt.plot(np.linspace(-1, 0.01, 100), np.zeros(100))
x = np.arange(0, 3, 0.01)
y = x ** 2 / 2
y = 1 - np.exp(-y)
plt.plot(x,y)
plt.show()
```

L'exécution de ce script permet d'obtenir la représentation graphique sur $[-1, 3]$ d'une fonction F. On suppose que l'expression de F proposée sur $[-1, 0]$ est en fait valable sur $\mathbb{R}_-$ et que celle proposée sur $]0, 3]$ est valable sur $\mathbb{R}_+^*$.

1. Tracer la courbe représentative de F. On donne $\exp(\frac{-1}{2}) \simeq 0.6$.

2. F est-elle la fonction de répartition d'une variable aléatoire X ?
Si oui, quelle est l'espérance de X si elle existe ?

3. On suppose connue une fonction **Python** nommée `simul` permettant de simuler X. Ecrire un script donnant une valeur approchée de π.

Réponses de l'exercice avec préparation 1 :

1. M est dite diagonalisable si il existe une matrice P inversible telle que $P^{-1}MP$ est diagonale.
M est diagonalisable ssi il existe une base de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de M.

2. ***a)*** M est symétrique réelle donc diagonalisable.

b) $ME_{n+1} = E_{n+1}$ et $E_{n+1} \neq 0$ donc 1 est valeur propre de M et E_{n+1} est un vecteur propre de M associé à la valeur propre 1.

3. ***a)*** f est linéaire donc g_k est linéaire.
$g_k(e_k) = f(e_k) = e_k + e_{2n+2-k}$ et $g_k(e_{2n+2-k}) = f(e_{2n+2-k}) = e_k + e_{2n+2-k}$ donc, par linéarité, $g_k(F_k) \subset F_k$. D'où g_k est un endomorphisme de F_k et $A_k = \mathrm{Mat}_{(e_k, e_{2n+2-k})}(g_k) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

b) $\mathrm{Sp}(A_k) = \{0, 2\}$, $E_0(A_k) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$ et $E_2(A_k) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

La famille $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ est une base de $\mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de A_k donc A_k est diagonalisable.

On pose $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Par formule de changement de base : $A_k = PDP^{-1}$ où $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

c) D'après ce qui précède, $\mathrm{Mat}_{e_k - e_{2n+2-k}, e_k + e_{2n+2-k}}(g_k) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

4. D'après les calculs précédents, $\{0, 1, 2\} \subset \mathrm{Sp}(M)$ et

- $\mathrm{Vect}\,(E_{n+1}) \subset E_1(M)$ donc $1 \leqslant \dim(E_1(M))$
- $\mathrm{Vect}\,(E_k - E_{2n+2-k}, k \in [\![1, n]\!]) \subset E_0(M)$ donc $n \leqslant \dim(E_0(M))$
- $\mathrm{Vect}\,(E_k + E_{2n+2-k}, k \in [\![1, n]\!]) \subset E_2(M)$ donc $n \leqslant \dim(E_2(M))$

En effet, les trois familles de vecteurs trouvées sont libres (car étagées).

On a alors $2n + 1 \leqslant \dim(E_1(M)) + \dim(E_0(M)) + \dim(E_2(M)) \leqslant 2n + 1$ et donc les inégalités précédentes sont toutes des égalités.

Finalement $\mathrm{Sp}(M) = \{0, 1, 2\}$, $E_1(M) = \mathrm{Vect}\,(E_{n+1})$, $E_0(M) = \mathrm{Vect}\,(E_k - E_{2n+2-k}, k \in [\![1, n]\!])$, $E_2(M) = \mathrm{Vect}\,(E_k + E_{2n+2-k}, k \in [\![1, n]\!])$.

5. ***a)*** *(Analyse)* Puisque B admet les même vecteurs propres que A_k, $B' = P^{-1}BP$ est une matrice diagonale.

Or, $(B')^2 = P^{-1}B^2P = P^{-1}A_kP = D$. D'où $B' = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$ ou $B' = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\sqrt{2} \end{pmatrix}$.

(Synthèse) Réciproquement, en posant $B = P\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}P^{-1}$ ou $B = P\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\sqrt{2} \end{pmatrix}P^{-1}$, B convient.

b) Il suffit de prendre h_k un endomorphisme représenté dans la base (e_k, e_{2n+2-k}) par l'une des deux matrices proposées à la question précédente.

6. Notons Q la matrice de passage de la base canonique vers la base $(e_{n+1}, e_1 - e_{2n+1}, e_1 + e_{2n+1}, e_2 - e_{2n}, e_2 + e_{2n}, \ldots, e_n - e_{n+2}, e_n + e_{n+2})$. On propose les matrices $H = Q\Delta Q^{-1}$ où

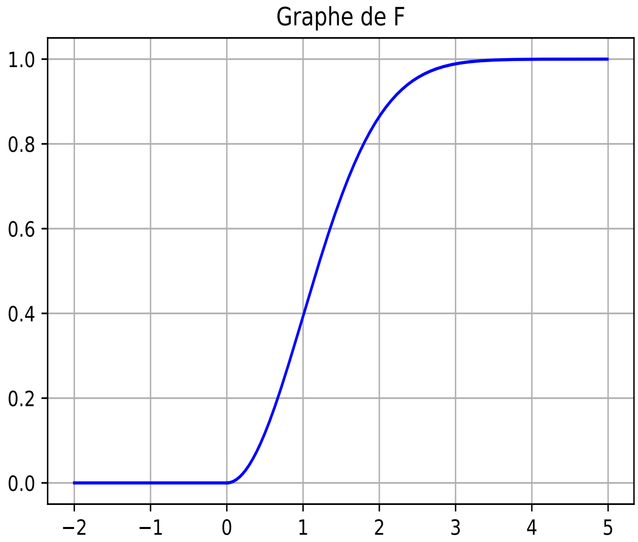
$$\Delta = \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 & \cdots & & & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \pm\sqrt{2} & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ \vdots & & & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & & & 0 & \pm\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Il y a 2^{n+1} telles matrices.

Réponses de l'exercice sans préparation 1 :

1. Pour tout $x < 0$, $F(x) = 0$ et pour tout $x \geqslant 0$, $F(x) = 1 - \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$.

$F'(x) = \begin{cases} x\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ et $F''(x) = \begin{cases} (1-x^2)\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$. Point d'inflexion en 1.



2. F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, est croissante sur $\mathbb{R}$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = 1$. Donc F est la fonction de répartition d'une v.a.r. à densité X, de densité $f = F'$.

Pour calculer $\mathbb{E}(X) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\ dx$, on a deux méthodes au choix.

Méthode 1 :

On utilise un moment de loi usuelle. Plus précisément :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\mathrm{d}x \\
&= \int_{0}^{+\infty} xf(x)\mathrm{d}x \\
&= \int_{0}^{+\infty} x^2\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2}\mathrm{d}x \\
&= \sqrt{2\pi}\int_{0}^{+\infty} x^2\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2}\mathrm{d}x \\
&= \frac{\sqrt{2\pi}}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} x^2\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2}\mathrm{d}x && \textit{(par parité de l'intégrande)} \\
&= \sqrt{\frac{\pi}{2}}\ \mathbb{E}(Z^2) && \textit{(où } Z \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)\textit{)} \\
&= \sqrt{\frac{\pi}{2}} && \textit{(par Koenig-Huygens)}
\end{aligned}$$

Méthode 2 :

On fait une IPP en choisissant comme primitive de f la fonction $F - 1$. On trouve également $\mathbb{E}(X) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

3. On utilise la méthode de Monte-Carlo :

```
N = 10000
S = 0
for k in range(N):
    S = S + simul()
E = S / N
approx = 2 * (E ** 2)
print(approx)
```

Sujet Maths appliquées 8

Exercice avec préparation 2

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$J_n = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^3)^{n+1}}$$

1. Cours : développement limité de $\ln(1+x)$ pour x au voisinage de 0.

2. Montrer la convergence de l'intégrale J_n pour tout $n \in \mathbb{N}$ et préciser son signe.

3. Soit $n \in \mathbb{N}$. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^3}{(1+x^3)^{n+2}}\mathrm{d}x$ converge et exprimer sa valeur en fonction de J_n.

4. En déduire la monotonie de la suite $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et la relation : $\forall n \in \mathbb{N}, J_{n+1} = \dfrac{3n+2}{3n+3}J_n$.

5. On admet que $J_0 = \dfrac{2\pi}{3\sqrt{3}}$. Écrire en **Python** une fonction prenant en argument un entier n et qui renvoie la liste des $n+1$ premiers termes de la suite $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

6. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $u_n = n^{\frac{1}{3}} J_n$.

a) À l'aide de développements limités usuels, montrer que $\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{9n^2}$.

b) En déduire qu'il existe un réel $A > 0$ tel que $J_n \underset{n\to+\infty}{\sim} An^{-\frac{1}{3}}$.

Exercice sans préparation 2

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant une loi de Poisson de paramètre λ avec $\lambda > 0$. On définit la matrice $M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ par $M = \begin{pmatrix} X & 0 \\ X+Y & Y \end{pmatrix}$. Soit A l'événement « La matrice M est diagonalisable ».

1. Déterminer la probabilité p de l'événement A. On donnera le résultat sous forme d'une série numérique dépendant uniquement de λ.

2. À l'aide de simulations des variables aléatoires X et Y, proposer une fonction **Python** qui renvoie une valeur approchée de p.

Réponses de l'exercice avec préparation 2 :

1. D'après le cours :

$$\boxed{\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \underset{x\to 0}{o}(x^2).}$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}$.

La fonction $h_n : x \mapsto \dfrac{1}{(1+x^3)^{n+1}}$ est continue et strictement positive sur $[0, +\infty[$ donc J_n est impropre en $+\infty$.

De plus :

$$h_n(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{x^{3n+3}}$$

Or, $3n+3 \geqslant 3$ donc l'intégrale de Riemann $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{3n+3}} \mathrm{d}x$ converge.

Ainsi, par critère de comparaison pour les intégrales généralisées de fonctions continues et positives :

$$\boxed{\text{l'intégrale } J_n \text{ converge.}}$$

De plus, par positivité de l'intégrale (les bornes étant rangées dans l'ordre croissant) :

$$\boxed{J_n > 0.}$$

3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $B \geqslant 0$. On procède par IPP :

$$\left| \begin{array}{ll} u(x) = \dfrac{x}{3} & u'(x) = \dfrac{1}{3} \\[2ex] v(x) = -\dfrac{1}{(n+1)(1+x^3)^{n+1}} & v'(x) = \dfrac{3x^2}{(1+x^3)^{n+2}} \end{array} \right.$$

Cette IPP est valide car u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, B]$. On a alors :

$$\begin{aligned}
\int_0^B \frac{x^3}{(1+x^3)^{n+2}} \mathrm{d}x &= \int_0^B \frac{x}{3} \frac{3x^2}{(1+x^3)^{n+2}} \mathrm{d}x \\
&= \left[-\frac{1}{(n+1)(1+x^3)^{n+1}} \frac{x}{3} \right]_0^B + \frac{1}{3(n+1)} \int_0^B \frac{1}{(1+x^3)^{n+1}} \mathrm{d}x \\
&= -\frac{B}{3(n+1)(1+B^3)^{n+1}} + \frac{1}{3(n+1)} \int_0^B \frac{1}{(1+x^3)^{n+1}} \mathrm{d}x \\
&\underset{B\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{3(n+1)} J_n
\end{aligned}$$

Ceci prouve que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^3}{(1+x^3)^{n+2}} \mathrm{d}x$ converge et :

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{x^3}{(1+x^3)^{n+2}} \mathrm{d}x = \frac{1}{3(n+1)} J_n}$$

4. Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après la question précédente et par linéarité de l'intégrale :

$$\frac{1}{3(n+1)} J_n = \int_0^{+\infty} \frac{(1+x^3)-1}{(1+x^3)^{n+2}} \mathrm{d}x = J_n - J_{n+1}$$

On tire de cette relation :

$$\boxed{J_{n+1} = \frac{3n+2}{3n+3} J_n.}$$

De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $J_n > 0$ et donc :

$$\frac{J_{n+1}}{J_n} = \frac{3n+2}{3n+3} < 1$$

$$\boxed{\text{On en déduit que la suite } (J_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est strictement décroissante.}}$$

5. On propose la fonction **Python** suivante :

```python
def listeJ(n):
    liste = [2*np.pi/(3*np.sqrt(3))]
    for k in range(n):
        liste.append((3*k+2)/(3*k+3) * liste[k])
    return liste
```

6. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $u_n = n^{\frac{1}{3}} J_n$.

a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}
\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n) &= \frac{1}{3}\ln(n+1) + \ln(J_{n+1}) - \frac{1}{3}\ln(n) - \ln(J_n) \\
&= \frac{1}{3}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) + \ln\left(\frac{J_{n+1}}{J_n}\right) \\
&= \frac{1}{3}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) + \ln\left(\frac{3n+2}{3n+3}\right) \\
&= \frac{1}{3}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) + \ln\left(1-\frac{1}{3n+3}\right) \\
&= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) + \left(-\frac{1}{3n+3} - \frac{1}{2(3n+3)^2} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \\
&= \frac{1}{3n} - \frac{1}{3n+3} - \frac{1}{6n^2} - \frac{1}{2(3n+3)^2} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right) \\
&= \frac{1}{n(3n+3)} - \frac{1}{6n^2} - \frac{1}{2(3n+3)^2} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)
\end{aligned}$$

On en déduit que :

$$n^2(\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n)) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{18} = \frac{1}{9}$$

$$\boxed{\text{Autrement dit : } \ln(u_{n+1}) - \ln(u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{9n^2}.}$$

b) D'après la question précédente, la série $\sum \ln(u_{n+1}) - \ln(u_n)$ converge. Ainsi, la suite $(\ln(u_n))$ converge. On note ℓ sa limite. Par continuité de l'exponentielle, la suite (u_n) converge vers $A = \mathrm{e}^{\ell} > 0$.

Puisque $A > 0$, on a : $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} A$. Or, $u_n = n^{\frac{1}{3}} J_n$ et donc

$$\boxed{J_n \underset{n\to+\infty}{\sim} A n^{-\frac{1}{3}}.}$$

Réponses de l'exercice sans préparation 2 :

1. Les valeurs propres de M sont X et Y. Dans le cas où M possède une unique valeur propre, M est diagonalisable si et seulement si elle est diagonale (raisonnement par l'absurde habituel). Ainsi :

$$A = [X \neq Y] \cup ([X = Y] \cap [X + Y = 0]) = [X \neq Y] \cup [X = Y = 0]$$

Par incompatibilité et par indépendance :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A) &= \mathbb{P}([X \neq Y]) + \mathbb{P}([X = Y = 0]) \\ &= 1 - \mathbb{P}([X = Y]) + \mathbb{P}([X = Y = 0]) \\ &= 1 - \mathbb{P}([X = Y]) + \mathrm{e}^{-2\lambda}\end{aligned}$$

D'après la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements associé à X :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}([X = Y]) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}([X = Y] \cap [X = k]) \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}([Y = k] \cap [X = k]) \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}([X = k])\mathbb{P}([Y = k]) && \textit{(par indépendance)} \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{\lambda^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda}\right)^2 && \textit{(par indépendance)} \\ &= \mathrm{e}^{-2\lambda} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^{2k}}{(k!)^2}\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } p = 1 - \mathrm{e}^{-2\lambda} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\lambda^{2k}}{(k!)^2}.}$$

2. On propose la fonction **Python** suivante :

```
def diagonalisable(lam, N):
    compteur = 0
    for k in range(N):
        X = rd.poisson(lam)
        Y = rd.poisson(lam)
        if X != 0 and X == Y:
            compteur += 1
    return 1 - compteur/N
```

Remarquons que la variable `compteur` compte combien de fois la matrice M n'est pas diagonalisable lors des N simulations.

Sujet E 214

Exercice avec préparation 3
Soit (a, b) un couple de réels tels que : $a^2 - 4\,b > 0$.
On s'intéresse ici aux fonctions f de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ telle que :

$$f'' + a\,f' + b\,f \;=\; 0$$

On note E l'espace vectoriel des fonctions réelles de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.
On note F l'ensemble des éléments f de E tels que :

$$f'' + a\,f' + b\,f \;=\; 0$$

On note enfin F_0 l'ensemble des éléments de F vérifiant de plus :

$$f(0) \;=\; f'(0) \;=\; 0$$

1. Question de cours.
Rappeler la définition de la dimension d'un espace vectoriel. Comparer cette dimension avec le cardinal d'une famille libre de vecteurs de ce même espace vectoriel.

2. Montrer que F et F_0 sont deux espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$.

3. Soient s et r les deux solutions réelles de l'équation

$$x^2 + a\,x + b = 0$$

On suppose $s < r$. Soient f_1 et f_2 les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_1 : x \mapsto \mathrm{e}^{r\,x} \qquad \text{et} \qquad f_2 : x \mapsto \mathrm{e}^{s\,x}$$

Montrer que (f_1, f_2) est une famille libre d'éléments de F. Que peut-on en déduire concernant la dimension de F ?

4. Soit f un élément de F.

a) Montrer qu'il existe un unique couple (a_1, a_2) de réels tels que :

$$f - a_1\,f_1 - a_2\,f_2 \;\in\; F_0$$

b) Soient g_1 et g_2 les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$g_1 : x \mapsto \mathrm{e}^{-r\,x}\,\big(f'(x) - s\,f(x)\big) \qquad \text{et} \qquad g_2 : x \mapsto \mathrm{e}^{-s\,x}\,\big(f'(x) - r\,f(x)\big)$$

Montrer que g_1 et g_2 sont deux fonctions constantes sur $\mathbb{R}$.

c) Soit $f \in F_0$. Soient g_1 et g_2 définies comme dans la question précédente. Montrer que les fonctions g_1, g_2 et f sont identiquement nulles.

5. Soit φ l'application définie par :

$$\varphi : \begin{array}{ccc} F & \to & \mathbb{R}^2 \\ f & \mapsto & \big(f(0),\, f'(0)\big) \end{array}$$

Montrer que φ est un isomorphisme de F sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice sans préparation 3

Soit X une variable aléatoire définie sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ et suivant la loi uniforme sur $[-1, 1]$. Soit U une variable aléatoire définie sur le même espace probabilisé, indépendante de X et telle que :

$$\mathbb{P}([U = 1]) \ = \ \mathbb{P}([U = -1]) \ = \ \frac{1}{2}$$

On pose : $S = U\,X$.

1. ***a)*** Que fait la fonction **Python** suivante ?

```
def rad():
    x = rd.random()
    if x <= 0.5:
        return 1
    else:
        return -1
```

b) Écrire un script **Python** utilisant la fonction précédente qui permet de simuler la loi de S.

2. Déterminer la loi de S.

Réponses de l'exercice avec préparation 3 :

Commentaire

Le but de cet exercice est de démontrer un résultat du cours d'ECG maths appli sur les équations différentielles linéaires homogènes d'ordre 2 à coefficients constants. Il avait été posé à une époque où le programme ne contenait aucun chapitre sur les équations différentielles. Il ne nécessite donc aucune connaissance sur ce chapitre.
Dans la question *4*, on trouve la forme de toutes les solutions.
Dans la question *5*, on démontre que tout problème de Cauchy admet une unique solution.

1. Soit E un espace vectoriel. Si E possède une base finie, alors toutes ses bases sont finies et ont le même cardinal. Ce cardinal commun est appelé dimension de E.
Le cardinal d'une famille libre est toujours inférieur ou égal à la dimension de l'espace vectoriel.

2. F et F_0 sont deux sous-ensembles de E, qui contiennent chacun la fonction nulle et qui sont stables par combinaison linéaire. Ainsi, ce sont deux sous-espaces vectoriels de E et donc sont deux espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$.

3. Un calcul direct montre que $f_1 \in F$ et $f_2 \in F$.
Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\lambda f_1 + \mu f_2 = 0$. On a alors

$$\forall x \in \mathbb{R}, \lambda \mathrm{e}^{rx} + \mu \mathrm{e}^{sx} = 0$$

On divise par $\mathrm{e}^{rx} > 0$. On obtient alors

$$\forall x \in \mathbb{R}, \lambda + \mu \mathrm{e}^{(s-r)x} = 0$$

En faisant tendre x vers $+\infty$, on obtient : $\lambda = 0$. Il suit que $\mu = 0$ puisque $\mathrm{e}^{(s-r)x} \neq 0$.
On peut en déduire que $\dim(F) \geqslant 2$.

4. ***a)*** Soit f un élément de F. Soit $(a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned} f - a_1 f_1 - a_2 f_2 \in F_0 &\iff \left\{ \begin{array}{ll} f(0) - a_1 f_1(0) - a_2 f_2(0) & = 0 \\ f'(0) - a_1 f_1'(0) - a_2 f_2'(0) & = 0 \end{array} \right. \\ &\iff \begin{cases} a_1 \quad + \ a_2 = f(0) \\ r a_1 \quad + s a_2 = f'(0) \end{cases} \\ &\iff \left\{ \begin{array}{ll} a_1 & = \frac{f'(0) - s f(0)}{r - s} \\ a_2 & = \frac{f'(0) - r f(0)}{s - r} \end{array} \right. \end{aligned}$$

b) Soit f un élément de F. Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$g_1'(x) = \mathrm{e}^{-rx} \left(f''(x) - (s+r) f'(x) + sr f(x) \right)$$

et comme s et r sont les deux racines réelles de l'équation $x^2 + ax + b = 0$, on a $sr = b$ et $s + r = -a$. D'où

$$g_1'(x) = \mathrm{e}^{-rx} \left(f''(x) + a f'(x) + b f(x) \right) = 0$$

car $f \in F$. Donc g_1 est constante sur $\mathbb{R}$. Il en est de même pour g_2.

c) Soit $f \in F_0$. Les fonctions g_1 et g_2 sont constantes sur $\mathbb{R}$ et vérifient :

$$g_1(0) = g_2(0) = 0$$

donc sont nulles sur $\mathbb{R}$.
Il suit que f vérifie l'équation différentielle $y' = sy$ et la condition initiale $f(0) = 0$. Par unicité de la solution à un problème de Cauchy, on en déduit que f est la fonction nulle.

5. Tout d'abord, φ est linéaire.
Ensuite, d'après la question ***4.c)***, φ est injective. Ceci a pour conséquence l'inégalité suivante :

$$\dim(F) \leqslant \dim(\mathbb{R}^2) = 2$$

Or, on savait déjà que $\dim(F) \geqslant 2$ (cf question ***3***). Donc $\dim(F) = 2$ et φ est un isomorphisme de F sur $\mathbb{R}^2$.

Réponses de l'exercice sans préparation 3 :

1. ***a)*** La fonction `rad` simule la variable aléatoire U.

b) On propose la fonction **Python** suivante :

```
def simulS():
    U = rad()
    X = 2 * rd.random() - 1
    return U * X
```

2. $S(\Omega) = [-1, 1]$. Soit $x \in [-1, 1]$.

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([S \leqslant x]) &= \mathbb{P}([UX \leqslant x]) \\
&= \frac{1}{2}\mathbb{P}([X \leqslant x]) + \frac{1}{2}\mathbb{P}([-X \leqslant x]) && \textit{(FPT et indépendance de } U \textit{ et } X\textit{)} \\
&= \frac{1}{2}\left(\mathbb{P}([X \leqslant x]) + \mathbb{P}([X \geqslant -x])\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\mathbb{P}([X \leqslant x]) + 1 - \mathbb{P}([X \leqslant -x])\right) && \textit{(car } X \textit{ est à densité)} \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{x+1}{2} + 1 - \frac{-x+1}{2}\right) && \textit{car } x \in [-1,1] \textit{ et } -x \in [-1,1] \\
&= \frac{x+1}{2}
\end{aligned}$$

Donc $S \hookrightarrow \mathcal{U}([-1, 1])$.

Sujet Maths appliquées 2

Exercice avec préparation 4

On considère un entier naturel $n \geqslant 3$, un entier naturel impair $N \geqslant 3$ et un réel $S > 0$.
On note $N = 2p + 1$.
Un jeu oppose n joueurs $J_1, \ldots, J_n$. Le jeu consiste à lancer N fois une pièce équilibrée par une machine. Avant les lancers, chaque joueur prédit le résultat de chaque lancer. Sont déclarés gagnants les joueurs ayant obtenu le plus grand nombre de prévisions correctes (dans l'ordre) ; ils se partagent la somme de S euros.
Par exemple, si $N = 3$ et si les lancers donnent PFP, un joueur ayant prédit FFP aura deux prévisions correctes.
Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on note X_k le nombre de prévisions correctes du joueur J_k et G_k son gain.

1. Cours : énoncer la formule du binôme de Newton.

2. Montrer que, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $\mathbb{E}(G_k) = \dfrac{S}{n}$.

3. Écrire en **Python** une fonction `jeu` simulant le jeu et renvoyant une liste de n nombres représentant le gain de chaque joueur.

4. On suppose que les joueurs J_1 et J_2 adoptent la stratégie suivante : le joueur J_1 choisit les prévisions contraires à celles du joueur J_2 (qui choisit ses prévisions au hasard). Les joueurs J_1 et J_2 décident de partager leur gain à l'issue du jeu.
Par exemple, si $N = 3$ et si le joueur J_2 choisit PPF, le joueur J_1 choisit FFP.
Les autres joueurs jouent indépendamment des deux joueurs J_1 et J_2. On admet que les variables aléatoires $X_1, X_3, \ldots, X_n$ sont mutuellement indépendantes, tout comme les variables aléatoires $X_2, X_3, \ldots, X_n$.
On note $Y = \max(X_1, X_2)$ et $H = G_1 + G_2$.

   a) Justifier que toutes les variables aléatoires X_k suivent une même loi à déterminer.
   Pour tout $i \in [\![0, n]\!]$, on note $q_i = \mathbb{P}(X_k = i)$ et $f_i = \mathbb{P}(X_k \leqslant i)$.

   b) Déterminer l'ensemble $Y(\Omega)$ des valeurs prises par la variable aléatoire Y.

   c) Justifier que $f_p = \dfrac{1}{2}$.

   d) Pour tout $j \in [\![1, n-1]\!]$ et $i \in Y(\Omega)$, montrer que :
$$\mathbb{P}\left(H = \frac{S}{j}, Y = i\right) = 2\binom{n-2}{j-1} q_i^j f_{i-1}^{n-1-j}.$$

   e) En déduire $\mathbb{E}(H)$, $\mathbb{E}(G_1)$ et $\mathbb{E}(G_2)$. La stratégie des joueurs J_1 et J_2 est-elle avantageuse ?

Exercice sans préparation 4

A l'aide d'une intégration par parties, montrer que $\displaystyle\int_x^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\, dt \underset{x \to +\infty}{\sim} \frac{\mathrm{e}^{-x^2}}{2x}$.

Réponses de l'exercice avec préparation 4 :

1. Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ et soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

2. Par symétrie des rôles, les variables aléatoires X_k (resp. G_k) suivent la même loi. Toutes les variables aléatoires étant finies, elles admettent une espérance. On en déduit que :

$$\mathbb{E}(G_1) = \mathbb{E}(G_2) = \cdots = \mathbb{E}(G_n)$$

De plus, d'après le principe du jeu :

$$\sum_{k=1}^{n} G_k = S$$

En passant à l'espérance, on obtient, pour $k \in [\![1,n]\!]$ fixé :

$$n\mathbb{E}(G_k) = S$$

$$\boxed{\text{D'où : } \mathbb{E}(G_k) = \frac{S}{n}.}$$

3. • On propose d'abord une fonction **Python** qui simule entièrement le jeu, y compris les lancers de la pièce par la machine

```python
def jeu(n, N, S):
    X = [0 for k in range(n)] # nombre de prévisions correctes des joueurs
    for i in range(N):
        lancer = rd.randint(0,2) # lancer numéro i de la pièce par la machine
        for k in range(n):
            if rd.randint(0,2) == lancer: # si le joueur k a réussi sa prévision
                X[k] += 1
    m = max(X) # nombre maximal de prévisions correctes
    gagnants = [] # liste des joueurs gagnants
    for k in range(n):
        if X[k] == m: # si le joueur k est gagnant
            gagnants.append(k)
    gain = S / len(gagnants)
    G = [0 for k in range(n)] # liste des gains des joueurs
    for k in gagnants:
        G[k] = gain
    return G
```

• Solution moins dans l'esprit du sujet. Les variables aléatoires X_k sont indépendantes et suivent toutes la loi $\mathcal{B}\left(N, \frac{1}{2}\right)$. Simuler le jeu revient à simuler les X_k, puis à compter combien il y a de gagnants puis à leur partager la somme S de manière équitable.

```python
def jeubis(n, N, S):
    nbPrevisionsJoueurs = rd.binomial(N, 1/2, n)
    maxPrevisions = max(nbPrevisionsJoueurs)
    nbGagnants = 0
    for k in range(n):
        if nbPrevisionsJoueurs[k] == maxPrevisions:
            nbGagnants += 1
    listeGains = []
    for k in range(n):
        if nbPrevisionsJoueurs[k] == maxPrevisions:
            listeGains.append(S/nbGagnants)
        else:
            listeGains.append(0)
    return listeGains
```

4. a) • Soit $k \in [\![2, n]\!]$. Pour le joueur k, l'expérience consiste en une répétition de N épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes, de paramètre $\frac{1}{2}$ (le succès étant : « faire la bonne prédiction »).

$$\boxed{\text{Pour tout } k \in [\![2, n]\!],\ X_k \hookrightarrow \mathcal{B}\left(N, \tfrac{1}{2}\right).}$$

• Ensuite, $X_1 = N - X_2$, c'est-à-dire que X_1 est égale au nombre d'échecs du joueur J_2. Puisque la pièce est équilibrée, le fait de compter les succès ou les échecs donne la même loi.

$$\boxed{\text{D'où } X_1 \hookrightarrow \mathcal{B}\left(N, \tfrac{1}{2}\right).}$$

b) $X_1 = N - X_2$ donc $Y = \max(N - X_2, X_2)$ d'où

$$Y(\Omega) = \{\max(N-k, k) \mid k \in [\![0, N]\!]\}$$

Or, $N - k = k \iff 2k = N \iff k = \dfrac{N}{2}$ mais N est impair.

$$\boxed{\text{On en déduit que } Y(\Omega) = [\![\tfrac{N+1}{2}, N]\!] = [\![p+1, 2p+1]\!].}$$

c)

$$\begin{aligned}
f_p &= \mathbb{P}([X_k \leqslant p]) \\
&= \mathbb{P}\left(\left[X_k \leqslant \frac{N-1}{2}\right]\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\left[N - X_k \leqslant \frac{N-1}{2}\right]\right) && \textit{(car } X_k \textit{ et } N - X_k \textit{ suivent la même loi)} \\
&= \mathbb{P}\left(\left[\frac{N+1}{2} \leqslant X_k\right]\right) \\
&= 1 - \mathbb{P}\left(\left[\frac{N+1}{2} > X_k\right]\right) \\
&= 1 - \mathbb{P}\left(\left[X_k \leqslant \frac{N-1}{2}\right]\right) \\
&= 1 - f_p
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{D'où : } f_p = \frac{1}{2}.}$$

d) • Soit $i \in Y(\Omega)$. Tout d'abord, rappelons que $X_1 = N - X_2$. Ainsi, puisque N est impair, X_1 et X_2 ne peuvent pas prendre la même valeur. De plus, si X_2 (resp. X_1) prend la valeur i, alors X_1 (resp. X_2) prend une valeur strictement inférieure à i. On en déduit que :

$$[Y = i] = [X_1 = i] \cup [X_2 = i]$$

et les événements $[X_1 = i]$ et $[X_2 = i]$ sont incompatibles.

$$\boxed{\text{Pour tout } i \in Y(\Omega),\ \mathbb{P}([Y = i]) = 2q_i \neq 0.}$$

• Soit $i \in Y(\Omega)$ et soit $j \in [\![1, n-1]\!]$. D'après ce qui précède, on peut écrire que :

$$\mathbb{P}\left(H = \frac{S}{j}, Y = i\right) = \mathbb{P}([Y = i])\mathbb{P}_{[Y=i]}\left(\left[H = \frac{S}{j}\right]\right) = 2q_i\mathbb{P}_{[Y=i]}\left(\left[H = \frac{S}{j}\right]\right)$$

Supposons l'événement $[Y = i]$ réalisé. Dans ce cas :

$\left[H = \dfrac{S}{j}\right]$ est réalisé $\iff$ Il y a j gagnants en tout
`ET` l'un des j gagnants est J_1 ou J_2

$\iff$ Il y a j gagnants en tout
`ET` le nombre maximal de prévisions correctes est i

$\iff$ Le nombre maximal de prévisions correctes est i
`ET` il y a $j-1$ gagnants parmi les joueurs $J_3, \dots, J_n$

$\iff$ $j-1$ joueurs parmi $J_3, \dots, J_n$ obtiennent i prévisions correctes
`ET` $(n-2)-(j-1) = n-1-j$ joueurs parmi $J_3, \dots, J_n$ obtiennent moins de $i-1$ prévisions correctes

Ainsi, par indépendance des choix des joueurs $J_3, \dots, J_n$:

$$\mathbb{P}_{[Y=i]}\left(\left[H = \frac{S}{j}\right]\right) = \binom{n-2}{j-1} q_i^{j-1} f_{i-1}^{n-1-j}$$

$$\boxed{\text{D'où : } \mathbb{P}\left(H = \frac{S}{j}, Y = i\right) = 2\binom{n-2}{j-1} q_i^{j} f_{i-1}^{n-1-j}.}$$

e) Tout d'abord, remarquons que $H(\Omega) = \{0\} \cup \{\frac{S}{j} \mid j \in [\![1, n-1]\!]\}$ (il ne peux pas y avoir n gagnants puisque J_1 et J_2 ne peuvent pas gagner simultanément).

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(H) &= 0 \times \mathbb{P}([H=0]) + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{S}{j} \mathbb{P}\left(\left[H = \frac{S}{j}\right]\right) \\
&= \sum_{j=1}^{n-1} \frac{S}{j} \sum_{i \in Y(\Omega)} \mathbb{P}\left(H = \frac{S}{j}, Y = i\right) && \textit{(Formule des probabilités totales avec le sce associé à } Y\textit{)} \\
&= \sum_{j=1}^{n-1} \frac{S}{j} \sum_{i=p+1}^{2p+1} 2\binom{n-2}{j-1} q_i^j f_{i-1}^{n-1-j} \\
&= 2S \sum_{i=p+1}^{2p+1} \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{j} \binom{n-2}{j-1} q_i^j f_{i-1}^{n-1-j} \\
&= 2S \sum_{i=p+1}^{2p+1} \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{n-1} \binom{n-1}{j} q_i^j f_{i-1}^{n-1-j} && \textit{(formule du capitaine)} \\
&= \frac{2S}{n-1} \sum_{i=p+1}^{2p+1} \left((q_i + f_{i-1})^{n-1} - f_{i-1}^{n-1}\right) && \textit{(binôme de Newton)} \\
&= \frac{2S}{n-1} \sum_{i=p+1}^{2p+1} \left(f_i^{n-1} - f_{i-1}^{n-1}\right) \\
&= \frac{2S}{n-1} \left(1 - f_p^{n-1}\right) && \textit{(par télescopage)} \\
&= \frac{2S}{n-1} \left(1 - \frac{1}{2^{n-1}}\right) && \textit{(d'après la question } \textbf{\textit{4.c)}}\textit{)}
\end{aligned}$$

Par symétrie des rôles de J_1 et J_2 : $\mathbb{E}(G_1) = \mathbb{E}(G_2)$. De plus, $H = G_1 + G_2$ donc

$$\mathbb{E}(G_1) = \mathbb{E}(G_2) = \frac{1}{2}\mathbb{E}(H) = \frac{S}{n-1}\left(1 - \frac{1}{2^{n-1}}\right)$$

Comparons maintenant les deux espérances selon la stratégie choisie :

$$\begin{aligned}
\frac{S}{n-1}\left(1 - \frac{1}{2^{n-1}}\right) > \frac{S}{n} &\iff 1 - \frac{1}{2^{n-1}} > \frac{n-1}{n} \\
&\iff 1 - \frac{n-1}{n} > \frac{1}{2^{n-1}} \\
&\iff \frac{1}{n} > \frac{1}{2^{n-1}} \\
&\iff n < 2^{n-1}
\end{aligned}$$

ce qui est vrai pour tout entier $n \geqslant 3$ par récurrence immédiate.

$$\boxed{\text{La stratégie des joueurs } J_1 \text{ et } J_2 \text{ est donc avantageuse.}}$$

Réponses de l'exercice sans préparation 4 :

- On commence par montrer que $\displaystyle\int_x^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\, dt$ est convergente.
  - × les fonctions $t \mapsto \mathrm{e}^{-t^2}$ et $t \mapsto \dfrac{1}{t^2}$ sont continues et positives sur $[x, +\infty[$
  - × $\mathrm{e}^{-t^2} \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$
  - × l'intégrale $\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{1}{t^2}\, dt$ converge par critère de Riemann

Par critère de négligeabilité pour les intégrales généralisées de fonctions continues et positives, on en déduit que $\displaystyle\int_x^{+\infty} e^{-t^2}\, dt$ est convergente.

- Soit $x \geqslant 1$ et soit $B \geqslant x$. On remarque que :

$$\int_x^B e^{-t^2}\, dt = \int_x^B \frac{-1}{2t}(-2te^{-t^2})\, dt$$

On procède par IPP :

$$\left| \begin{array}{ll} u'(t) = -2te^{-t^2} & u(t) = e^{-t^2} \\ v(t) = \dfrac{-1}{2t} & v'(t) = \dfrac{1}{2t^2} \end{array} \right.$$

Cette IPP est valide car u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[x, B]$. On a alors :

$$\int_x^B e^{-t^2}\, dt = \left[\frac{-1}{2t}e^{-t^2} \right]_x^B - \int_x^B \frac{1}{2t^2}e^{-t^2}\, dt = -\frac{e^{-B^2}}{2B} + \frac{e^{-x^2}}{2x} - \int_x^B \frac{1}{2t^2}e^{-t^2}\, dt$$

× $\displaystyle\lim_{B\to+\infty} \frac{e^{-B^2}}{2B} = 0$

× $\displaystyle\int_x^B \frac{1}{2t^2}e^{-t^2}\, dt = \frac{e^{-x^2}}{2x} - \frac{e^{-B^2}}{2B} - \int_x^B e^{-t^2}\, dt$ et tous les termes à droite admettent une limite lorsque B tend vers $+\infty$, donc $\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{1}{2t^2}e^{-t^2}\, dt$ est convergente

En passant à la limite lorsque B tend vers $+\infty$, on obtient :

$$\int_x^{+\infty} e^{-t^2}\, dt = \frac{e^{-x^2}}{2x} - \int_x^{+\infty} \frac{1}{2t^2}e^{-t^2}\, dt$$

De plus, par croissance de l'intégrale, les bornes étant rangées dans l'ordre croissant :

$$0 \leqslant \int_x^{+\infty} \frac{1}{2t^2}e^{-t^2}\, dt \leqslant \int_x^{+\infty} \frac{1}{2x^2}e^{-t^2}\, dt = \frac{1}{2x^2}\int_x^{+\infty} e^{-t^2}\, dt$$

On en déduit, par théorème d'encadrement, que :

$$\int_x^{+\infty} \frac{1}{2t^2}e^{-t^2}\, dt = \underset{x\to+\infty}{o}\left(\int_x^{+\infty} e^{-t^2}\, dt\right)$$

$$\boxed{\text{D'où l'équivalent : } \int_x^{+\infty} e^{-t^2}\, dt \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{e^{-x^2}}{2x}.}$$

Question supplémentaire : En déduire, pour $0 < a < b$, la valeur de : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(\int_a^b e^{-nt^2}\, dt\right)^{\frac{1}{n}}$.

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $I_n = \left(\displaystyle\int_a^b e^{-nt^2}\, dt\right)^{\frac{1}{n}}$ et $J_n = \displaystyle\int_a^b e^{-nt^2}\, dt$, de sorte que $I_n = e^{\frac{1}{n}\ln(J_n)}$.

On pose également, pour tout $x \geqslant 1$, $\varphi(x) = \displaystyle\int_x^{+\infty} e^{-t^2}\, dt$.

On effectue le changement de variable affine $\sqrt{n}t = u$:

$$\begin{aligned}
J_n &= \frac{1}{\sqrt{n}} \int_{a\sqrt{n}}^{b\sqrt{n}} \mathrm{e}^{-u^2} \ dt \\
&= \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\varphi(a\sqrt{n}) - \varphi(b\sqrt{n})\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\frac{\mathrm{e}^{-na^2}}{2a\sqrt{n}} - \frac{\mathrm{e}^{-nb^2}}{2b\sqrt{n}} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right) \\
&= \frac{\mathrm{e}^{-na^2}}{2an} \left(1 - \frac{a}{b}\mathrm{e}^{-n(b^2-a^2)} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\mathrm{e}^{-na^2}\right)\right) \\
&= \frac{\mathrm{e}^{-na^2}}{2an} \left(1 + \underset{n\to+\infty}{o}(1)\right)
\end{aligned}$$

D'où :

$$\begin{aligned}
I_n &= \mathrm{e}^{\frac{1}{n}\ln\left(\frac{\mathrm{e}^{-na^2}}{2an}\left(1+\underset{n\to+\infty}{o}(1)\right)\right)} \\
&= \mathrm{e}^{\frac{1}{n}\left(-na^2-\ln(2an)+\ln\left(1+\underset{n\to+\infty}{o}(1)\right)\right)} \\
&= \mathrm{e}^{-a^2-\frac{\ln(2an)}{n}+\frac{1}{n}\ln\left(1+\underset{n\to+\infty}{o}(1)\right)}
\end{aligned}$$

Or,

× $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln(2an)}{n} = 0$ par croissances comparées

× $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n}\ln\left(1 + \underset{n\to+\infty}{o}(1)\right) = 0$

$$\boxed{\text{Par continuité de l'exponentielle : } \lim_{n\to+\infty} I_n = \mathrm{e}^{-a^2}.}$$

Sujet Maths appliquées 5

Exercice avec préparation 5

Soit la relation de récurrence : $(\mathcal{R})$ $\begin{cases} u_0 = 1 \\ \text{pour } n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n - 4 + \mathrm{e}^{u_n} \end{cases}$.

1. **Cours.** Théorème de la limite monotone pour une suite.

2. Montrer que $(\mathcal{R})$ définit une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, que cette suite est décroissante, et qu'elle tend vers $-\infty$.

3. *a)* Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n = 1 - 4n + \sum\limits_{k=0}^{n-1} \mathrm{e}^{u_k}$.

En déduire : $1 - 4n \leqslant u_n \leqslant \mathrm{e} - 3n$.

b) Montrer que la somme $\sum\limits_{k=0}^{n-1} \mathrm{e}^{u_k}$ est majorée par la constante $\dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{e}}}{1 - \mathrm{e}^{-3}}$.

4. *a)* Déterminer une suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général de la forme $w_n = c \cdot n^p$, avec $c \in \mathbb{R}^*$ et $p \in \mathbb{Z}$, telle que les suites $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soient équivalentes quand n tend vers $+\infty$.

b) Montrer que pour $n \geqslant 700$, $\left|\dfrac{u_n}{w_n} - 1\right| < 10^{-2}$.

c) Compléter le programme **Python** ci-dessous pour qu'il donne le plus petit entier naturel n tel que $\left|\dfrac{u_n}{w_n} - 1\right| < 10^{-2}$.

```
from numpy import exp, abs

u = -3 + np.exp(1)
n = 1

while .......... >= .01:
    u = ..........
    n += 1
print(n)
```

Exercice sans préparation 5

Soient $A_1, \ldots, A_n$ des événements d'un espace probabilisé. Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on note B_k l'événement « au moins k événements parmi $A_1, \ldots, A_n$ sont réalisés ».

En considérant la variable aléatoire $X = \sum\limits_{k=1}^{n} \mathbb{1}_{A_k}$, montrer que :

$$\sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A_k) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(B_k).$$

Réponses de l'exercice avec préparation 5 :

1. Soit (u_n) une suite de réels.

- Si (u_n) est croissante et majorée, alors elle converge.
- Si (u_n) est décroissante et minorée, alors elle converge.

2. Posons $f : x \mapsto x - 4 + \mathrm{e}^x$. La fonction f est bien définie sur $\mathbb{R}$ et la propriété $(\mathcal{R})$ se réécrit : $(\mathcal{R})$ $\begin{cases} u_0 = 1 \\ \text{pour } n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$.

$$\boxed{\text{Ainsi, il vient que la suite } (u_n) \text{ est bien définie.}}$$

Montrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$
où $\mathcal{P}(n)$: « $u_n \leqslant 1$ ».
Initialisation :
On a $u_0 = 1$. D'où $\mathcal{P}(0)$.
Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{P}(n)$. Montrons $\mathcal{P}(n+1)$.
On a :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= u_n - 4 + \mathrm{e}^{u_n} \\ &\leqslant 1 - 4 + \mathrm{e} && \textit{(par hypothèse de récurrence)} \\ &\leqslant \mathrm{e} - 3 \end{aligned}$$

Or, $\mathrm{e} \simeq 2,7$ donc $u_{n+1} < 0 \leqslant 1$. D'où $\mathcal{P}(n+1)$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$u_{n+1} - u_n = \mathrm{e}^{u_n} - 4 \leqslant \mathrm{e} - 4 < 0$$

$$\boxed{\text{Donc la suite } (u_n) \text{ est strictement décroissante.}}$$

Supposons que (u_n) soit minorée. Dans ce cas elle converge par théorème de la limite monotone. Notons ℓ sa limite. Par théorème de point fixe (la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$), on obtient :

$$\ell = \ell - 4 + \mathrm{e}^{\ell}$$

et donc :

$$\mathrm{e}^{\ell} = 4$$

Or, $\ell \leqslant u_0 = 1$ par décroissance de (u_n). C'est absurde.

$$\boxed{\text{On peut alors conclure que } (u_n) \text{ est décroissante et non minorée donc elle diverge vers } -\infty.}$$

3. ***a)*** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Sommons la relation de récurrence $u_{k+1} - u_k = -4 + \mathrm{e}^{u_k}$ pour k variant de 0 à $n-1$ (valable car $n - 1 \geqslant 0$).

$$\sum_{k=0}^{n-1} (u_{k+1} - u_k) = \sum_{k=0}^{n-1} (-4 + \mathrm{e}^{u_k})$$

et donc, par télescopage :

$$u_n - u_0 = -4n + \sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{e}^{u_k}$$

d'où :

$$u_n = 1 - 4n + \sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{e}^{u_k}$$

On remarque pour finir que cette formule est encore valable pour $n = 0$.

$$\boxed{\text{Ainsi : } \forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 1 - 4n + \sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{e}^{u_k}.}$$

- D'après la formule précédente :

$$u_n - (1-4n) = \sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{e}^{u_k} \geqslant 0$$

  par positivité de la fonction exponentielle.

- On a vu lors de la récurrence de la question *2* que, pour tout $k \geqslant 1$, $u_k < 0$. Il suit :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{e}^{u_k} = \mathrm{e} + \sum_{k=1}^{n-1} \mathrm{e}^{u_k} \leqslant \mathrm{e} + \sum_{k=1}^{n-1} 1 = \mathrm{e} + n - 1$$

  D'où :

$$u_n \leqslant 1 - 4n + \mathrm{e} + n - 1 = \mathrm{e} - 3n$$

L'encadrement étant encore valable pour $n = 0$, on peut conclure :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ 1 - 4n \leqslant u_n \leqslant \mathrm{e} - 3n.}$$

b) Pour $n = 0$, la somme est vide donc vaut 0. Dans ce cas la majoration est valable.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après la question précédente :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{e}^{u_k} &\leqslant \sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{e}^{\mathrm{e}-3k} \\
&= \mathrm{e}^{\mathrm{e}} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\mathrm{e}^{-3}\right)^k \\
&\leqslant \mathrm{e}^{\mathrm{e}} \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\mathrm{e}^{-3}\right)^k \qquad \textit{(série géométrique convergente car } e^{-3} \in]-1,1[\textit{)} \\
&= \mathrm{e}^{\mathrm{e}} \frac{1}{1-\mathrm{e}^{-3}} \\
&= \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{e}}}{1-\mathrm{e}^{-3}}
\end{aligned}$$

4. a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après la question précédente :

$$0 \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{e}^{u_k} \leqslant \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{e}}}{1-\mathrm{e}^{-3}}$$

donc :

$$1 - 4n \leqslant u_n \leqslant 1 - 4n + \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{e}}}{1-\mathrm{e}^{-3}}$$

d'où :

$$1 - \frac{1}{4n} \geqslant \frac{u_n}{-4n} \geqslant 1 - \frac{1}{4n} - \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{e}}}{(1-\mathrm{e}^{-3})4n}$$

Par théorème d'encadrement :

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{u_n}{-4n} = 1$$

$$\boxed{\text{On peut conclure que : } u_n \underset{n \to +\infty}{\sim} -4n \text{ (on pose } w_n = -4n \text{ pour la suite).}}$$

b) Soit $n \geqslant 700$. D'après les calculs précédents :

$$\left|\frac{u_n}{w_n} - 1\right| \leqslant \frac{1 + \dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{e}}}{1-\mathrm{e}^{-3}}}{4n}$$

× D'une part : $4n \geqslant 2800 = 28 \times 10^2$.

× D'autre part :

$$\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{e}}}{1-\mathrm{e}^{-3}} = \mathrm{e}^3\,\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{e}}}{\mathrm{e}^3 - 1} < 27\,\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{e}}}{\mathrm{e}^3-1}$$

et donc il suffit de montrer que :

$$\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{e}}}{\mathrm{e}^3-1} \leqslant 1$$

Or :

$$\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{e}}}{\mathrm{e}^3-1} \leqslant 1 \iff \mathrm{e}^{\mathrm{e}} \leqslant \mathrm{e}^3 - 1 \iff 1 \leqslant \mathrm{e}^3 - \mathrm{e}^{\mathrm{e}}$$

et puisque $2,7 \leqslant \mathrm{e} \leqslant 2,72$, il suit que $\mathrm{e}^{\mathrm{e}} \geqslant 4$ et $3 - \mathrm{e} \geqslant 0,25 = \dfrac{1}{4}$. D'où, par croissance de l'intégrale (les bornes étant dans l'ordre croissant) :

$$\mathrm{e}^3 - \mathrm{e}^{\mathrm{e}} = \int_{\mathrm{e}}^{3} \mathrm{e}^x \mathrm{d}x \geqslant (3-\mathrm{e})\mathrm{e}^{\mathrm{e}} \geqslant 4(3-\mathrm{e}) \geqslant 1$$

c) On complète le programme **Python** de la manière suivante :

```
from numpy import exp, abs

u = -3 + np.exp(1)
n = 1

while np.abs(u/(-4*n) -1) >= .01:
    u = u - 4 + np.exp(u)
    n += 1
print(n)
```

Réponses de l'exercice sans préparation 5 :

- D'une part :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= \mathbb{E}\left(\sum_{k=1}^{n} \mathbb{1}_{A_k}\right)\\ &= \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}\left(\mathbb{1}_{A_k}\right) && \textit{(par linéarité de l'espérance)}\\ &= \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A_k)\end{aligned}$$

- D'autre part :

$$
\begin{aligned}
& \mathbb{E}(X) \\
= \ & \sum_{k=0}^{n} k\, \mathbb{P}([X = k]) \\
= \ & \sum_{k=0}^{n} k\, \Big(\mathbb{P}([X \geqslant k]) - \mathbb{P}([X \geqslant k+1]) \Big) \\
= \ & \sum_{k=0}^{n} k\, \mathbb{P}([X \geqslant k]) - \sum_{k=0}^{n} k\, \mathbb{P}([X \geqslant k+1]) \\
= \ & \sum_{k=0}^{n} k\, \mathbb{P}([X \geqslant k]) - \sum_{k=1}^{n+1} (k-1)\, \mathbb{P}([X \geqslant k]) && \textit{(par décalage d'indice)} \\
= \ & \sum_{k=0}^{n} k\, \mathbb{P}([X \geqslant k]) - \sum_{k=1}^{n+1} k\, \mathbb{P}([X \geqslant k]) + \sum_{k=1}^{n+1} \mathbb{P}([X \geqslant k]) && \textit{(par linéarité de la somme)} \\
= \ & 0 \times \mathbb{P}([X \geqslant 0]) + \cancel{\sum_{k=1}^{n} k\, \mathbb{P}([X \geqslant k])} - \left(\cancel{\sum_{k=1}^{n} k\, \mathbb{P}([X \geqslant k]} + (n+1)\, \mathbb{P}([X \geqslant n+1]) \right) + \sum_{k=1}^{n+1} \mathbb{P}([X \geqslant k]) \\
= \ & \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}([X \geqslant k]) && \textit{(car, comme } X(\Omega) = [\![0, n]\!] \textit{ :} \\
& && [X \geqslant n+1] = \varnothing\textit{)} \\
= \ & \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(B_k)
\end{aligned}
$$